수학 공통 과목

1번 정답 ⑤

$3^{1-\sqrt{5}} \times 3^{1+\sqrt{5}} = 3^{(1-\sqrt{5})+(1+\sqrt{5})} = 3^2 = 9$

2번 정답 ③

$f(x) = 2x^2 - x$

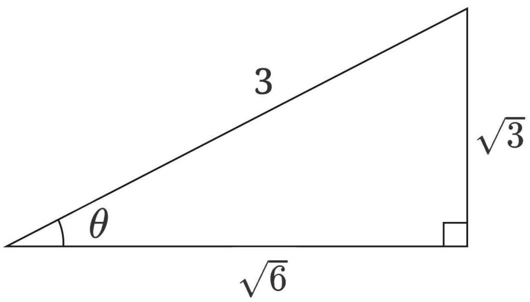
$f'(x) = 4x - 1$

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$

$\therefore f'(1) - 4 - 1 = 3$

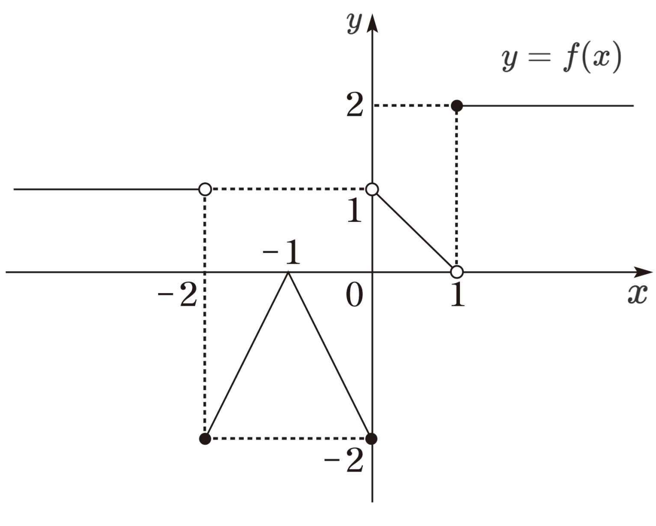
3번 정답 ②

$\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 4사분면에서는 $\cos\theta$만 + 이므로



$\tan\theta = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

4번 정답 ①



그림에서 $\lim_{x\to -2+} f(x) + \lim_{x\to 1-} f(x) = -2+0 = -2$

5번 정답 ⑤

등비수열의 일반항은 $a_n = ar^{n-1}$

$\frac{a_3 a_8}{a_6} = \frac{ar^2 ar^7}{ar^5} = ar^4 = 12$

$a_5 + a_7 = ar^4 + ar^6 = 36$

두 식에서 $ar^6 = 24$,

$r^2 = 2,\ a = 3$

$a_{11} = ar^{10} = a(r^2)^5 = 3\times 2^5 = 96$

6번 정답 ③

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$에서 $x=-1,\ x=3$에서 극값이므로

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 0$의 두 근이 $x=-1,\ x=3$

$-1+3 = -\frac{2a}{3} \Rightarrow a=-3,\ -1\times 3 = \frac{b}{3} \Rightarrow b=-9$

따라서 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

$x=-1$에서 극대이므로

$f(-1) = (-1)^3 - 3\times(-1)^2 - 9\times(-1) + 1 = 6$

7번 정답 ④

$3a+2b = 5\log_3 2,\ ab = \frac{1}{2}\log_3 2$이므로

$\frac{1}{3a} + \frac{1}{2b} = \frac{3a+2b}{6ab} = \frac{5\log_3 2}{6\times\frac{1}{2}\log_3 2} = \frac{5}{3}$

8번 정답 ④

$f'(x) = 6x^2 - 2f(1)x,\ f(0) = 4$

$f(x) = 2x^3 - f(1)x^2 + C$
$f(0) = C = 4$

$f(x) = 2x^3 - f(1)x^2 + 4$
$f(1) = 2 - f(1) + 4$
$f(1) = 3$

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$
$f(2) = 16 - 12 + 4 = 8$

9번
정답 ③

$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\le x\le\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{7}$

$\beta-\alpha=\pi+2\frac{\pi}{7}=\frac{9\pi}{7}$

#10. 정답) ③

sol)
먼저 $(2,3)$에서의 접선이 $(1,3)$을 지나므로 $f'(2)=0$이다.
따라서 최계수가 1인 삼차함수 $f(x)=(x-2)^2(x-k)+3$ 라 둘 수 있다.
한편 $x=-2$에서의 접선$y=f'(-2)(x+2)+f(-2)$ 가
$(1,3)$을 지나므로 $3=f'(-2)\times3+f(-2)$ 이고 따라서 $k=-8$이다.
따라서 $f(0)=-4k+3=35$

#11. 정답) ⑤

sol)
P,Q 의 위치함수 $x_1(t),x_2(t)$는 다음과 같다.

$x_1(t)=t^3+2t^2-7t+1$

$x_2(t)=t^2+4t+8$

출발한 시각으로부터 두 점 P,Q가 거리가 처음으로 4될 때의 t를 구해보자.
$|x_1(t)-x_2(t)|=4$ 방정식의 가장 작은 양근 t는 3이다.
점 P의 $t=3$까지의 이동거리는 $\int_0^3|v_1(t)|\,dt$ 이고 $v_1(t)$가 $t=1$까지 음수 이므로

$$\int_0^3|v_1(t)|\,dt=-\int_0^1 v_1(t)\,dt+\int_1^3 v_1(t)\,dt=-[x_1(1)-x_1(0)]+[x_1(3)-x_1(1)]$$

$\therefore 4+28=32$

12번
정답 ①

a가 홀수인 경우
$a_2=a+1$ 짝수

$a_3=\frac{a+1}{2}$

a_3이 홀수인 경우

$a_4 = \frac{a+1}{2} + 1$

$a_2 + a_4 = a + 1 + \frac{a+1}{2} + 1 = 40$
$a = 25$
a_3이 짝수인 경우

$a_4 = \frac{a+1}{4}$

$a_2 + a_4 = a + 1 + \frac{a+1}{4} = 40$
$a = 31$

a가 짝수인 경우

$a_2 = \frac{a}{2}$

a_2가 홀수인 경우 $a_3 = \frac{a}{2} + 1$은 짝수 $a_4 = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}$

$a_{2+}a_4 = \frac{a}{2} + \frac{a}{4} + \frac{1}{2} = 40$
$3a = 158$
a가 짝수에 위배.

a_2가 짝수인 경우 $a_3 = \frac{a}{4}$은 a_3이 짝수이면 $a_4 = \frac{1}{4}a + 1$

$a_{2+}a_4 = \frac{a}{2} + \frac{a}{4} + 1 = 40$
$3a = 156$
$a = 52$

a_2가 짝수인 경우 $a_3 = \frac{a}{4}$은 a_3이 홀수이면 $a_4 = \frac{1}{8}a$

$a_{2+}a_4 = \frac{a}{2} + \frac{a}{8} = 40$
$5a = 320$
$a = 64$

따라서
a가 될 수 있는 값은 25, 31, 52, 64
$25 + 31 + 52 + 64 = 172$

#13 정답) ③

sol) $f(x)$는 실수전체에서 연속이고 $x=-1$에서 감소에서 증감으로 바뀌어야 한다.
따라서 $f'(x)$는 $f'(-1)=0$이고 $x<-1$, $f'(x)\le 0$ 이고 $x>-1$, $f'(x)\ge 0$ 이여야 한다.
$f'(x)=\begin{cases}-x^2-2ax-b & (x<0)\\ x^2+2ax-b & (x\ge 0)\end{cases}$ 이고 $f'(-1)=2a-1-b=0$ $\quad \therefore b=2a-1$

정리를 해보자면 $-x^2-2ax-b=0$ 의 두근 $-1,\ 1-2a$ $(-1<1-2a)$ 이여야 한다.

여기서 a의 범위를 구해보자면 $\boxed{(\text{i})\ -1<1-2a \Leftrightarrow a<1}$

한편, $x\ge 0$에서 $x^2+2ax-b\ge 0$ 이여야 한다. $g(x)=x^2+2ax-b$ 라 하자.
$x\ge 0$에서 $g(x)\ge 0$ 인 조건은

㉠ $g(x)=0$의 $\dfrac{D}{4}\le 0 \Leftrightarrow (-1-\sqrt{2}\le a\le -1+\sqrt{2})$

또는 ㉡ $\dfrac{D}{4}>0$ 이면 $g(x)$의 축의 방정식 $x=-a<0$ and $g(0)\ge 0$

$\Leftrightarrow \left(0<a\le \dfrac{1}{2}\right)$

여기서 a의 범위를 구해보자면 $\boxed{(\text{ii})\ \ -1-\sqrt{2}\le a\le \dfrac{1}{2}}$

따라서 최종적인 a의 범위는 $-1-\sqrt{2}\le a\le \dfrac{1}{2}$ 이다.

$\therefore a+b=3a-1$ 이고 $m=-4-3\sqrt{2}\le 3a-1\le \dfrac{1}{2}=M,\quad \therefore M-n=\dfrac{9}{2}+3\sqrt{2}$

14번
정답 ②

$-3^{x-3}+8$ 점근선이 8이고 $f(x)$가 정수인 것의 개수가 2,
$3\le k<4$에서 가질 수 있는 정수는 6과 7이다.
7은 반드시 포함하고 있다.

$2^{x+a}+b$의 점근선은 5이상이 되어야 한다.
$b=5$
$2^{x+a}+5$ 식에 $x=-8$을 대입
$6\le 2^{x+a}+5<8$ 이다.

$a=8$
$a+b=13$

#15 정답) ④

sol) $g(x)$가 $x=3$에서 불연속 이므로 $f(3)=0, f(6)=0$ 이다.

따라서 $\lim_{x\to3}\frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}=g(3)-1=2$ 이다.

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}=\lim_{x\to3}\frac{f(x+3)}{f(x)}=\frac{f'(6)}{f'(3)}=2$$

$\therefore f(x)=(x-3)(x-4)(x-6)$ 이다. 따라서 $g(5)=20$

16번 정답 6

$\log_2(x-1)=\log_4(13+2x)$에서

진수의 성질에 의하여

$x-1>0,\ 13+2x>0 \Rightarrow x>1$

$\log_2(x-1)=\frac{1}{2}\log_2(13+2x)$

$\log_2(x-1)^2=\log_2(13+2x)$

$(x-1)^2=13+2x$

$x^2-4x-12=(x+2)(x-6)=0$

$\therefore\ x=6$

17. 정답 24

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k-b_k)=2\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k=34$$

$\sum_{k=1}^{10}a_k=10$에서 $\sum_{k=1}^{10}b_k=-14$

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}b_k=24$$

18번 정답 $a=5$

$f(x)=(x^2+1)(x^2+ax+3),\ f'(1)=32$

$f'(x)=2x(x^2+ax+3)+(x^2+1)(2x+a)$

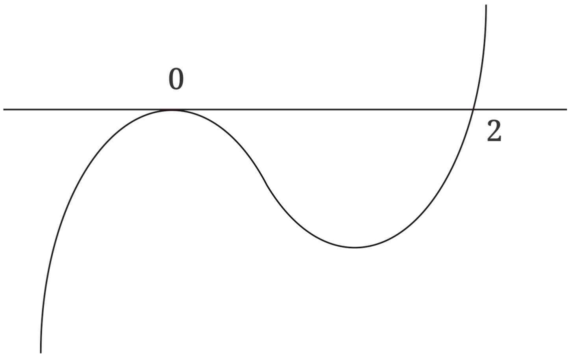
$f'(1)=2\times(1+a+3)+(1+1)(2+a)=32$

$\therefore\ a=5$

19번 정답 4

$y=3x^3-7x^2$, $y=-x^2$을 연립하면

$3x^3-6x^2=3x^2(x-2)=0$



$\Rightarrow \frac{3(2-0)^4}{3\times 4}=4$

20번

정답 98

$\frac{\overline{BD}}{\sin\frac{2\pi}{3}}=2R_2$

$R_2=($가 $\frac{1}{\sqrt{3}})\overline{BD}$

$($가$)=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\overline{BD}^2=2^2+1^2-($나 $2\times 1\times 2\times(-\frac{1}{2}))=7$

$($나$)=-2$

$R_1\times R_2=($다 $\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times 7)$

$($다$)=\frac{7}{\sqrt{6}}$

$9\times(\frac{1}{\sqrt{3}}\times(-2)\times\frac{7}{\sqrt{6}})^2=98$

21번
정답 19

$$\sum_{k=1}^{7} S_k = 28a + 56d = 644$$
$a + 2d = 23$

$d = 4$일때, $a = 15$이고
$a_7 = 39$
13의 배수가 된다.
$a_2 = 19$

#22 정답) 10

sol)
(가)에서 $f(1) = 3, f'(x) = 4$ 인 사실을 알 수 있다. 고로 $f(x) = 4x - 1$
(나)에서 $F'(x)G(x) + F(x)G'(x) = 8x^3 + 3x^2 + 1$ 이므로
양변을 적분하면 $F(x)G(x) = 2x^4 + x^3 + x + C$이다.
여기서 $F(x) = \int f(x)dx = 2x^2 - x + k$ 이므로
(나)의 식을 다시 정리하면 x에 대한 항등식 $(2x^2 - x + k)G(x) = 2x^4 + x^3 + x + C$를 얻을 수 있다.
따라서 양변의 계수 비교법을 통해 $G(x) = x^2 + x + k - 1$ 임을 알 수 있다.
$$\int_1^3 g(x)dx = G(3) - G(1) = 12 - 2 = 10$$