23. 정답 ④

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-1}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{7x}-1}{7x}\times\frac{2x}{e^{2x}-1}\times\frac{7}{2}\right)$$
$$=\frac{7}{2}\times\lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-1}{7x}\times\lim_{x\to 0}\frac{2x}{e^{2x}-1}$$
$$=\frac{7}{2}\times 1\times 1=\frac{7}{2}$$

24. 정답 ②

$\frac{dx}{dt}=1-2\sin 2t$, $\frac{dy}{dt}=2\sin t\cos t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2\sin t\cos t}{1-2\sin 2t}\ \cdots\ ㉠$$

(단, $1-2\sin 2t\neq 0$)

㉠의 우변에 $t=\frac{\pi}{4}$를 대입하면

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}}{1-2\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-2\times 1}$$
$$=\frac{1}{1-2}=-1$$

25. 정답②

$f'(x)=1+\frac{1}{x}$이므로

$\int_1^e\left(1+\frac{1}{x}\right)f(x)dx$

$=\int_1^e f'(x)f(x)dx$

$=\left[\frac{1}{2}\{f(x)\}^2\right]_1^e$

$=\frac{1}{2}\{f(e)\}^2-\frac{1}{2}\{f(1)\}^2$

$=\frac{1}{2}(e+1)^2-\frac{1}{2}(1+0)^2$

$=\frac{e^2}{2}+e$

26. 정답 ⑤

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d $(d>0)$이라 하면

$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{a_{n+1}-a_n}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$

$\quad=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$

이므로

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$

$=\frac{1}{d}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\right.$

$\left.\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right\}$

$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$ $\cdots$ ㉠

이때

$a_n = a_1 + (n-1)d = dn + 1 - d$

이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(dn+1-d) = \infty$

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_{n+1}} = 0$

㉠에서

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$

$= \frac{1}{d}\left(\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_{n+1}}\right)$

$= \frac{1}{d}(1-0)$

$= \frac{1}{d}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n a_{n+1}} + b_n\right) = 2$에서

$\frac{1}{a_n a_{n+1}} + b_n = c_n$이라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 2$

$b_n = c_n - \frac{1}{a_n a_{n+1}}$이므로 급수의 성질에 의하여

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n - \frac{1}{a_n a_{n+1}}\right)$

$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}}$

$= 2 - \frac{1}{d}$ ⋯ ㉡

따라서 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r라 하면

$-1 < r < 1$이고 $a_2 b_2 = (1+d)r = 1$에서

$r = \dfrac{1}{1+d}$

이때 $d > 0$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{b_1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{1+d}} = \frac{1+d}{d} \quad \cdots \text{㉢}$$

이므로 ㉡, ㉢에서

$2 - \dfrac{1}{d} = \dfrac{1+d}{d}$,

$\dfrac{2d-1}{d} = \dfrac{1+d}{d}$

$d = 2$

㉡ 또는 ㉢에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{3}{2}$$

27, 정답 ①

$$y = \begin{cases} -\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} + 1 & (x < 0) \\ 0 & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} -\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} & (x < 0) \\ 0 & (x \geq 0) \end{cases}$$

이므로 $x < 0$일 때

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2$$

에서

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2}$$

$$= \left|\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right| = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

이고, $x \geq 0$일 때

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+0=1$$

따라서 $-\ln4\le x\le1$에서의 곡선의 길이는

$$\int_{-\ln4}^{1}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_{-\ln4}^{0}\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx+\int_{0}^{1}1dx$$

$$=\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_{-\ln4}^{0}+[x]_0^1$$

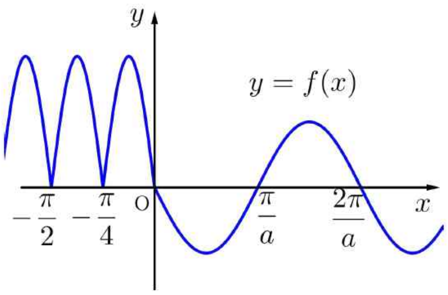
$$=\left(\frac{e^0-e^0}{2}-\frac{e^{-\ln4}-e^{\ln4}}{2}\right)+(1-0)$$

$$=\left(0-\frac{\frac{1}{4}-4}{2}\right)+1$$

$$=\frac{15}{8}+1=\frac{23}{8}$$

28. 정답 ②

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$F(x)=\int_{-a\pi}^{x}f(t)dt$라 하자.

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $F(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

이때 정적분의 성질에 의하여

$F'(x) = f(x)$

이고,

$$g(x) = \begin{cases} -F(x) & (F(x) < 0) \\ F(x) & (F(x) \geq 0) \end{cases}$$

이므로

$$g'(x) = \begin{cases} -f(x) & (F(x) < 0) \\ f(x) & (F(x) > 0) \end{cases}$$

따라서 함수 $g(x) = |F(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$F(k) = 0$인 실수 k가 존재하지 않거나

$F(k) = 0$인 모든 실수 k에 대하여

$F'(k) = f(k) = 0$이어야 한다.

(ⅰ) 함수 $g(x)$가 구간 $(-\infty, 0)$에서 미분가능할 조건

$-a\pi < 0$이고 모든 음의 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 0$이므로

$F(k) = \int_{-a\pi}^{k} f(t)dt = 0$인 음의 실수 k의 값은 $-a\pi$뿐이다.

이때

$f(k) = f(-a\pi) = 2|\sin(-4a\pi)| = 0$

이어야 하므로 $-4a\pi = -n\pi$, 즉

$a = \frac{n}{4}$ (n은 자연수) ⋯ ㉠

(ⅱ) 함수 $g(x)$가 구간 $[0, \infty)$에서 미분가능할 조건

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} (-2\sin 4t)dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}\cos 4t\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{0}$$

$$= \frac{1}{2}\cos 0 - \frac{1}{2}\cos(-\pi)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

이고 모든 음의 실수 x에 대하여

$f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=f(x)$가 성립하므로 ㉠에서

$\int_{-a\pi}^{0} f(t)dt=\int_{-\frac{n}{4}\pi}^{0} f(t)dt$

$=n\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt=n$

따라서 양의 실수 x에 대하여

$F(x)=\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt$

$=\int_{-\frac{n}{4}\pi}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{x} f(t)dt$

$=n+\int_{0}^{x}(-\sin at)dt$

$=n+\left[\frac{1}{a}\cos at\right]_{0}^{x}$

$=n+\left(\frac{1}{a}\cos ax-\frac{1}{a}\cos 0\right)$

$=n+\frac{1}{a}\cos ax-\frac{1}{a}$

$=n+\frac{4}{n}\cos\frac{n}{4}x-\frac{4}{n}$

이때 $F(k)=0$인 양수 k가 존재하면

$n=\frac{4}{n}\left(1-\cos\frac{n}{4}k\right)$

에서

$\cos\frac{n}{4}k=1-\frac{n^2}{4}$ $\cdots$ ㉡

이때 $f(k)=-\sin ak=-\sin\frac{n}{4}k=0$이어야

하므로

$\frac{n}{4}k=m\pi$ (m은 자연수)에서

㉡에서

$\cos m\pi=1-\frac{n^2}{4}$

이때 m, n은 자연수이므로

$\cos m\pi=1-\frac{n^2}{4}=-1$, 즉 $n^2=8$을 만족

시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.
그러므로 함수 $g(x)$가 구간 $[0, \infty)$에서 미분가능하려면 모든 양의 실수 x에 대하여

$$F(x)=n+\frac{4}{n}\cos\frac{n}{4}x-\frac{4}{n}>0$$

즉,

$$\cos\frac{n}{4}x>1-\frac{n^2}{4}$$

이어야 한다.

따라서 $1-\dfrac{n^2}{4}<-1$이어야 하므로

$$n^2>8$$

따라서 자연수 n의 최솟값은 3이므로 ㉠에서 a의 최솟값은 $\dfrac{3}{4}$이다.

29. 정답18

정답풀이 :

(ⅰ) $1<a<3$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{a}{3}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+a\left(\frac{a}{3}\right)^n}{3+\left(\frac{a}{3}\right)^n}$$

$$=\frac{1+a\times0}{3+0}=\frac{1}{3}=a$$

$a=\dfrac{1}{3}<1$이므로 모순이다.

(ⅱ) $a=3$인 경우

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+3^{n+1}}{3^{n+1}+3^n}$$

$=\lim_{n\to\infty}1=1=a$

이므로 모순이다.

(iii) $a>3$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{a}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{a}\right)^n+a}{3\left(\frac{3}{a}\right)^n+1}$$

$$=\frac{0+a}{3\times0+1}=a$$

이므로 등식을 만족시킨다.

(1) $3<a<b$일 때

같은 방법으로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}$$

$$=b>3=\frac{9}{3}>\frac{9}{a}$$

이므로 등식을 만족시키지 않는다.

(2) $3<b<a$일 때

같은 방법으로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}$$

$$=\frac{1}{a}\neq\frac{9}{a}$$

이므로 등식을 만족시키지 않는다.

(3) $3<a=b$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+a^{n+1}}{a^{n+1}+a^n}=1=\frac{9}{a}$$

에서

$a=9$, $b=9$

이상에서 $a=9$, $b=9$이므로

$a+b=18$

30. 정답 32

선분 AB의 중점을 O라 하면

$\overline{OP}=5$

$\overline{OC}=\overline{AO}-\overline{AC}=5-4=1$

삼각형 PCO에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{OP}^2=\overline{CP}^2+\overline{OC}^2-2\times\overline{CP}\times\overline{OC}\times\cos\theta$

$\overline{CP}=x$라 하면

$5^2=x^2+1^2-2\times x\times 1\times \cos\theta$

$x^2-2x\cos\theta-24=0$ ……㉠

$\theta=\frac{\pi}{4}$를 ㉠에 대입하면

$x^2-\sqrt{2}x-24=0$

$x>0$이므로 $x=4\sqrt{2}$

㉠을 θ에 대하여 미분하면

$2x\frac{dx}{d\theta}-2\cos\theta\frac{dx}{d\theta}+2x\sin\theta=0$

$\frac{dx}{d\theta}=\frac{x\sin\theta}{\cos\theta-x}$

$\theta=\frac{\pi}{4}$일 때, $\frac{dx}{d\theta}$의 값은

$\frac{dx}{d\theta}=\frac{4\sqrt{2}\times\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}-4\sqrt{2}}=-\frac{4\sqrt{2}}{7}$

선분 PQ의 중심을 M이라 하면

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{CM}$

$=\frac{1}{2}\times 2x\sin\theta\times x\cos\theta$

$=x^2\sin\theta\cos\theta$

이 식의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$\frac{dS(\theta)}{d\theta}$

$= 2x\frac{dx}{d\theta}\sin\theta\cos\theta + x^2\cos^2\theta - x^2\sin^2\theta$

이 식에 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 를 대입하면

$S'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$= 2\times 4\sqrt{2}\times\left(-\frac{4\sqrt{2}}{7}\right)\times\cos\frac{\pi}{4}\times\sin\frac{\pi}{4}$

$\quad + (4\sqrt{2})^2\cos^2\frac{\pi}{4} - (4\sqrt{2})^2\sin^2\frac{\pi}{4}$

$= -\frac{32}{7}$

따라서 $-7\times S'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -7\times\left(-\frac{32}{7}\right) = 32$