1. 정답) ①

$\sqrt[3]{24}\times 3^{\frac{2}{3}}=(2^3\times 3)^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{2}{3}}=2\times 3=6$

2. 정답) ④

$f(x)=2x^3-5x^2+3$

$f'(x)=6x^2-10x$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)=24-20=4$

3. 정답) ②

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$에서 $\sin(-\theta)=-\sin\theta=-\left(-\frac{1}{3}\right)$이므로

$$\sin\theta=-\frac{1}{3},\quad \cos\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

4. 정답) ①

$f(x)=\begin{cases}3x-a & (x<2)\\ x^2+a & (x\geq 2)\end{cases}$에서 연속이려면

$\lim_{x\to 2-}(3x-a)=\lim_{x\to 2+}(x^2+a)=f(2)$

$6-a=4+a$

$\therefore a=1$

5. 정답) ④

$f'(x)=3x^2-6x,\ f(1)=6$

$f(x)=x^3-3x^2+C$ (C,적분상수)

$f(1)=1-3+C=6\ \ \therefore C=8$

$f(x)=x^3-3x^2+8$

$f(2)=8-12+8=4$

6. 정답) ④

$S_4-S_2=a_1+a_2+a_3+a_4-(a_1+a_2)=3a_4$

$a_3=2a_4$

$ar^2=2ar^3$

$r=\frac{1}{2}$

$a_5 = ar^4 = a\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{a}{16} = \frac{3}{4}$

$a = 12$

$a_1 + a_2 = 12 + 12 \times \frac{1}{2} = 18$

7. 정답) ⑤

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 12x + 4$

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 - 4x - 12 = 0 \\ &= (x+2)(x-6) = 0 \end{aligned}$$

따라서 $x = -2$ 에서 극대, $x = 6$에서 극소

$\beta - \alpha = 6 - (-2) = 8$

8. 정답) ②

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$라 두면

$$\begin{aligned} xf(x) - f(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - (ax^3 + bx^2 + cx + d) \\ &= ax^4 + (b-a)x^3 + (c-b)x^2 + (d-c)x + d \\ &= 3x^4 - 3x \end{aligned}$$

$\therefore a = 3, b = 3, c = 3, d = 0$

$f(x) = 3x^3 + 3x^2 + 3x$

$\int_{-2}^{2} f(x)dx = 2\int_{0}^{2} 3x^2 dx = 2\left[x^3\right]_0^2 = 16$

9번. 정답) 4

$\frac{mlog_5 12 + (1-m)\log_5 3}{m + (1-m)} = 1$

$mlog_5 12 + \log_5 3 - mlog_5 3 = 1$

$mlog_5 4 + \log_5 3 = 1$

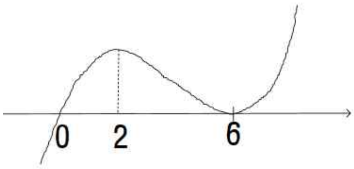
$mlog_5 4 = \log_5 \frac{5}{3}$

$m = \log_4 \frac{5}{3}$

$4^m = \frac{5}{3}$

10번. 정답) 2번

sol) $f(t)=\frac{1}{3}\left|t^3-12t^2+36t\right|$ 이므로 $t>0$에서



에서 $a=2, b=6$임을 알수 있다.

따라서 Q의 속도함수 $v(t)=2t-7$이므로 $t=2$ ~ $t=6$까지 둘러싸인 면적이 이동거리 이므로 정답은 $\frac{17}{2}$

11번. 정답) 1

$a_6+a_8=0$

$a_7=0$

$a=-6d$

$\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{a_k a_{k+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a_6}\right)$

a에 $-6d$ 대입하면,

$\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a_6}\right)=\frac{1}{d^2}\left(-\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)$

$\frac{5}{6d^2}=\frac{5}{96}$

$d^2=16$

$d=4$ (a_8이 양수기 때문에 d는 양수)

$a_1=-24$
$a_{15}=32$
$\sum_{k=1}^{15}a_k=\frac{15(-24+32)}{2}=60$

12번. 정답) 3번

sol) $y=g(x)$의 그래프와 x축과의 둘러 싸인 영역의 넓이가 최대가 되는 상항은 $x=t$에서 $f(x)$와 $-(x-t)+f(t)$가 접할때이다. 여기서 $-(x-t)+f(t)$은 기울기가 -1인 직선이므로 $x=t$는 $f(x)$의 접선중 기울기가 -1이 되는 작은 x좌표 이다.
$f'(x)=-1$이 되는 작은 x좌표는 3이므로 $t=3$이다.
따라서 우리가 구하고자 하는 값은
$\int_0^3 \frac{1}{9}f(x)dx=\frac{9}{4}-15+27$이고 접점의 좌표가 $(3,6)$이므로 삼각형의 넓이는 18이다.

따라서 $\frac{9}{4}-15+27+18=\frac{129}{4}$

13번. 정답) 1

삼각형 ABC에서 코사인법칙을 이용.
$\overline{BC}=x$

$13=9+x^2-6x\cos\frac{\pi}{3}$
$x=4$

삼각형 ABC의 넓이 $S_2=\frac{1}{2}\times 3\times 4\times \sin\frac{\pi}{3}$
$S_2=3\sqrt{3}$
$S_1=\frac{5\sqrt{3}}{2}$이고,
문제에서 주어진 $\overline{AD}\times\overline{BC}=9$를 이용.

$\frac{5\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{BC}\times\sin ADC$

$\sin ADC=\frac{5\sqrt{3}}{9}$

사인법칙을 이용.

$\frac{4}{\frac{5\sqrt{3}}{9}}=2R$

$R=\frac{18}{5\sqrt{3}}$

따라서 $\frac{R}{\sin ADC}=\frac{54}{25}$

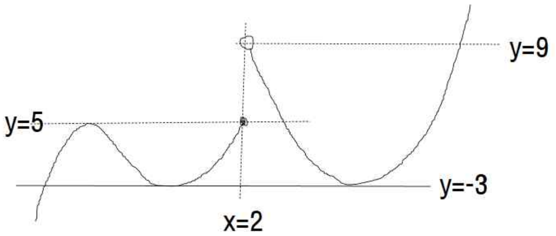
14번. 정답) 1번

sol)

$x<2$부분의 $f(x)$의 그래프가 주어지고 상수함수 $y=k$의 근방에서 교점의 개수의 합이 9가 되는 상수함수 k가 유일해야 하므로 그래프적 상황을 고려하면 $x>2$에서 이차함수는 다음 그림과 같아야 한다.

따라서 $k=-3$일 때 유일하고 이때 $a(\frac{b-2}{2})^2=12$이고 (a,b)은 자연수 순서쌍 이므로

$(48,3)\ (12,4)\ (3,18)$ 따라서 $a+b$의 최대값은 51이다.



15번. 정답) 3

$a_6 + a_7 = 3$을 이용.

a_6이 홀수

$a_6 + 2^{a_6} = 3$
$a_6 = 1$

a_6이 짝수

$\frac{3}{2}a_6 = 3$
$a_6 = 2$

역추적을 들어간다.

a_6이 1이고, a_5는 홀수 일때.
$2^{a_5} = 1$이 성립하는 a_5는 존재 하지 않는다.
a_6이 1이고, a_5는 짝수 일때.
$a_5 = 2$

a_5부터 역순으로 계산을 하면

$$a_5\begin{cases} a_4 = 1\begin{cases} a_3 = 2\begin{cases} a_2 = 1\ ,a_1 = 2 \\ a_2 = 4, a_1 = 8 \end{cases} \\ \end{cases} \\ a_4 = 4\begin{cases} a_3 = 8\begin{cases} a_2 = 3\quad ,a_1 = 6 \\ a_2 = 16,\ a_1 = 32 \end{cases} \\ \end{cases} \end{cases}$$

$a_5 = 2$를 반복되는 것을 포함하여 한번 더 반복.

a_1이 될 수 있는 값은 2,8,6,32,1,4,3,16,12,5,64
합은

$$\frac{\overline{BD}}{\sin\frac{2\pi}{3}}=2R_2$$

$R_2=($가 $\frac{1}{\sqrt{3}})\overline{BD}$

(가) $=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\overline{BD}^2=2^2+1^2-($나 $2\times1\times2\times(-\frac{1}{2}))=7$

(나) $=-2$

$R_1\times R_2=($다 $\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times7)$

(다) $=\frac{7}{\sqrt{6}}$

$9\times(\frac{1}{\sqrt{3}}\times(-2)\times\frac{7}{\sqrt{6}})^2=98$

16. 정답) 2

$3^{x-8}=3^{-3x}$

$4x=8$

$\therefore x=2$

17. 정답) 8

$f(x)=(x+1)(x^2+3)$

$f'(x)=x^2+3+(x+1)\times2x$

$f'(1)=1+3+(1+1)\times2=8$

18. 정답) 9

$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}b_k-10$

$\sum_{k=1}^{10}3a_k+\sum_{k=1}^{10}b_k=33$

두 식을 연립하면

$\sum_{k=1}^{10}b_k=9$

19. 정답) 32

$f(x)=\sin\frac{\pi}{4}x,\ 0<x<16$

$f(2+x)f(2-x)=\sin\frac{\pi}{4}(2+x)\sin\frac{\pi}{4}(2-x)$

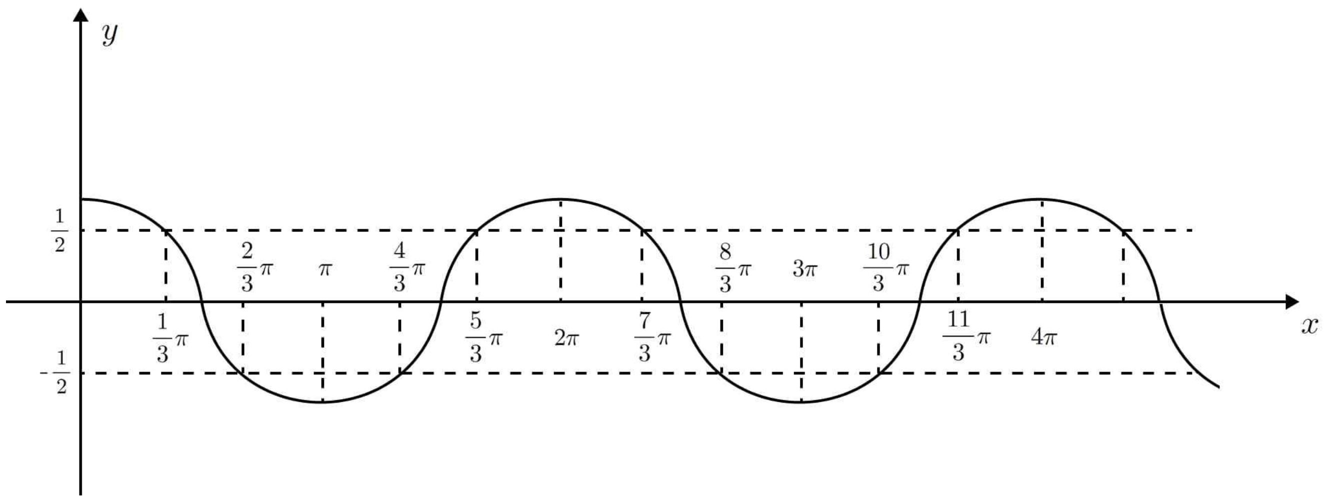
$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}x\right)$$

$$=\cos\frac{\pi}{4}x\times\cos\frac{\pi}{4}x=\cos^2\frac{\pi}{4}x<\frac{1}{4}$$

$-\frac{1}{2}<\cos\frac{\pi}{4}x<\frac{1}{2}$

$\frac{\pi}{4}x=t$로 취환하면

$-\frac{1}{2}<\cos t<\frac{1}{2}$



$\frac{\pi}{3}<t<\frac{2}{3}\pi,\ \ \frac{4}{3}\pi<t<\frac{5}{3}\pi,\ \ \frac{7}{3}\pi<t<\frac{8}{3}\pi,\ \ \frac{10}{3}\pi<t<\frac{11}{3}\pi$

$\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{4}x<\frac{2}{3}\pi,\ \ \frac{4}{3}\pi<\frac{\pi}{4}x<\frac{5}{3}\pi,\ \ \frac{7}{3}\pi<\frac{\pi}{4}x<\frac{8}{3}\pi,\ \ \frac{10}{3}\pi<\frac{\pi}{4}x<\frac{11}{3}\pi$

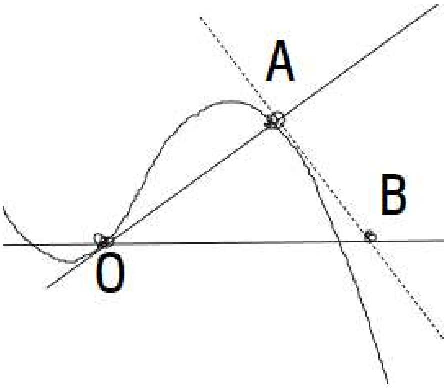
$\frac{4}{3}<x<\frac{8}{3},\ \ \frac{16}{3}<x<\frac{20}{3},\ \ \frac{28}{3}<x<\frac{32}{3},\ \ \frac{40}{3}<x<\frac{44}{3}$

$x=2,\qquad x=6,\qquad x=10,\qquad x=14$

모든 자연수의 합은 32

20번. 정답) 25

sol) $f(x)=-x^3+ax^2+2x$ 이고 $f'(x)=-3x^2+2ax+2$ 인데 $f(x)$의 세근의 합이 a이므로 점A의 x좌표는 a이다. 따라서 OB를 지름으로한 원위의 한점이 A이므로 직선OA와 직선AB는 수직이다. 따라서 $f'(0)=2$ 이고 $f'(a)=-a^2+2=-\frac{1}{2}$ 이므로 $a^2=\frac{5}{2}$이다. 따라서 $\overline{OA}\times\overline{OB}=25$



21번. 정답) 10

a가 양수이고.

t가 6인 $5 \le x \le 7$인 구간에서

$alog_4(x-5)$에서 $x=5$에서는 최댓값으로 5를 가진다.

$alog_4(x-5)$에서 $x=7$에서 최댓값이 5이상이 된다면 $g(t)$의 최솟값이 5가 되게된다.

따라서, $alog_4(x-5)$에서 $x=7$을 대입

$alog_4(2) \ge 5$

양수 a의 최솟값은 10이다.

22번. 정답) 483

sol) $f(x)=0$의 가장 작은 실근을 a라 하자.

Let) a가 정수 일 때 $f(k-1)f(k+1)<0$인 정수 k가 존재하지 않을려면
나머지 두근이 정수근 이이여야 하고 이경우는 $f(x)=(x-a)(x-(a+1))(x-(a+2))$ 또는 $f(x)=(x-a)(x-(a+1))^2$ 이여야 한다.
여기서 문제 조건이 $f'(-\frac{1}{4})=-\frac{1}{4}$이고 $f'(\frac{1}{4})<0$이므로 $(-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$은 $f(x)$의 감소 구간이고 $a+1=0$ 인데
$a=-1$ 인경우$f'(-\frac{1}{4})=-\frac{1}{4}$에 모순된다. 따라서 a는 정수가 아니다

따라서 a는 정수가 아닌 실수이고

$f(x)=(x-a)x(x-1)$이 되므로 여기서 $a=-\frac{5}{8}$이고 따라서 $f(8)=483$