# ഗണിതം

## സ്റ്റാൻഡേർഡ്

## X

### ഭാഗം - 1

കേരളസർക്കാർ
വിദ്യാഭ്യാസവകുപ്പ്

തയാറാക്കിയത്

സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി (SCERT), കേരളം
2011

## ദേശീയഗാനം

ജനഗണമന അധിനായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ,
പഞ്ചാബസിന്ധു ഗുജറാത്ത മറാഠാ
ദ്രാവിഡ ഉത്ക്കല ബംഗാ,
വിന്ധ്യഹിമാചല യമുനാഗംഗാ,
ഉച്ഛ്വല ജലധിതരംഗാ,
തവശുഭനാമേ ജാഗേ,
തവശുഭ ആശിഷ മാഗേ,
ഗാഹേ തവ ജയ ഗാഥാ
ജനഗണമംഗലദായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ.
ജയഹേ, ജയഹേ, ജയഹേ,
ജയ ജയ ജയ ജയഹേ!

## പ്രതിജ്ഞ

ഇന്ത്യ എന്റെ രാജ്യമാണ്. എല്ലാ ഇന്ത്യക്കാരും എന്റെ സഹോദരീ സഹോദരന്മാരാണ്.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തെ സ്നേഹിക്കുന്നു; സമ്പൂർണവും വൈവിധ്യപൂർണവുമായ അതിന്റെ പാരമ്പര്യത്തിൽ ഞാൻ അഭിമാനം കൊള്ളുന്നു.

ഞാൻ എന്റെ മാതാപിതാക്കളെയും ഗുരുക്കന്മാരെയും മുതിർന്നവരെയും ബഹുമാനിക്കും.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തിന്റെയും എന്റെ നാട്ടുകാരുടെയും ക്ഷേമത്തിനും ഐശ്വര്യത്തിനും വേണ്ടി പ്രയത്നിക്കും.

*Prepared by* :

**State Council of Educational Research and Training (SCERT)**
Poojappura, Thiruvananthapuram 695012, Kerala

*Website* : www.scertkerala.gov.in
*e-mail* : scertkerala@asianetindia.com
Phone : 0471 - 2341883, Fax : 0471 - 2341869
First Edition : 2011
Typesetting : SCERT
Lay out : SCERT
Cover design : SCERT
Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi

പ്രിയപ്പെട്ട കുട്ടികളേ,

പാഠത്തും പണിശാലയിലും
മാനത്തും മനസ്സിലും
വിടരുന്ന ഗണിതം.
ചരിത്രത്തിലാഴുന്ന വേരുകൾ,
സംഖ്യകൾ, സമവാക്യങ്ങൾ,
ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങൾ
പിരിയുന്ന ശാഖകൾ
എല്ലാം അല്പമൊന്നറിയാൻ
ഈ ചെറുപുസ്തകം.
അറിവിൻ ഫലം, മനസ്സിന്റെ പാകം
ശരിയായ ചിന്ത, നേരായ വാക്ക്

ആശംസകളോടെ,

പ്രൊഫ. എം. എ. ഖാദർ
ഡയറക്ടർ
എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി.

# പാഠപുസ്തക രചനാസമിതി

## ഗണിതം X

**ചെയർമാൻ**

ഡോ. കൃഷ്ണൻ. ഇ.
ഹെഡ്, ഡിപ്പാർട്ട്മെന്റ് ഓഫ് മാത്തമാറ്റിക്സ് (Rtd.),
യൂണിവേഴ്സിറ്റി കോളേജ്, തിരുവനന്തപുരം

**അംഗങ്ങൾ**

അനിൽകുമാർ. എം. കെ.
എച്ച്.എസ്.എ., എസ്.കെ.എം.ജെ.
എച്ച്.എസ്.എസ്., കൽപ്പറ്റ, വയനാട്

ഡോ. ഗോകുലദാസൻ പിള്ള. സി.
ഹെഡ്, കരിക്കുലം ഡിപ്പാർട്ട്മെന്റ്,
എസ്.സി. ഇ.ആർ.ടി., തിരുവനന്തപുരം

പ്രഭാകരൻ നായർ. പി. പി.
എച്ച്.എസ്.എ.(Rtd.), പാലോറ എച്ച്.എസ്,
കോഴിക്കോട്

രമേശൻ. എൻ. കെ.
എച്ച്.എസ്.എ., രാജീവ് ഗാന്ധി മെമ്മോറിയൽ
ഹൈസ്കൂൾ, മൊകേരി, കണ്ണൂർ

ഡോ. രാധാകൃഷ്ണൻ ചെട്ടിയാർ. എസ്.
പ്രൊഫസർ (Rtd.), യൂണിവേഴ്സിറ്റി കോളേജ്,
തിരുവനന്തപുരം

വിജയകുമാരൻ. റ്റി. കെ.
എച്ച്.എസ്.എ., ഗവ. എച്ച്.എസ്. എസ്.,
കാസറഗോഡ്

ഡോ. സാബുജി വറുഗീസ്
എച്ച്.എസ്.എസ്.റ്റി., ഗവ. എച്ച്.എസ്.എസ്.,
തോട്ടക്കോണം, പന്തളം, പത്തനംതിട്ട

ഉണ്ണികൃഷ്ണൻ. എം. വി.
ലക്ചറർ ഇൻ മാത്തമാറ്റിക്സ്,
ക്രസന്റ് ബി.എഡ്. കോളേജ്, കണ്ണൂർ

പ്രകാശൻ. ടി. പി.
എച്ച്.എസ്.എ., ഗവ. എച്ച്.എസ്.എസ്.,
വാഴക്കാട്, മലപ്പുറം

നാരായണൻ. വി.
എച്ച്.എസ്.എസ്.റ്റി., ഗവ. എച്ച്.എസ്.എസ്.,
എടപ്പാൾ, മലപ്പുറം

രാമാനുജം. ആർ.
എച്ച്.എസ്.എസ്.റ്റി., എം.എൻ.കെ.എം.
ഗവ. എച്ച്.എസ്.എസ്., പുലാപ്പറ്റ, പാലക്കാട്

വാസു. കെ. ജി.
എ.ഇ.ഒ. (Rtd.), കുറ്റിപ്പുറം,
മലപ്പുറം

വേണുഗോപാൽ. വി.
എച്ച്.എസ്.എ., എം.എൻ.കെ.എം.
ഗവ. എച്ച്.എസ്.എസ്., പുലാപ്പറ്റ, പാലക്കാട്

**ചിത്രകാരൻ**

ധനേശൻ. എം. വി.
എച്ച്.എസ്.എ., എ.വി.ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്.,
കരിവെള്ളൂർ, കണ്ണൂർ

**വിദഗ്ധസമിതി**

ഡോ. ത്രിവിക്രമൻ. റ്റി.
ഹെഡ്, ഡിപ്പാർട്ട്മെന്റ് ഓഫ് മാത്തമാറ്റിക്സ്(Rtd.),
കൊച്ചിൻ യൂണിവേഴ്സിറ്റി ഓഫ് സയൻസ് &
ടെക്നോളജി, കൊച്ചിൻ

ഡോ. രാമചന്ദ്രൻ.പി. റ്റി.
ഹെഡ്, ഡിപ്പാർട്ട്മെന്റ് ഓഫ് മാത്തമാറ്റിക്സ്,
യൂണിവേഴ്സിറ്റി ഓഫ് കാലിക്കറ്റ്

നാരായണൻ. സി. പി.
മെമ്പർ,
കേരള സംസ്ഥാന പ്ലാനിംഗ് ബോർഡ്

ഡോ. രാജൻ. എ. ആർ.
പ്രൊഫസർ, ഡിപ്പാർട്ട്മെന്റ് ഓഫ് മാത്തമാറ്റിക്സ്,
യൂണിവേഴ്സിറ്റി ഓഫ് കേരള

**അക്കാദമിക് കോർഡിനേറ്റർ**

ഡോ. ലിഡ്സൺ രാജ്. ജെ.
റിസർച്ച് ഓഫീസർ, എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി., തിരുവനന്തപുരം

സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി (SCERT)
വിദ്യാഭവൻ, പൂജപ്പുര, തിരുവനന്തപുരം 695 012

# ഉള്ളടക്കം

# ഭാരതത്തിന്റെ ഭരണഘടന

ഭാഗം IV ക

## മൗലിക കർത്തവ്യങ്ങൾ

**51 ക. മൗലിക കർത്തവ്യങ്ങൾ - താഴെപ്പറയുന്നവ ഭാരതത്തിലെ ഓരോ പൗരന്റെയും കർത്തവ്യം ആയിരിക്കുന്നതാണ് -**

(ക) ഭരണഘടനയെ അനുസരിക്കുകയും അതിന്റെ ആദർശങ്ങളെയും സ്ഥാപനങ്ങളെയും ദേശീയപതാകയെയും ദേശീയഗാനത്തെയും ആദരിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഖ) സ്വാതന്ത്ര്യത്തിനുവേണ്ടിയുള്ള നമ്മുടെ ദേശീയസമരത്തിന് പ്രചോദനം നൽകിയ മഹനീയാദർശങ്ങളെ പരിപോഷിപ്പിക്കുകയും പിൻതുടരുകയും ചെയ്യുക;

(ഗ) ഭാരതത്തിന്റെ പരമാധികാരവും ഐക്യവും അഖണ്ഡതയും നിലനിർത്തുകയും സംരക്ഷിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഘ) രാജ്യത്തെ കാത്തുസൂക്ഷിക്കുകയും ദേശീയ സേവനം അനുഷ്ഠിക്കുവാൻ ആവശ്യപ്പെടുമ്പോൾ അനുഷ്ഠിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ങ) മതപരവും ഭാഷാപരവും പ്രാദേശികവും വിഭാഗീയവുമായ വൈവിധ്യങ്ങൾക്കതീതമായി ഭാരതത്തിലെ എല്ലാ ജനങ്ങൾക്കുമിടയിൽ, സൗഹാർദവും പൊതുവായ സാഹോദര്യമനോഭാവവും പുലർത്തുക. സ്ത്രീകളുടെ അന്തസ്സിന് കുറവു വരുത്തുന്ന ആചാരങ്ങൾ പരിത്യജിക്കുക;

(ച) നമ്മുടെ സമ്മിശ്രസംസ്കാരത്തിന്റെ സമ്പന്നമായ പാരമ്പര്യത്തെ വിലമതിക്കുകയും നിലനിറുത്തുകയും ചെയ്യുക;

(ഛ) വനങ്ങളും തടാകങ്ങളും നദികളും വന്യജീവികളും ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രകൃത്യാ ഉള്ള പരിസ്ഥിതി സംരക്ഷിക്കുകയും അഭിവൃദ്ധിപ്പെടുത്തുകയും ജീവികളോട് കാരുണ്യം കാണിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ജ) ശാസ്ത്രീയമായ കാഴ്ചപ്പാടും മാനവികതയും, അന്വേഷണത്തിനും പരിഷ്കരണത്തിനും ഉള്ള മനോഭാവവും വികസിപ്പിക്കുക;

(ഝ) പൊതുസ്വത്ത് പരിരക്ഷിക്കുകയും ശപഥം ചെയ്ത് അക്രമം ഉപേക്ഷിക്കുകയും ചെയ്യുക;

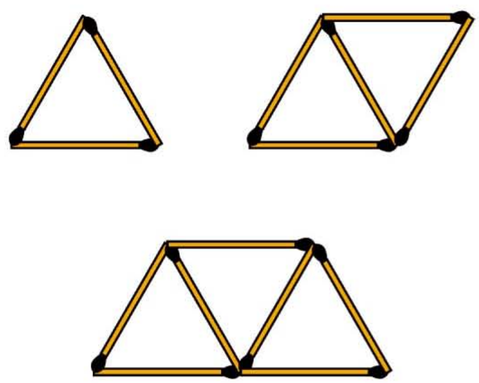
(ഞ) രാഷ്ട്രം യത്നത്തിന്റെയും ലക്ഷ്യപ്രാപ്തിയുടെയും ഉന്നതതലങ്ങളിലേക്ക് നിരന്തരം ഉയരത്തക്കവണ്ണം വ്യക്തിപരവും കൂട്ടായതുമായ പ്രവർത്തനത്തിന്റെ എല്ലാ മണ്ഡലങ്ങളിലും ഉൽകൃഷ്ടതയ്ക്കുവേണ്ടി അധ്വാനിക്കുക.

(ട) ആറിനും പതിനാലിനും ഇടയ്ക്ക് പ്രായമുള്ള തന്റെ കുട്ടിക്കോ രക്ഷ്യബാലകനോ, അതതു സംഗതി പോലെ, മാതാപിതാക്കളോ രക്ഷകർത്താവോ വിദ്യാഭ്യാസത്തിനുള്ള അവസരങ്ങൾ ഏർപ്പെടുത്തുക.

# 1 സമാന്തരശ്രേണികൾ

## കോൽക്കണക്ക്

ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:

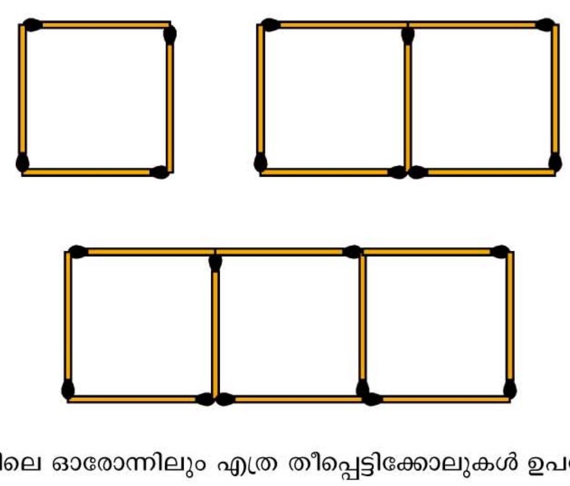


ഓരോന്നിലും എത്ര തീപ്പെട്ടിക്കോലുകൾ ഉപയോഗിച്ചു?

ഈ ക്രമത്തിൽ അടുത്തത് ഉണ്ടാക്കാൻ എത്ര കോല് വേണം?

(ആറാംക്ലാസിലെ **അക്ഷരഗണിതം** എന്ന പാഠത്തിലെ **തീപ്പെട്ടിക്കണക്ക്** നോക്കുക.)

ഇനി ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ :



ഇതിലെ ഓരോന്നിലും എത്ര തീപ്പെട്ടിക്കോലുകൾ ഉപയോഗിച്ചു?

### ഒരു കളി

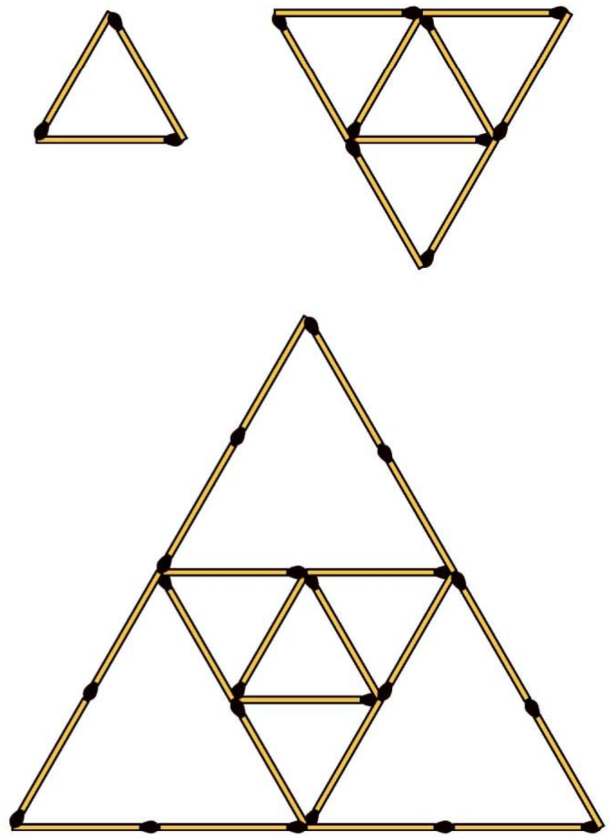
രണ്ടുപേർ തമ്മിലുള്ള ഒരു കളി. ആദ്യത്തെയാൾ പത്തോ പത്തിനേക്കാൾ കുറവോ ആയ ഒരു സംഖ്യ പറയുന്നു. രണ്ടാമൻ ഇതിനോട് പത്തോ അതിനേക്കാൾ കുറവോ ആയ ഒരു സംഖ്യ കൂട്ടിപ്പറയുന്നു. ആദ്യത്തെയാൾ വീണ്ടും പത്തോ അതിനേക്കാൾ കുറവോ ആയ സംഖ്യ കൂട്ടി വലുതാക്കുന്നു. ആദ്യം നൂറിലെത്തുന്നയാളാണ് ജയിക്കുന്നത്.

ഉദാഹരണമായി, ആദ്യത്തെയാൾ 6 ആണ് പറഞ്ഞതെങ്കിൽ, രണ്ടാമത്തെയാൾക്ക് അതിനെ 16 വരെയാക്കാം. അയാൾ പറഞ്ഞത് 16 തന്നെയാണെങ്കിൽ, ആദ്യത്തെയാൾക്ക് അതിനെ 26 വരെയാക്കാം.

ഈ കളിയിൽ ആദ്യം പറയുന്നയാൾക്ക് ജയിക്കാൻ ഒരു മാർഗമുണ്ട്. ഏതൊക്കെ സംഖ്യകൾ പറഞ്ഞാലാണ് വിജയം ഉറപ്പിക്കാൻ കഴിയുക? (100 ൽ നിന്ന് താഴോട്ട് ആലോചിച്ചു നോക്കൂ.)

അടുത്തത് ഉണ്ടാക്കാൻ എത്ര കോലു വേണം?

ഇതുപോലെ ചുവടെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രങ്ങളിൽ ഓരോന്നിലും എത്ര തീപ്പെട്ടിക്കോലുകൾ ഉപയോഗിച്ചിട്ടുണ്ടെന്നും, ഈ ക്രമത്തിലെ അടുത്തതിന് എത്ര കോലുകൾ വേണമെന്നും കണ്ടുപിടിക്കാമോ?



## സംഖ്യാക്രമങ്ങൾ

ഇപ്പോൾ ചെയ്ത കണക്കുകളിൽ, ഓരോ കൂട്ടം ചിത്രങ്ങളിലും ആവശ്യമായി വന്ന തീപ്പെട്ടിക്കോലുകളുടെ എണ്ണം ക്രമമായി എഴുതി നോക്കാം:

ആദ്യത്തെ ത്രികോണക്കണക്കിൽ,

3, 5, 7, 9, ...

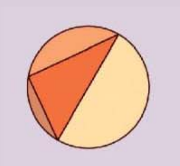
രണ്ടാമത്തെ ചതുരക്കണക്കിൽ,

4, 7, 10, 13, ...

### വൃത്തവിഭജനം

ഒരു വൃത്തത്തിൽ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെടുത്ത് ഒരു വര കൊണ്ട് യോജിപ്പിച്ചാൽ, അത് വൃത്തത്തെ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളാക്കുമല്ലോ:

വൃത്തത്തിലെ മൂന്നു ബിന്ദുക്കളെടുത്തു യോജിപ്പിച്ചാൽ, നാലു ഭാഗങ്ങളാകും:



നാലു ബിന്ദുക്കളെടുത്ത് എല്ലാ ജോടികളേയും യോജിപ്പിച്ചാലോ?

ബിന്ദുക്കൾ അഞ്ചായാൽ?

ആറു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ എത്ര ഭാഗങ്ങളാകുമെന്നാണ് പ്രതീക്ഷിക്കുന്നത്? ഇതു ശരിയാണോ എന്നു വരച്ചു നോക്കൂ.

അവസാനത്തെ ത്രികോണക്കണക്കിലോ?

$$3, 9, 21, 45, \ldots$$

ഇതുപോലെ ഏതെങ്കിലും നിയമമനുസരിച്ച്, ഒന്നാമത്തേത്, രണ്ടാമത്തേത്, മൂന്നാമത്തേത്, ... എന്നിങ്ങനെ ക്രമമായി എഴുതുന്ന ഒരു കൂട്ടം സംഖ്യകളെ, സംഖ്യാശ്രേണി (number sequence) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ശ്രേണികൾ പ്രത്യക്ഷപ്പെടുന്ന മറ്റു ചില സന്ദർഭങ്ങൾ നോക്കാം:

- 1000 രൂപ ബാങ്കിൽ നിക്ഷേപിച്ചു എന്നു കരുതുക. ഓരോ വർഷവും 6% നിരക്കിൽ സാധാരണ പലിശയാണു ലഭിക്കുന്നതെങ്കിൽ, ഓരോ വർഷാരംഭത്തിലും തുക എന്താകും?

  ഒന്നാം വർഷത്തിന്റെ തുടക്കത്തിൽ 1000 രൂപ, രണ്ടാം വർഷത്തിന്റെ തുടക്കത്തിൽ 1060 രൂപ, മൂന്നാം വർഷത്തിന്റെ തുടക്കത്തിൽ 1120 രൂപ, എന്നിങ്ങനെയല്ലേ?

അതായത്,

$$1000, 1060, 1120, 1180, \ldots$$

എന്ന സംഖ്യാശ്രേണി.

കൂട്ടുപലിശയാണെങ്കിലോ?

$$1000, 1060, 1124, 1191, \ldots$$

എന്ന ശ്രേണിയാണ് കിട്ടുന്നത്.

- മുകളിൽ നിന്ന് ഭൂമിയിലേയ്ക്കു വീഴുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ വേഗം, ഓരോ സെക്കന്റിലും 9.8 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിൽ കൂടുമെന്ന് അറിയാമല്ലോ. അപ്പോൾ ഉയരത്തിൽ നിന്ന് താഴേക്കിടുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ വേഗം, ഒരു സെക്കന്റു കഴിഞ്ഞാൽ 9.8 മീറ്റർ/സെക്കന്റ്, രണ്ടു സെക്കന്റു കഴിഞ്ഞാൽ 19.6 മീറ്റർ/സെക്കന്റ്, മൂന്നു സെക്കന്റു കഴിഞ്ഞാൽ 29.4 മീറ്റർ/സെക്കന്റ്, എന്നിങ്ങനെയാണ്. അതായത് ഇവിടെ കിട്ടുന്ന സംഖ്യാശ്രേണി

  $$9.8, 19.6, 29.4, \ldots$$

  ഇതേ വസ്തു തന്നെ ഓരോ സെക്കന്റു കഴിയുമ്പോഴും ആകെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരമോ?

  അത് $s = 4.9t^2$ എന്ന സമവാക്യമനുസരിച്ചാണല്ലോ മാറുന്നത്. അതായത്, ഒരു സെക്കന്റുകൊണ്ടും, രണ്ടു സെക്കന്റുകൊണ്ടും, മൂന്നു സെക്കന്റു കൊണ്ടുമെല്ലാം ഈ വസ്തു സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം മീറ്ററിലെഴുതിയാൽ കിട്ടുന്ന ശ്രേണി

  $$4.9, 19.6, 44.1, \ldots$$

### പലതരം ശ്രേണികൾ

കൂട്ടം, നിര എന്നെല്ലാം അർത്ഥം വരുന്ന സംസ്കൃതപദമാണ് "ശ്രേണി". ഗണിതത്തിൽ ഈ വാക്കു പയോഗിക്കുന്നത്, ഒന്നാമത്തേത്, രണ്ടാമത്തേത് എന്നിങ്ങനെ കൃത്യമായ സ്ഥാനങ്ങളിൽ ക്രമീകരിച്ചിരിക്കുന്നവയെ സൂചിപ്പിക്കാനാണ്. ഇങ്ങനെ ക്രമീകരിക്കുന്നത് സംഖ്യകൾ തന്നെ ആവണമെന്നില്ല. ഉദാഹരണമായി, ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ഒരു ശ്രേണിയാണ് ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്:

ബഹുപദങ്ങളുടെ ഒരു ശ്രേണിയാകാം:

$$1+x, 1+x^2, 1+x^3, \ldots$$

ഒരു ഭാഷയിലെ പദങ്ങളെ അക്ഷരമാലാക്രമത്തിൽ അടുക്കുന്നതും ഒരു ശ്രേണിതന്നെ.

- 1000 ലിറ്റർ വെള്ളമുള്ള ഒരു സംഭരണിയിൽ നിന്ന്, മിനിറ്റിൽ 5 ലിറ്റർ എന്ന കണക്കിൽ വെള്ളം പുറത്തേക്കൊഴുകുകയാണ്. അപ്പോൾ ഒരു മിനിറ്റു കഴിഞ്ഞാൽ സംഭരണിയിലെ വെള്ളം 995 ലിറ്ററാകും; രണ്ടു മിനിട്ട് കഴിഞ്ഞാൽ 990 ലിറ്റർ, മൂന്നു മിനിട്ട് കഴിഞ്ഞാൽ 985 ലിറ്റർ... എന്നിങ്ങനെ തുടരും. ഇവിടെ കിട്ടുന്നത്,

  1000, 995, 990, 985, ...

  എന്ന ശ്രേണിയാണ്.

ഇനി ചുവടെപ്പറയുന്ന സന്ദർഭങ്ങളിൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യാശ്രേണികൾ എഴുതി നോക്കൂ:

- വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം 1 സെന്റിമീറ്റർ, 2 സെന്റിമീറ്റർ, 3 സെന്റിമീറ്റർ എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന സമചതുരങ്ങളുടെ ചുറ്റളവുകൾ; ഇതേ ചതുരങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ.
- വശങ്ങളുടെ എണ്ണം 3, 4, 5 എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ആന്തരകോണുകളുടെ തുക; ഇവയുടെ ബാഹ്യകോണുകളുടെ തുക.
- 3 ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ;

  3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 1 ശിഷ്ടം വരുന്ന സംഖ്യകൾ;

  3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 2 ശിഷ്ടം വരുന്ന സംഖ്യകൾ.
- 1, 6 എന്നീ അക്കങ്ങളിൽ അവസാനിക്കുന്ന തുടർച്ചയായ എണ്ണൽസംഖ്യകൾ.

  ഈ ശ്രേണിയെ മറ്റേതെങ്കിലും തരത്തിൽ വിവരിക്കാമോ?

### സംഖ്യാശ്രേണികൾ

സംഖ്യാശ്രേണികൾ പലതരത്തിൽ വരാം. ഉദാഹരണമായി, $\pi$ യുടെ ദശാംശ രൂപത്തിലെ അക്കങ്ങൾ ക്രമമായി എടുത്താൽ,

3, 1, 4, 1, 5, 9, ...

എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന സംഖ്യാശ്രേണി കിട്ടും. ഇതിൽ ഒരു നിശ്ചിത സ്ഥാനത്തെ സംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് എളുപ്പമാർഗങ്ങളൊന്നുമില്ല.

ഒരു ശ്രേണിയിൽ, സംഖ്യകൾ ആവർത്തിച്ചു വരാം. $\frac{10}{11}$ ന്റെ ദശാംശ രൂപത്തിലെ അക്കങ്ങൾ ക്രമമായി എഴുതിയാൽക്കിട്ടുന്നത്,

0, 9, 0, 9, ...

എന്ന ശ്രേണിയാണ്. 2 ന്റെ കൃതികളായ 2, $2^2$, $2^3$, ... എന്നിവയുടെ അവസാന അക്കം മാത്രം ക്രമമായി എടുത്താൽ കിട്ടുന്നത്,

2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, ...

എന്നിങ്ങനെ ആവർത്തിക്കുന്ന സംഖ്യാശ്രേണിയാണ്.

## കൂട്ടിക്കൂട്ടി മുന്നോട്ട്

പലതരം ശ്രേണികൾ കണ്ടല്ലോ. ഇവയെല്ലാമൊന്നു പരിശോധിക്കാം:

- 3, 5, 7, 9, ...
- 4, 7, 10, 13, ...
- 3, 9, 21, 45, ...
- 1000, 1060, 1120, 1180, ...
- 1000, 1060, 1124, 1191, ...
- 9.8, 19.6, 29.4, 39.2, ...
- 4.9, 19.6, 44.1, 78.4, ...
- 1000, 995, 990, 985, ...
- 4, 8, 12, 16, ...

- 1, 4, 9, 16, ...
- 180, 360, 540, 720, ...
- 360, 360, 360, 360, ...
- 3, 6, 9, 12, ...
- 1, 4, 7, 10, ...
- 2, 5, 8, 11, ...
- 1, 6, 11, 16, ...

ആദ്യത്തെ കോൽക്കണക്കിൽ നിന്നു കിട്ടിയതാണ് 3, 5, 7, 9, ... എന്ന ശ്രേണി. ഇതിൽ ഒരു ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ മൂന്നു തീപ്പെട്ടിക്കോലുകൾ വേണം. തുടർന്ന്, ഓരോ പുതിയ ത്രികോണം കൂട്ടിച്ചേർക്കുമ്പോഴും, രണ്ടു കോലുകൾ കൂടി വേണ്ടിവരും. അങ്ങനെ മൂന്നിനോട് രണ്ടു കൂട്ടി, വീണ്ടും രണ്ടു കൂട്ടി, എന്നിങ്ങനെയാണ് 3, 5, 7, 9, ... എന്ന ശ്രേണിയിലെ സംഖ്യകൾ കിട്ടുന്നത്.

രണ്ടാമത്തെ ശ്രേണിയിലോ? തീപ്പെട്ടിക്കോലുകൾകൊണ്ട് സമചതുരങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കുമ്പോൾ, ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന് നാലു കോല് വേണം. തുടർന്ന് ഓരോ സമചതുരം ചേർക്കുന്നതിനും മൂന്നുകോല്. അങ്ങനെ നാലിൽ നിന്നു തുടങ്ങി, വീണ്ടും വീണ്ടും മൂന്നു കൂട്ടിയാണ് 4, 7, 10, 13, ... എന്ന ശ്രേണി ഉണ്ടാകുന്നത്.

ഇനി അടുത്ത ശ്രേണി നോക്കൂ. ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന് മൂന്നു കോല്. ഇതിന്റെ ഓരോ വശത്തിലും ഒരു ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ $3 \times 2 = 6$ കോലുകൂടി വേണം; ആകെ $3 + 6 = 9$ കോല്. ഇനി ഈ വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഓരോ വശത്തിലും ഒരു ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ $3 \times 4 = 12$ കോലു കൂടി വേണം; ആകെ $9 + 12 = 21$. ഇങ്ങനെ, 3 ൽ നിന്നു തുടങ്ങി, ആദ്യം 6 കൂട്ടി, പിന്നെ 12 കൂട്ടി ഇങ്ങനെയാണ് ഈ ശ്രേണി തുടരുന്നത്.

*ഒരു സംഖ്യയിൽ നിന്നു തുടങ്ങി, ഒരേ സംഖ്യ തന്നെ വീണ്ടും വീണ്ടും കൂട്ടി കിട്ടുന്ന ശ്രേണിയുടെ പേര്, സമാന്തരശ്രേണി (**arithmetic sequence**) എന്നാണ്.*

അപ്പോൾ മുകളിലെഴുതിയവയിൽ, ആദ്യത്തെ രണ്ടെണ്ണം സമാന്തരശ്രേണിയാണ്; മൂന്നാമത്തേത് സമാന്തരശ്രേണിയല്ല.

1000, 995, 990, ... എന്ന ശ്രേണി നോക്കുക. ഇതിൽ സംഖ്യകൾ 5 വീതം കുറയുകയാണ് ചെയ്യുന്നത്.

5 കുറയ്ക്കുക എന്നതിനെ $-5$ കൂട്ടുക എന്നും പറയാമല്ലോ. അപ്പോൾ ഈ ശ്രേണിയിലെ സംഖ്യകൾ 1000 ൽ നിന്നു തുടങ്ങി, വീണ്ടും വീണ്ടും $-5$ കൂട്ടിയാണ് കിട്ടുന്നതെന്നു പറയാം. അതായത്, ഇതും ഒരു സമാന്തരശ്രേണിതന്നെ.

ബഹുഭുജങ്ങളുടെ ബാഹ്യകോണുകളുടെ തുകയിൽനിന്നു കിട്ടുന്ന 360, 360, 360, ... എന്ന ശ്രേണിയോ? ഇതിൽ ഓരോ സംഖ്യയും

### എണ്ണൽസംഖ്യാശ്രേണികൾ

എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ പല പല ശ്രേണികൾ സംഭരിക്കാനുള്ള കുറെ ഗണിതശാസ്ത്രകാരന്മാരുടെ കൂട്ടായ ശ്രമഫലമാണ് The Online Encyclopedia of Integer Sequences (http://oeisf.org). ഏതാണ്ട് ഒന്നേമുക്കാൽ ലക്ഷം എണ്ണൽ സംഖ്യാശ്രേണികൾ ഇതിൽ ശേഖരിച്ചിട്ടുണ്ട്. www.research.att.com/njas/sequences/index.html എന്ന വെബ്പേജിൽപ്പോയി, അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന സ്ഥലത്ത് ചില എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ കൊടുത്താൽ, ഈ സംഖ്യകൾ അതേ ക്രമത്തിൽ ഉൾപ്പെടുന്ന കുറേയധികം ശ്രേണികളും, അവ ഉണ്ടാകുന്ന സന്ദർഭങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള ചെറു വിവരണങ്ങളും കിട്ടും.

ഉദാഹരണമായി, 1, 2, 3, 4, 5, 7 എന്ന സംഖ്യകൾ കൊടുത്താൽ, ഈ സംഖ്യകൾ ഉൾപ്പെടുന്ന 455 ശ്രേണികൾ കിട്ടും. അവയിൽ ചിലത്;

- 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 16, ...

  അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ കൃതികൾ, ആരോഹണക്രമത്തിലെഴുതിയത്.

- 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 14, ...

  6 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, 1 കുറച്ചാൽ അഭാജ്യസംഖ്യകളാകുന്ന എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ.

- 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, ...

  1 അല്ലാതെ, അടുത്തടുത്ത രണ്ട് എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ ഘടകങ്ങളായി ഇല്ലാത്ത സംഖ്യകൾ.

കിട്ടുന്നത് 360 നോട് വീണ്ടും വീണ്ടും 0 കൂട്ടിയിട്ടാണല്ലോ. അപ്പോൾ ഇതുമൊരു സമാന്തരശ്രേണി തന്നെ.

ഇനി മുകളിലെഴുതിയവയിൽ മറ്റേതൊക്കെയാണ് സമാന്തരശ്രേണികൾ എന്നു കണ്ടുപിടിക്കുക. അതുകഴിഞ്ഞാൽ, ചുവടെയുള്ള ഈ കണക്കുകൾ നോക്കുക:

- 2 ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ, 2, 4, 6, 8, ... എന്നിങ്ങനെ ക്രമമായി എഴുതിയാൽ, സമാന്തരശ്രേണിയാണോ? 2 ന്റെ കൃതികളായ 2, 4, 8, ... ആയാലോ?
- എണ്ണൽസംഖ്യകളെ ക്രമമായി 2 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2, ... എന്നീ സംഖ്യകളാണല്ലോ. ഇത് സമാന്തരശ്രേണിയാണോ?
- നാലിലൊന്നിനോട് നാലിലൊന്നുതന്നെ ആവർത്തിച്ചു കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിൽ എവിടെയെങ്കിലും പത്ത് ഉണ്ടാകുമോ? പതിനൊന്നോ?
- എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ വ്യുൽക്രമങ്ങൾ 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ... എന്നിങ്ങനെ ക്രമമായി എഴുതിയാൽ, അതൊരു സമാന്തരശ്രേണിയാണോ?
- അടുത്തടുത്ത രണ്ട് പൂർണവർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസത്തിന്റെ (വലുതിൽനിന്ന് ചെറുത് കുറച്ചതിന്റെ) ശ്രേണി എഴുതുക. ഇതൊരു സമാന്തരശ്രേണിയാണോ?

## കൂട്ടലും കുറയ്ക്കലും

പലിശക്കണക്കിൽനിന്നു കിട്ടിയ ശ്രേണികൾ നോക്കുക. രണ്ടു ശ്രേണിയിലും കൂടിക്കൂടി വരുന്നത് പലിശയാണല്ലോ. സാധാരണ പലിശയാണെങ്കിൽ, ഓരോ വർഷവും കൂടുന്നത്, 1000 രൂപയുടെ പലിശതന്നെയാണ്. (അതായത്, 60 രൂപ.) അപ്പോൾ, ഇതൊരു സമാന്തരശ്രേണിയാണെന്ന് കണക്കു കൂട്ടാതെതന്നെ പറയാം.

കൂട്ടുപലിശയാണെങ്കിലോ? ഓരോ വർഷവും കിട്ടുന്ന പലിശ മാറും. അപ്പോൾ തുകകൾ സമാന്തരശ്രേണിയിലല്ല.

വേഗത്തിന്റെ കണക്കിലോ? 9.8 നോട് ഏതു സംഖ്യകൂട്ടിയാലാണ് 19.6 ആക്കുക?

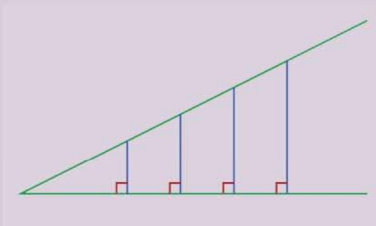
$$19.6 - 9.8 = 9.8$$

19.6 നോട് ഏതു സംഖ്യ കൂട്ടിയാലാണ് 29.4 ആകുന്നത്?

$$29.4 - 19.6 = 9.8$$

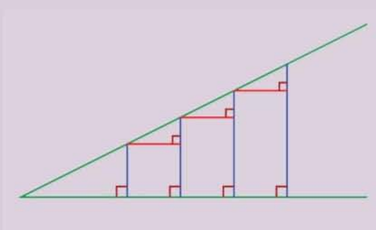
അതായത് 9.8 നോട് വീണ്ടും വീണ്ടും 9.8 കൂട്ടിയാണ് ശ്രേണി മുന്നേറുന്നത്. അപ്പോൾ വേഗങ്ങൾ സമാന്തരശ്രേണിതന്നെ. ദൂരങ്ങളോ?

### സമാന്തരം പലവിധം



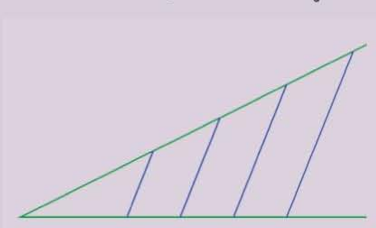
ചിത്രത്തിലെ അടുത്തടുത്ത ലംബങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം തുല്യമാണ്. അവയുടെ ഉയരം സമാന്തരശ്രേണിയിലാണെന്നു തെളിയിക്കാമോ?

ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ലംബങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.



ഇപ്പോൾ കിട്ടിയ ചെറിയ മട്ടത്രികോണങ്ങളെല്ലാം സർവസമമാണ് (എന്തുകൊണ്ട്?) അതിനാൽ, അവയുടെ കുത്തനെയുള്ള വശങ്ങൾ തുല്യമാണ്. അപ്പോൾ, ആദ്യചിത്രത്തിൽ, അടുത്തടുത്തുള്ള ലംബങ്ങളുടെ ഉയരത്തിന്റെ വളർച്ച തുല്യമാണ്. അതായത്, ഈ ലംബങ്ങളുടെ ഉയരം സമാന്തര ശ്രേണിയിലാണ്.

ലംബങ്ങൾക്കു പകരം, മറ്റേതെങ്കിലും കോണിൽ വരകൾ വരച്ചാലും നീളങ്ങൾ സമാന്തരശ്രേണിയിലാകുമോ?



4.9 നോട്, ഏതു സംഖ്യ കൂട്ടിയാലാണ് 19.6 ആകുക?

$$19.6 - 4.9 = 14.7$$

ഇതുപോലെ, 19.6 നോട്, ഏതു സംഖ്യ കൂട്ടിയാലാണ് 44.1 ആകുക?

$$44.1 - 19.6 = 24.5$$

അതായത്, 4.9 ൽ നിന്നു തുടങ്ങി, ആദ്യം 14.7 കൂട്ടി, പിന്നെ 24.5 കൂട്ടി,

അപ്പോൾ ഇത് സമാന്തരശ്രേണിയല്ല (എന്തുകൊണ്ട്?)

ഈ ഉദാഹരണത്തിൽ മറ്റൊരു കാര്യം ശ്രദ്ധിച്ചോ?

*ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ഏതു സംഖ്യയിൽ നിന്നും തൊട്ടുപുറകിലുള്ള സംഖ്യ കുറച്ചാൽ, ഒരേ സംഖ്യ തന്നെയാണ് കിട്ടുന്നത്.*

ഈ സംഖ്യയെ സമാന്തരശ്രേണിയുടെ പൊതുവ്യത്യാസം *(common difference)* എന്നാണ് പറയുന്നത്. അതായത്, സമാന്തര ശ്രേണിയിലെ സംഖ്യകൾ കിട്ടാൻ വീണ്ടും വീണ്ടും കൂട്ടുന്ന സംഖ്യ യാണ് പൊതുവ്യത്യാസം.

3 കൊണ്ടുള്ള ഹരണത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ,

3, 6, 9, 12, ...

1, 4, 7, 10, ...

2, 5, 8, 11, ...

എന്നീ മൂന്നു സമാന്തരശ്രേണികൾ കണ്ടല്ലോ. ഇവയോരൊന്നി ന്റേയും പൊതുവ്യത്യാസം എന്താണ്?

ചില കണക്കുകൾ നോക്കാം

- ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ സംഖ്യ 10 ഉം, മൂന്നാമത്തെ സംഖ്യ 24 ഉം ആണ്. ഇതിലെ രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ എന്താണ്?

  തന്നിരിക്കുന്ന വിവരങ്ങളനുസരിച്ച്, 10 നോട് ഒരു സംഖ്യ കൂട്ടി, വീണ്ടും അതേ സംഖ്യതന്നെ കൂട്ടിയപ്പോഴാണ് 24 കിട്ടുന്നത്. (കാരണം?)

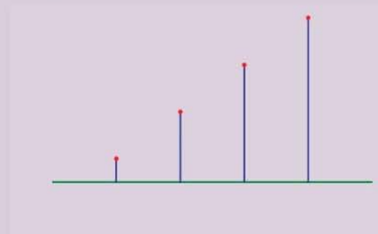
  അപ്പോൾ ഈ കൂട്ടിയ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങ് $24 - 10 = 14$ ആണ്. അതായത്, കൂട്ടിയ സംഖ്യ 7.

  അതിനാൽ, രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ $10 + 7 = 17$

  മറ്റൊരു രീതിയിലും ഇതു ചെയ്യാം. രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യയിൽ നിന്ന് ആദ്യസംഖ്യ കുറച്ചാലും, മൂന്നാമത്തെ സംഖ്യയിൽ നിന്ന് രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ കുറച്ചാലും ഒരേ സംഖ്യ കിട്ടണമല്ലോ. (പൊതുവ്യത്യാസം എന്നതിന്റെ അർത്ഥം ഒന്നുകൂടി നോക്കൂ)

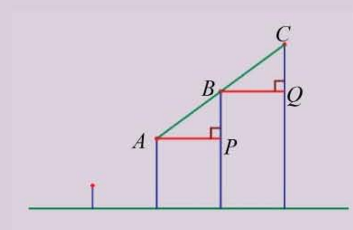
### സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ജ്യാമിതി

പദങ്ങളെല്ലാം അധിസംഖ്യകളായ ഒരു സമാന്തരശ്രേണി എടുക്കുക. ഒരു വര വരച്ച്, അതിനു ലംബമായി, ഒരേ അകലം ഇടവിട്ട്, ശ്രേണിയിലെ സംഖ്യകൾ ഉയരമായ ലംബങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.



ഈ ലംബങ്ങളുടെ മുകളറ്റങ്ങൾ ചേർത്തു വരച്ചു നോക്കൂ; ഒരേ വരയിലല്ലേ? എന്തുകൊണ്ടാണിത്?

ചിത്രത്തിലെ അടുത്തടുത്തുള്ള ഏതെങ്കിലും മൂന്നു വരകളെടുത്ത്, അവയുടെ മുകളറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിക്കുക; ചുവടെക്കാണുന്നതുപോലെ ലംബങ്ങളും വരയ്ക്കുക:




$ABP$, $BCQ$ എന്നീ ത്രികോണങ്ങൾ സർവസമമാണ് (എന്തുകൊണ്ട്?) അതിനാൽ അവയുടെ കോണുകളും തുല്യമാണ്.

അപ്പോൾ $\angle ABP = x^\circ$ എന്നെടുത്താൽ

$$\angle ABC = x + 90 + (90 - x) = 180^\circ$$

എന്നും കിട്ടും. അതായത് $A$, $B$, $C$ ഇവ ഒരേ നേർവരയിലാണ്.

അപ്പോൾ രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ $x$ എന്നെടുത്താൽ,

$$x - 10 = 24 - x$$

ഇതിൽനിന്ന്

$$2x = 24 + 10 = 34$$

എന്നും, തുടർന്ന്

$$x = 17$$

എന്നും കാണാം.

- ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ അടുത്തടുത്ത മൂന്നു സംഖ്യകളിൽ, ആദ്യത്തേതിന്റേയും അവസാനത്തേതിന്റേയും തുകയുടെ പകുതിയാണ് നടുവിലത്തേത് എന്നു തെളിയിക്കുക.

സമാന്തരശ്രേണിയിലെ അടുത്തടുത്ത മൂന്നു സംഖ്യകളെ $a, b, c$ എന്നെടുക്കാം.

അപ്പോൾ, മുകളിലത്തെ കണക്കു ചെയ്ത രണ്ടാമത്തെ മാർഗ ത്തിലേതുപോലെ

$$b - a = c - b$$

ഇതിൽനിന്ന്

$$2b = a + c$$

എന്നും, തുടർന്ന്

$$b = \frac{1}{2}(a + c)$$

എന്നും കിട്ടും.

ഇനി ചുവടെയുള്ള കണക്കുകൾ സ്വയം ചെയ്തുനോക്കൂ.

- ചുവടെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ സമാന്തരശ്രേണിയിലും ചില സംഖ്യകൾ എഴുതിയിട്ടില്ല. അവയുടെ സ്ഥാനം ◯ കൊണ്ടു സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. ഈ സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.
  - 24, 42, ◯, ◯, ...
  - ◯, 24, 42, ◯, ...
  - ◯, ◯, 24, 42, ...
  - 24, ◯, 42, ◯, ...
  - ◯, 24, ◯, 42, ...
  - 24, ◯, ◯, 42, ...
- ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ രണ്ടാമത്തെയും, നാലാമത്തെയും സംഖ്യകൾ 8, 2 ഇവയാണ്. ഇതിലെ ആദ്യത്തെയും, മൂന്നാമ ത്തെയും സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

### മുന്നോട്ടും പിന്നോട്ടും

അടുത്തടുത്ത മൂന്ന് എണ്ണൽ സംഖ്യ കളുടെ തുക നടുവിലത്തെ സംഖ്യ യുടെ മൂന്നു മടങ്ങാണെന്നു കണ്ടിട്ടു ണ്ടല്ലോ. (ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ **ബഹുപ ദങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **വാചകത്തെ ളിമ** എന്ന ഭാഗം നോക്കുക)

ഇതു മറ്റൊരു വിധത്തിലും കാണാം, നടുക്കുള്ള സംഖ്യയിൽ നിന്ന് ഒന്നു കുറവാണ് ഇടത്തെ സംഖ്യ; വലത്തെ സംഖ്യ ഒന്നു കൂടുതലും. അപ്പോൾ ഇവയെല്ലാം തമ്മിൽ കൂട്ടുമ്പോൾ, കുറച്ച ഒന്നും കൂട്ടിയ ഒന്നും പരസ്പരം ഇല്ലാതാകും; നടുവിലെ സംഖ്യ മാത്രം മൂന്നെണ്ണമുണ്ടാകും.

ബീജഗണിതഭാഷയിൽപ്പറഞ്ഞാൽ, നടുവിലെ സംഖ്യ $x$ എന്നെടുത്താൽ, ഇടത്തെ സംഖ്യ $x - 1$, വലത്തെ സംഖ്യ $x + 1$. ഇവ കൂട്ടുമ്പോൾ,

$$(x-1) + x + (x+1) = 3x$$

എണ്ണൽ സംഖ്യകൾക്കു പകരം, മറ്റേ തെങ്കിലും സമാന്തരശ്രേണിയിലെ അടുത്തടുത്ത മൂന്നു സംഖ്യകളെടു ത്താലോ? കുറയുന്നതും കൂടുന്നതും, ഒന്നിനുപകരം പൊതുവ്യത്യാസമാ കും. ഫലം പഴയതു തന്നെ.

ഈ ചിന്ത ബീജഗണിതത്തിലാക്കി യാലോ? പൊതുവ്യത്യാസം $d$ എന്നെ ടുക്കാം. നടുവിലെ സംഖ്യ $x$ എന്നെടു ത്താൽ, സംഖ്യകൾ, $x - d, x, x + d$

$$\text{തുക} = (x-d) + x + (x+d) = 3x$$

ഇനി മൂന്നു സംഖ്യകൾക്കു പകരം, അഞ്ചു സംഖ്യകളായാലോ? ഏഴാ യാൽ?

- ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ 5 ആണ്. ഇതിലെ ആദ്യത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും സംഖ്യകളുടെ തുക കണ്ടുപിടിക്കുക.
- ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ രണ്ടു സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ച് മൂന്നാമത്തെ സംഖ്യ കണക്കാക്കാനുള്ള ബീജഗണിത വാചകം കണ്ടുപിടിക്കുക.

## സ്ഥാനവും പദവും

ഏതു സംഖ്യാശ്രേണിയിലും, ഒന്നാമത്തെ സംഖ്യ, രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ, എന്നിങ്ങനെയൊരു ക്രമമുണ്ടല്ലോ. ഇവയെ പൊതുവെ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങൾ (terms of sequence) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഉദാഹരണമായി, നമ്മുടെ ആദ്യത്തെ ത്രികോണക്കണക്കിൽ, ഒന്നാം പദം 3, രണ്ടാം പദം 5, മൂന്നാം പദം 7 എന്നിങ്ങനെയാണ്.

ഇതിലെ പത്താം പദം എത്രയാണ്?

അതായത്, ഈ കണക്കിൽ 10 ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ എത്ര തീപ്പെട്ടിക്കോലുകൾ വേണം? ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിനോട് 9 ത്രികോണങ്ങൾ കൂടി ചേർത്താൽ ആകെ 10 ആയി. ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന് 3 കോലും, തുടർന്നുള്ള ഓരോ ത്രികോണത്തിനും 2 കോലും എന്നാണല്ലോ കണക്ക്. അപ്പോൾ

10 ത്രികോണങ്ങൾക്കുവേണ്ട കോല് $= 3 + (9 \times 2) = 21$

അതായത് 3, 5, 7, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ 10-ാം പദം 21

ഇതുപോലെ രണ്ടാമത്തെ ചതുരക്കണക്കിൽ കിട്ടിയ, 4, 7, 10, ... എന്ന ശ്രേണിയിലെ 15-ാം പദം എന്താണ്?

മറ്റു ചില കണക്കുകൾ നോക്കാം.

- ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ പദം 2 ഉം പൊതുവ്യത്യാസം 5 ഉം ആണ്. ഇതിലെ 13-ാം പദം എത്രയാണ്?

  ശ്രേണിയിലെ ഒരു സംഖ്യയിൽ നിന്ന് അടുത്തതിലെത്താൻ കൂട്ടുന്ന സംഖ്യയാണല്ലോ, പൊതുവ്യത്യാസം. ഇവിടെ ഇത് 5 ആണ്. ആദ്യത്തെ സംഖ്യ 2 ഉം. അതായത് 2, 7, 12, ... എന്നിങ്ങനെയാണ് പദങ്ങൾ മുന്നോട്ടുപോകുന്നത്.

  1-ാം പദത്തിൽ നിന്ന് 13-ാം പദത്തിലെത്താൻ എത്ര ചുവടുവയ്ക്കണം?

  അതായത്, 2 നോട് എത്ര തവണ 5 കൂട്ടണം?

  അപ്പോൾ

  13-ാം പദം $= 2 + (12 \times 5) = 62$

### തുകയും മാധ്യവും

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ അടുത്തടുത്ത മൂന്നു സംഖ്യകളുടെ തുക, മധ്യത്തിലുള്ള സംഖ്യയുടെ മൂന്നു മടങ്ങാണെന്നും, അഞ്ചു സംഖ്യകളുടെ തുക അഞ്ചുമടങ്ങാണെന്നും മറ്റും കണ്ടു.

എടുക്കുന്ന സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം ഇരട്ടസംഖ്യ ആയാലോ? ഒരുതരത്തിൽപ്പറഞ്ഞാൽ, നടുവിലത്തേത് എന്നു പറയാൻ ഒരു സംഖ്യയില്ല; മറ്റൊരു തരത്തിൽ നോക്കിയാൽ, നടുവിൽ ഒരു ജോടി സംഖ്യകളുണ്ട്. (1, 2, 3, 4, 5, 6 ഇവയിൽ 3 ഉം 4 ഉം നടുക്കാണെന്നു പറയാമല്ലോ.)

അപ്പോൾ ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ പൊതുവ്യത്യാസം $d$ എന്നും, അടുത്തടുത്ത നാലു സംഖ്യകളിൽ, നടുവിലെ ജോടി $x, y$ എന്നുമെടുത്താൽ, സംഖ്യകൾ $x-d, x, y, y+d$ എന്നാകും; തുക $2(x+y)$ ഉം. ഇതിനെ $4 \times \frac{1}{2}(x+y)$ എന്നെഴുതാമല്ലോ. നടുവിലെ ജോടിയുടെ മാധ്യത്തിന്റെ നാലു മടങ്ങ്, എന്നു ഭാഷയിലുമാക്കാം. (ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ **സ്ഥിതിവിവരക്കണക്ക്** ഓർമയുണ്ടല്ലോ?)

സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം ആറായാലും ഇതു ശരിയാകുമോ? എട്ടായാലോ?

- ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ 12-ാം പദം 25 ആണ്; പൊതുവ്യത്യാസം 3 ഉം. ഈ ശ്രേണിയിലെ 17-ാം പദം എന്താണ്?

  12-ാം പദത്തിൽ നിന്ന് 17-ാം പദത്തിലെത്താൻ, പൊതുവ്യത്യാസം എത്ര തവണ കൂട്ടണം?

  $$17\text{-ാം പദം} = 25 + (5 \times 3) = 40$$

- ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ 5-ാം പദം 32 ഉം 11-ാം പദം 74 ഉം ആണ്. ശ്രേണിയിലെ സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെയാണ്?

  5-ാം പദത്തിൽ നിന്ന് 11-ാം പദത്തിലെത്താൻ, പൊതുവ്യത്യാസം 6 തവണ കൂട്ടണം.

  തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളനുസരിച്ച്, ഇങ്ങനെ കൂട്ടിയ സംഖ്യ, $74 - 32 = 42$

  അപ്പോൾ പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ 6 മടങ്ങാണ് 42. അതിനാൽ പൊതുവ്യത്യാസം $42 \div 6 = 7$

  ആദ്യത്തെ പദത്തോട് നാലുതവണ പൊതുവ്യത്യാസം കൂട്ടിയാണല്ലോ, അഞ്ചാം പദത്തിലെത്തുന്നത്. അതായത്, ഈ ശ്രേണിയിൽ ആദ്യത്തെ പദത്തോട് $4 \times 7 = 28$ കൂട്ടിയതാണ് അഞ്ചാംപദമായ 32. അപ്പോൾ

  $$\text{ഒന്നാംപദം} = 32 - 28 = 4$$

  ശ്രേണിയുടെ ആദ്യപദം 4 ഉം, പൊതുവ്യത്യാസം 7 ഉം ആയതിനാൽ, ശ്രേണി

  $$4, 11, 18, \ldots$$

  ഇത് ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ചും ചെയ്യാം. ആദ്യപദം $x$ എന്നും, പൊതുവ്യത്യാസം $y$ എന്നുമെടുത്താൽ, തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളിൽ നിന്ന്

  $$x + 4y = 32$$

  $$x + 10y = 74$$

  എന്ന രണ്ടു സമവാക്യങ്ങൾ കിട്ടുമല്ലോ (എങ്ങനെ?) ഇവയിൽ നിന്ന് $x = 4$, $y = 7$ എന്നു കിട്ടും. (ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ **സമവാക്യജോടികൾ** എന്ന പാഠം ഓർക്കുക).

- 3, 7, 11, ... എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിൽ 101 ഒരു പദമാണോ? 103 ആണെങ്കിലോ?

  3 ൽനിന്നു തുടങ്ങി, വീണ്ടും വീണ്ടും 4 കൂട്ടിയതാണല്ലോ ഇതിലെ പദങ്ങൾ; അതായത്, 3 ൽനിന്ന് തുടങ്ങി 4 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളായ 4, 8, 12, ... ഇവ കൂട്ടി കിട്ടുന്ന സംഖ്യകൾ.

### സ്ഥാനവ്യത്യാസവും പദവ്യത്യാസവും

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ അടുത്തടുത്ത ഏതു രണ്ടു പദത്തിന്റേയും വ്യത്യാസം, പൊതുവ്യത്യാസം തന്നെയാണല്ലോ. ഒന്നിടവിട്ട ഏതു രണ്ടു പദങ്ങളുടേയും വ്യത്യാസമോ? പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ്, അല്ലേ? മൂന്നിടവിട്ട പദങ്ങളായാലോ?

അതായത്, ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ഏതു രണ്ടു പദങ്ങളുടേയും വ്യത്യാസം, അവയുടെ സ്ഥാനങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസത്തെ പൊതുവ്യത്യാസം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ കിട്ടും.

ഇതു മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറയാം. ഏതു സമാന്തര ശ്രേണിയിലും, പദവ്യത്യാസം, സ്ഥാനവ്യത്യാസത്തിന് ആനുപാതികമാണ്; ആനുപാതിക സ്ഥിരം, പൊതുവ്യത്യാസവും.

മറ്റൊരു രീതിയിൽപ്പറഞ്ഞാൽ, ഇതിലെ ഏതു പദത്തിൽനിന്നും 3 കുറച്ചാൽകിട്ടുന്നത് 4 ന്റെ ഗുണിതമാണ്. ഇത്തരം സംഖ്യക ളെല്ലാം ഈ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളാണുതാനും. ഇനി 101 ഉം 103 ഉം നോക്കാം.

$$101 - 3 = 98$$

98 എന്ന സംഖ്യ 4 ന്റെ ഗുണിതമല്ലാത്തതിനാൽ, 101 ഈ ശ്രേണി യിലെ പദമല്ല.

$$103 - 3 = 100$$

100 എന്ന സംഖ്യ 4 ന്റെ ഗുണിതമായതിനാൽ, 103 ഈ ശ്രേണി യിലെ പദമാണ്.

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ സ്വയം ചെയ്തുനോക്കൂ:

- ആദ്യപദം 7 ഉം, പൊതുവ്യത്യാസം $-2$ ഉം ആയ സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ 12-ാം പദം എന്താണ്?
- ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 3-ാം പദം 10 ഉം 8-ാം പദം 25 ഉം ആണ്. ഇതിലെ 4-ാം പദം എന്താണ്? 13-ാം പദമോ?
- ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ 5-ാം പദം 11 ഉം 12-ാം പദം 32 ഉം ആണ്. ഇതിലെ ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങൾ എന്താണ്?
- ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ 5-ാം പദം 9 ഉം, 9-ാം പദം 5 ഉം ആണ്. അതിന്റെ പൊതുവ്യത്യാസം എന്താണ്? 14 -ാം പദമോ?
- പൊതുവ്യത്യാസം $-1$ ആയ ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ 4-ാം പദം 7 ആണ്. അതിന്റെ 7-ാം പദം എന്താണ്? 11-ാം പദമോ?
- 4 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 3 ശിഷ്ടം വരുന്ന എത്ര മൂന്നക്ക സംഖ്യ കളുണ്ട്?
- 6 കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ ശിഷ്ടം 3 കിട്ടുന്ന എണ്ണൽസംഖ്യ കളുടെ ശ്രേണി എഴുതുക. ഈ ശ്രേണിയുടെ 10-ാം പദം എന്താണ്? 100 നും 400 നും ഇടയിലുള്ള എത്ര സംഖ്യകൾ ഈ ശ്രേണിയിൽ ഉണ്ട്?

## ശ്രേണികളുടെ ബീജഗണിതം

ഒരു ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങൾ ഉണ്ടാകുന്നത്, ഏതെങ്കിലും നിയമ മനുസരിച്ചാണല്ലോ. ഉദാഹരണമായി, നമ്മുടെ ആദ്യത്തെ ത്രികോ ണക്കണക്കിൽ, 3 ൽ നിന്നു തുടങ്ങി, 2 ആവർത്തിച്ചു കൂട്ടിയാണ്,

$$3, 5, 7, \ldots$$

എന്ന ശ്രേണി കിട്ടിയത്.

### ശ്രേണിയും ശിഷ്ടവും

ഇരട്ടസംഖ്യകളായ 2, 4, 6, ... ഒരു സമാ ന്തരശ്രേണിയാണ്. ഒറ്റസംഖ്യകളായ 1, 3, 5, ... ഉം സമാന്തരശ്രേണിയാണ്. രണ്ട് ശ്രേണികളുടേയും പൊതുവ്യ ത്യാസം 2 തന്നെ.

2 കൊണ്ടു പൂർണമായി ഹരിക്കാൻ കഴിയുന്ന (അഥവാ, ശിഷ്ടം 0 ആയ) എണ്ണൽ സംഖ്യകളാണല്ലോ, ഇരട്ട സംഖ്യകൾ; ശിഷ്ടം 1 വരുന്നവ ഒറ്റ സംഖ്യകളും.

ഇതുപോലെ 3 കൊണ്ട് എണ്ണൽ സംഖ്യകളെ ഹരിക്കുമ്പോൾ ശിഷ്ടം 0, 1, 2 വരുന്ന മൂന്നു സമാന്തര ശ്രേണി കൾ കണ്ടല്ലോ. ഇവയുടെയെല്ലാം പൊതുവ്യത്യാസം എന്താണ്?

ഹരിക്കുന്നത് 4 കൊണ്ടാണെങ്കിൽ, ശിഷ്ടങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ എത്ര സമാന്തരശ്രേണി കിട്ടും? ഏതൊക്കെ? അവയുടെയെല്ലാം പൊതുവ്യത്യാസമോ?

ഇനി മറിച്ചു ചിന്തിക്കാം. പദങ്ങളെല്ലാം എണ്ണൽ സംഖ്യകളായ ഒരു ശ്രേണി എടുത്താൽ, ഏതു രണ്ടു പദങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസവും പൊതു വ്യത്യാസത്തിന്റെ ഗുണിതമാണ്; അതി നാൽ, ഈ പദങ്ങളെ പൊതു വ്യത്യാസം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടങ്ങൾ തുല്യമാണ് (എന്തു കൊണ്ട്?)

അതായത്, പദങ്ങളെല്ലാം എണ്ണൽ സംഖ്യകളായ ഏതു സമാന്തരശ്രേണി യും, ആദ്യം കണ്ടതുപോലെ, എണ്ണൽ സംഖ്യകളെ ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യ കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ ഒരേ ശിഷ്ടം കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളാണ്; ഹരിക്കാൻ ഉപയോഗിച്ച സംഖ്യ തന്നെയാണ് പൊതുവ്യത്യാസം.

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, ഈ ശ്രേണിയിലെ ഏതു സ്ഥാനത്തെയും പദം കിട്ടാൻ, സ്ഥാനസംഖ്യയിൽ നിന്ന് 1 കുറച്ച്, അതിനെ 2 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, 3 നോട് കൂട്ടണം. ഉദാഹരണമായി,

$$15\text{-ാം പദം} = \left((15-1)\times 2\right) + 3 = 31$$

ഈ പൊതുരീതി ബീജഗണിതത്തിലെഴുതിയാലോ?

$n$ ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യ ആയാലും

$$n\text{-ാം പദം} = \left((n-1)\times 2\right) + 3 = 2n+1$$

അതായത്, $2n+1$ എന്ന ബീജഗണിതവാചകത്തിൽ, $n = 1, 2, 3, \ldots$ എന്നിങ്ങനെ ക്രമമായി എടുത്താൽ, ഈ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളായ 3, 5, 7, ... ഇവയെല്ലാം ക്രമമായി കിട്ടും. (ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ **ബഹുപദങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ബീജഗണിതവാചകങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം നോക്കുക.)

ശ്രേണികളെക്കുറിച്ചുള്ള ബീജഗണിത ചർച്ചകളിൽ, പദങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത്, $x_1, x_2, x_3, \ldots$ എന്നും, $y_1, y_2, y_3, \ldots$ എന്നുമൊക്കെയാണ്. ഇതനുസരിച്ച്, ഇപ്പോഴത്തെ ഉദാഹരണത്തിലെ ശ്രേണിയെ

$$x_1 = 3,$$
$$x_2 = 5,$$
$$x_3 = 7,$$
$$\ldots\ldots\ldots,$$

എന്നെഴുതാം. കുറേക്കൂടി ചുരുക്കി,

$$x_n = 2n+1$$

എന്നും എഴുതാം. (ശ്രേണിയെക്കുറിച്ചുള്ള എല്ലാ വിവരങ്ങളും ഇതിലുണ്ടല്ലോ.)

ചതുരക്കണക്കിലെ ശ്രേണിയെ ഇങ്ങനെ ചുരുക്കിനോക്കാം. ഇതിൽ ആദ്യസംഖ്യ 4 ഉം, ആവർത്തിച്ചു കൂട്ടുന്നത് 3 ഉം. അപ്പോൾ $n$ ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യ ആയാലും

$$n\text{-ാം പദം} = \left((n-1)\times 3\right) + 4 = 3n+1$$

കുറേക്കൂടി ചുരുക്കി, ഈ ശ്രേണിയെ

$$x_n = 3n+1$$

എന്ന ബീജഗണിതവാക്യത്തിലൊതുക്കാം.

രണ്ടാമത്തെ ത്രികോണക്കണക്കിലെ 3, 9, 21, 45, ... എന്ന ശ്രേണിയോ?

ഇതിലെ പദങ്ങൾ

$$x_1 = 3$$

### ശ്രേണീ നിയമം

3, 5, 7, ... എന്ന ശ്രേണിയിലെ അടുത്ത പദം എന്താണ്?

ഇവിടെ സമാന്തരശ്രേണി എന്നു പറഞ്ഞിട്ടില്ലല്ലോ. അപ്പോൾ അടുത്ത പദം 9 തന്നെ ആകണമെന്നില്ല. ഉദാഹരണമായി, ഉദ്ദേശിച്ചത് ഒറ്റസംഖ്യകളായ അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണിയാണെങ്കിൽ, അടുത്ത പദം 11 ആണ്.

എന്താണിതിന്റെ ഗുണപാഠം? കുറേ സംഖ്യകൾ ക്രമമായി എഴുതിയതിൽ നിന്ന്, ശ്രേണിയിലെ തുടർന്നുള്ള പദങ്ങൾ കൃത്യമായി പറയാൻ കഴിയില്ല. ശ്രേണി ഉണ്ടാക്കാൻ ഉപയോഗിച്ച നിയമം, അല്ലെങ്കിൽ ശ്രേണി ഉണ്ടാകുന്ന സന്ദർഭം വ്യക്തമാക്കിയാലേ, തുടർന്നുള്ള പദങ്ങളെന്തെന്ന് പറയാൻ സാധിക്കൂ.

1, 2, 3, 4, 5, 7 എന്ന സംഖ്യകളിൽ നിന്നു തുടങ്ങി, വ്യത്യസ്ത നിയമങ്ങളനുസരിച്ച് വ്യത്യസ്ത ശ്രേണികൾ ഉണ്ടാക്കുന്നത്, **എണ്ണൽസംഖ്യാശ്രേണികൾ** എന്ന ഭാഗത്ത് കണ്ടല്ലോ.

$$x_2 = 9 = 3 \times (2^2 - 1)$$
$$x_3 = 21 = 3 \times (2^3 - 1)$$
$$x_4 = 45 = 3 \times (2^4 - 1)$$

എന്നെല്ലാം എഴുതാം. പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, ഈ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളെ

$$x_n = 3(2^n - 1)$$

എന്ന രൂപത്തിലെഴുതാം. (**വളരുന്ന ത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം നോക്കുക.)

പലിശക്കണക്കിൽ, സാധാരണ പലിശ ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന 1000, 1060, 1120, ... എന്ന ശ്രേണിയിലെ $n$-ാം പദം

$$1000 + 60\,(n - 1) = 60n + 940$$

അതായത്, ഈ ശ്രേണിയെ

$$x_n = 60n + 940$$

എന്നെടുക്കാം.

കൂട്ടുപലിശയനുസരിച്ചു കിട്ടുന്ന 1000, 1060, 1124, 1191, ... എന്ന ശ്രേണി കിട്ടാൻ,

$$x_n = 1000\,(1.06)^{n-1}$$

എന്ന ശ്രേണിയിലെ ഓരോ പദത്തിനേയും ഏറ്റവുമടുത്ത എണ്ണൽസംഖ്യയാക്കി മാറ്റണം. (എട്ടാം ക്ലാസിലെ **പണവിനിമയം** എന്ന പാഠത്തിലെ **കണക്കുകൂട്ടാനൊരു സൂത്രം** എന്ന ഭാഗം നോക്കുക.)

ഇനി **കൂട്ടിക്കൂട്ടി മുന്നോട്ട്** എന്ന ഭാഗത്തിന്റെ തുടക്കത്തിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ശ്രേണികളുടെയെല്ലാം ബീജഗണിതരൂപം എഴുതി നോക്കൂ.

## സമാന്തരശ്രേണികളുടെ ബീജഗണിതം

നാം കണ്ട ചില സമാന്തരശ്രേണികളുടെ ബീജഗണിതരൂപം നോക്കൂ:

| | |
|---|---|
| 3, 5, 7, 9, ... | $x_n = 2n + 1$ |
| 9.8, 19.6, 29.4, 39.2, ... | $x_n = 9.8n$ |
| 1000, 995, 990, 985, ... | $x_n = -5n + 1005$ |
| 4, 8, 12, 16, ... | $x_n = 4n$ |
| 360, 360, 360, 360, ... | $x_n = 360$ |
| 1, 4, 7, 10, ... | $x_n = 3n - 2$ |

### വളരുന്ന ത്രികോണങ്ങൾ

തീപ്പെട്ടിക്കോലുകൾകൊണ്ട് വലിയ വലിയ ത്രികോണങ്ങളുണ്ടാക്കുന്ന കണക്കിലെ 3, 9, 21, ... എന്ന ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതെങ്ങനെ?

ഇതിൽ ആദ്യം വശങ്ങളിലെല്ലാം ഓരോ കോല് മാത്രമുള്ള ത്രികോണം, ഇതിനു പുറത്ത്, ഓരോ വശത്തിലും ഈരണ്ട് കോലുള്ള വലിയ ത്രികോണം, അതിനും പുറത്ത്, ഓരോ വശത്തിലും നന്നാലു കോലുള്ള കുറേക്കൂടി വലിയ ത്രികോണം എന്നിങ്ങനെയാണല്ലോ നിർമാണം പുരോഗമിക്കുന്നത്.

അതായത്, ആകെ കോലുകളുടെ എണ്ണം.

$$3,\ 3 + (3 \times 2),\ 3 + (3 \times 2) + (3 \times 2^2), \ldots$$

എന്നിങ്ങനെയാണ്. അതായത്

$$3,\ 3(1+2),\ 3(1+2+2^2), \ldots$$

ഇതിൽ

$$\begin{aligned}1+2 &= 3\\ &= 2^2 - 1\\ 1+2+2^2 &= (2^2-1)+2^2\\ &= (2 \times 2^2) - 1\\ &= 2^3 - 1\\ 1+2+2^2+2^3 &= (2^3-1)+2^3\\ &= (2 \times 2^3) - 1\\ &= 2^4 - 1\end{aligned}$$

എന്നെല്ലാം എഴുതാമല്ലോ. ഇതിൽ നിന്ന്, ഈ ശ്രേണിയിലെ n-ാം പദം

$$3(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}) = 3(2^n - 1)$$

എന്നു കാണാം.

അപ്പോൾ ഈ രീതിയിൽ 25 ത്രികോണമുണ്ടാക്കാൻ $3(2^{25} - 1) = 100663293$ തീപ്പെട്ടിക്കോലു വേണം. അതായത്, പത്തുകോടിയിലധികം!

ഇവയിലെല്ലാം $n$-ാം പദമായ $x_n$ കിട്ടുന്നത്, $n$ നെ ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യ കൂട്ടിയാണ്.

മറ്റൊരു രീതിയിൽപ്പറഞ്ഞാൽ, ഇവയുടെയെല്ലാം പൊതുരൂപം

$$x_n = an + b$$

എന്നാണ്, ഇതിൽ $a$, $b$ ഇവ ഏതു രണ്ടു നിശ്ചിതസംഖ്യകളും ആവാം.

ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയും ഈ രൂപത്തിലാണോ? ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെ ആദ്യപദം $f$ എന്നും, പൊതുവ്യത്യാസം $d$ എന്നും എടുത്താൽ, അതിലെ പദങ്ങൾ,

$$f,\ f + d,\ f + 2d, \dots$$

എന്നിങ്ങനെ ആയിരിക്കുമല്ലോ. അപ്പോൾ, അതിന്റെ $n$-ാം പദം

$$f + (n - 1)\,d = dn + (f - d)$$

അതായത്, ഓരോ $n$ നേയും $d$ എന്ന സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, $f - d$ എന്ന സംഖ്യ കൂട്ടുക.

ഉദാഹരണമായി, ആദ്യപദം 2 ഉം, പൊതുവ്യത്യാസം 7 ഉം ആയ സമാന്തരശ്രേണിയുടെ $n$-ാം പദം

$$2 + 7(n - 1) = 7n - 5$$

അതായത്, ഈ ശ്രേണിയെ

$$x_n = 7n - 5$$

എന്നെഴുതാം

മറിച്ച്, $x_n = an + b$ എന്ന ഏതു ശ്രേണിയും സമാന്തരശ്രേണിയാണെന്നും കാണാൻ വിഷമമില്ല. $n = 1, 2, 3, \dots$ എന്നിങ്ങനെ ക്രമമായി എടുത്താൽ, ഈ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങൾ

$$a + b,\ 2a + b,\ 3a + b, \dots$$

എന്നു കിട്ടും, ഇത് $a + b$ ആദ്യപദവും, $a$ പൊതുവ്യത്യാസവുമായ സമാന്തരശ്രേണിയാണെന്ന് കാണാമല്ലോ.

*ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയേയും $x_n = an + b$ എന്ന രൂപത്തിലെഴുതാം; മറിച്ച്, ഈ രൂപത്തിലുള്ള ഏതു ശ്രേണിയും സമാന്തരശ്രേണിയാണ്.*

ഇതുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ചില കണക്കുകളിതാ:

- ചുവടെ ചില സമാന്തരശ്രേണികളുടെ ആദ്യപദവും, പൊതുവ്യത്യാസവും നൽകിയിട്ടുണ്ട്. ഓരോന്നിനേയും $x_n = an + b$ എന്ന രൂപത്തിലെഴുതുക. ഓരോന്നിലും ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങളും എഴുതുക.
  - ആദ്യപദം $-2$, പൊതുവ്യത്യാസം 5

### നിഗമനങ്ങളിലെ അപകടം

വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചു കിട്ടുന്ന ഭാഗങ്ങളെക്കുറിച്ച്, **വൃത്തവിഭജനം** എന്ന ഭാഗത്തു കണ്ടല്ലോ. ബിന്ദുക്കളുടെ എണ്ണം 2, 3, 4, 5 എന്നിങ്ങനെയാകുമ്പോൾ, ഭാഗങ്ങളുടെ എണ്ണം 2, 4, 8, 16 എന്നു കിട്ടും. ബിന്ദുക്കൾ 6 എണ്ണമാകുമ്പോഴോ? 32 എന്നാകും ഊഹം. വരച്ചുനോക്കിയാലോ?

ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ അകലത്തിലാണെങ്കിൽ 30 ഭാഗം

അല്ലെങ്കിൽ 31 ഭാഗം

ഏതായാലും, പരമാവധി 31 ഭാഗം

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, വൃത്തത്തിലെ $n$ ബിന്ദുക്കൾ പരസ്പരം യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന പരമാവധി ഭാഗങ്ങളുടെ എണ്ണം

$$\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)+\frac{1}{2}n(n-1)+1$$

ആണെന്നു തെളിയിച്ചിട്ടുണ്ട്.

ഈ ബീജഗണിതവാചകത്തിലും $2^{n-1}$ എന്ന വാചകത്തിലും $n = 1, 2, 3, 4, 5$ എന്നി സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്നത്, 1, 2, 4, 8, 16 എന്നീ സംഖ്യകൾ തന്നെയാണെന്നതാണ് രസകരം. $n = 6$ മുതൽ, രണ്ടു വാചകത്തിൽ നിന്നും കിട്ടുന്ന സംഖ്യകൾ വ്യത്യസ്തമാകും.

- ആദ്യപദം 2, പൊതുവ്യത്യാസം $-5$
- ആദ്യപദം 1, പൊതുവ്യത്യാസം $\frac{1}{2}$

- ചില ശ്രേണികളുടെ ബീജഗണിതരൂപം ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്നു. ഓരോന്നും സമാന്തരശ്രേണിയാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക; സമാന്തരശ്രേണികളുടെ ആദ്യപദവും പൊതുവ്യത്യാസവും കണ്ടുപിടിക്കുക:
    - $x_n = 4 - 3n$
    - $x_n = n^2 + 2$
    - $x_n = \frac{n+1}{2}$
    - $x_n = \frac{n+2}{n}$
    - $x_n = (n+1)^2 - (n-1)^2$
- തുടർച്ചയായ ഒറ്റസംഖ്യകളെ 2 കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് 1 കൂട്ടി കിട്ടുന്ന ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം എഴുതുക. ഇത് സമാന്തര ശ്രേണിയാണോ? ഈ ശ്രേണിയിൽ വരാത്ത ഒറ്റസംഖ്യകൾ ക്രമമായി എഴുതിയ ശ്രേണിയുടെ ബിജഗണിതരൂപം എന്താണ്? ഇതൊരു സമാന്തരശ്രേണിയാണോ?
- ആദ്യപദം $\frac{1}{2}$ ഉം, പൊതുവ്യത്യാസം $\frac{1}{4}$ ഉം ആയ സമാന്തര ശ്രേണിയിൽ 1 ഒരു പദമാണോ? 2 ആയാലോ?
  ഈ ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം എഴുതുക. എല്ലാ എണ്ണൽസംഖ്യകളും ഇതിലെ പദങ്ങളായി വരും എന്നു തെളിയിക്കുക.
- ആദ്യപദം $\frac{1}{2}$ ഉം, പൊതുവ്യത്യാസം $\frac{1}{3}$ ഉം ആയ സമാന്തരശ്രേണിയിൽ 1 ഒരു പദമാണോ? 2 ആയാലോ?
  ഈ ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം എഴുതുക. ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യയും ഇതിലെ പദമായി വരില്ല എന്നു തെളിയിക്കുക.
- ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ പദവും രണ്ടാമത്തെ പദവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 3 ആണ്. മൂന്നാമത്തെ പദവും, അഞ്ചാമത്തെ പദവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എത്രയാണ്?

## തുകകൾ

തുടർച്ചയായ എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുകകൾ കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ഒരു സൂത്രം ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ **ബഹുപദങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ, **ത്രികോണസംഖ്യകൾ** എന്ന ഭാഗത്തിലുണ്ട്. അത് ഒന്നുകൂടി നോക്കാം.

### നിയമത്തിന്റെ ഭാഷ

ഒരു ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളെല്ലാം കണ്ടുപിടിക്കണമെങ്കിൽ, ശ്രേണിയുടെ നിയമം വ്യക്തമാക്കണമെന്നു കണ്ടല്ലോ. ഈ നിയമം ബീജഗണിതത്തിൽപ്പറയുന്ന ഉദാഹരണങ്ങളും കണ്ടു.

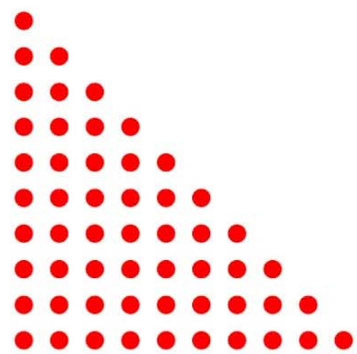
എന്നാൽ, ചില ശ്രേണികളുടെ നിയമം ബീജഗണിതരൂപത്തിലെഴുതാൻ കഴിയില്ല. ഉദാഹരണമായി, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... എന്നു തുടരുന്ന അഭാജ്യ സംഖ്യകളുടെ ശ്രേണിയിലെ ഒരു നിശ്ചിത സ്ഥാനത്തെ പദം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ഒരു ബീജഗണിതവാചകം ഇതുവരെ കണ്ടുപിടിച്ചിട്ടില്ല.

അതുപോലെ, $\pi$ യുടെ ദശാംശരൂപത്തിൽ വരുന്ന 3, 1, 4, 1, 5, 9, ... എന്ന ശ്രേണിയിലേയും ഒരു നിശ്ചിതസ്ഥാനത്തെ പദം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ബീജഗണിതവാചകമൊന്നുമില്ല.

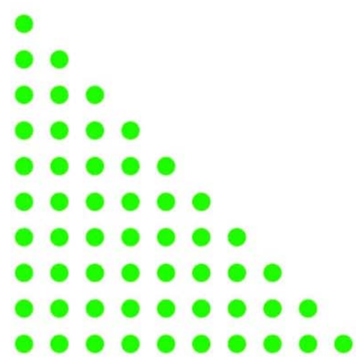
ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ, ശ്രേണിയുടെ നിയമം, സാധാരണ ഭാഷയിൽ പറയാനേ നിവൃത്തിയുള്ളു.

ഉദാഹരണമായി, 1 മുതൽ 10 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുക കണ്ടുപിടിക്കണമെന്നിരിക്കട്ടെ. (10 വരെയുള്ള സംഖ്യകൾ നേരിട്ടുതന്നെ കൂട്ടാം. 100 വരെയാണെങ്കിലോ? ഇനിപ്പറയുന്ന മാർഗം അതിനും ഉപയോഗിക്കാം)

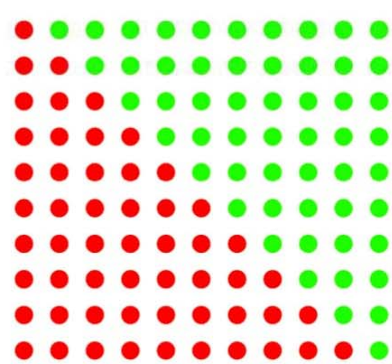
ഈ തുക, ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ത്രികോണത്തിലെ പുള്ളികളുടെ എണ്ണമാണല്ലോ:



ഇതുപോലെ മറ്റൊരു ത്രികോണമുണ്ടാക്കുക.



ഇത് കീഴ്മേൽ തിരിച്ച് ആദ്യത്തെ ത്രികോണവുമായി ചേർത്തുവച്ചാലോ?



അപ്പോൾ ഒരു ചതുരമായി, ഇതിൽ ചുവപ്പും പച്ചയുമായി ആകെ എത്ര പുള്ളികളുണ്ട്?

### രൂപാന്തരം

സമാന്തരശ്രേണികളുടെ ബീജഗണിതരൂപം $x_n = an + b$ ആണെന്നു കണ്ടല്ലോ. എന്താണിതിന്റെ അർത്ഥം?

എണ്ണൽ സംഖ്യകളെയെല്ലാം ഒരു നിശ്ചിതസംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യ കൂട്ടിയാൽ, ഒരു സമാന്തരശ്രേണി കിട്ടും. ഉദാഹരണമായി, $\frac{1}{2}$ കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, $-1$ കൂട്ടിയാൽ, $-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \ldots$ എന്നു തുടരുന്ന സമാന്തരശ്രേണി കിട്ടും. (ഇതിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം $x_n = \frac{1}{2}n - 1$)

മറിച്ച്, ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയും ഇത്തരത്തിലാണ് ഉണ്ടാകുന്നത്. ഉദാഹരണമായി, 7, 16, 25, ... എന്നു തുടരുന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം $x_n = 9n - 2$ എന്നാണ്; അതായത്, എണ്ണൽസംഖ്യകളെയെല്ലാം 9 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, $-2$ കൂട്ടിയാൽ, ഈ ശ്രേണി കിട്ടും.

10 വരികൾ; ഓരോന്നിലും 11 പുള്ളികൾ, ആകെ $10 \times 11 = 110$

ഇത് നമുക്കാവശ്യമായ തുകയുടെ രണ്ടു മടങ്ങാണ്. അപ്പോൾ

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = \frac{1}{2} \times 10 \times 11 = 55$$

ഈ ചെയ്തത് സംഖ്യകൾ മാത്രമുപയോഗിച്ചും എഴുതാം:

$$s = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

എന്നെടുത്താൽ

$$\begin{aligned} 2s &= (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) + \\ &\quad (10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) \\ &= 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 \\ &= 10 \times 11 \\ &= 110 \end{aligned}$$

അപ്പോൾ

$$s = \frac{1}{2} \times 110 = 55$$

10 നുപകരം ഏതു സംഖ്യ ആയാലും, ഇതേ യുക്തി ഉപയോഗിക്കാമല്ലോ. അതായത്.

*ഒന്നിൽ നിന്നു തുടങ്ങി, ഒരു നിശ്ചിത എണ്ണൽസംഖ്യ വരെ കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്നത്, ആ സംഖ്യയുടേയും അതിനോട് ഒന്ന് കൂട്ടിയതിന്റേയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണ്.*

ബീജഗണിതഭാഷയിൽപ്പറഞ്ഞാൽ

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2} n(n + 1)$$

ഇതുപയോഗിച്ച്, മറ്റു സമാന്തര ശ്രേണികളിലെ പദങ്ങളുടെ തുകയും കാണാം. ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കൂ:

- 2, 4, 6, ..., 100 എന്നിങ്ങനെയുള്ള ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ തുക കണ്ടുപിടിക്കുന്നതെങ്ങനെ?

  എണ്ണൽസംഖ്യകളെ 2 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ കിട്ടുന്നവയാണല്ലോ ഇരട്ടസംഖ്യകൾ, അപ്പോൾ

  $$2 + 4 + 6 + \ldots + 100 = 2(1 + 2 + 3 + \ldots + 50)$$

  എന്നെഴുതാം. ഇപ്പോൾ കണ്ടതനുസരിച്ച്,

  $$1 + 2 + 3 + \ldots + 50 = \frac{1}{2} \times 50 \times 51$$

  അപ്പോൾ

### ഒരു ഗണിതകഥ

ഗൗസ് എന്ന ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനെക്കുറിച്ച് ഒമ്പതാം ക്ലാസിൽ കേട്ടല്ലോ. നന്നേ ചെറുപ്പത്തിൽത്തന്നെ ഗണിതത്തിൽ ഇദ്ദേഹം അസാധാരണമായ കഴിവു പ്രകടിപ്പിച്ചിരുന്നുവത്രേ. അതിനെക്കുറിച്ചൊരു കഥയുണ്ട്.

ഗൗസിനു പത്തു വയസ്. ക്ലാസിലെ അധ്യാപകൻ, കുട്ടികളെ അടക്കിയിരുത്താനായി, ഒന്നു മുതൽ നൂറു വരെയുള്ള സംഖ്യകളെല്ലാം കൂട്ടി തുക കാണാൻ പറഞ്ഞു. വളരെപ്പെട്ടെന്നു തന്നെ കൊച്ചു ഗൗസ് ഉത്തരം പറഞ്ഞു: 5050. ഇങ്ങനെ വിശദീകരിക്കുകയും ചെയ്തു: 1 ഉം 100 ഉം 101; അതുപോലെ 2 ഉം 99 ഉം 101; ഇങ്ങനെ 50 ജോടികൾ. ആകെ തുക $50 \times 101 = 5050$

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 100 = 2 \times \frac{1}{2} \times 50 \times 51 = 2550$$

- 1, 3, 5, ... എന്നിങ്ങനെ തുടങ്ങി, ഒരു നിശ്ചിത എണ്ണം ഒറ്റ സംഖ്യകളുടെ തുകയുടെ ബീജഗണിതരൂപം കണ്ടുപിടിക്കണം.

ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണിയെ ബീജഗണിതരൂപത്തിൽ എഴുതുന്നതെങ്ങനെ? ഈ ശ്രേണിയിലെ $n$-ാം പദം

$$1 + (n - 1) \times 2 = 2n - 1$$

ആണല്ലോ. അതിനാൽ ഈ ശ്രേണിയെ

$$x_n = 2n - 1$$

എന്നെഴുതാം. അപ്പോൾ

ആദ്യത്തെ $n$ ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുക

$$= x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$$

$$= (2 \times 1 - 1) + (2 \times 2 - 1) + (2 \times 3 - 1) \ldots + (2n - 1)$$

$$= 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) - \overbrace{(1 + 1 + 1 + \ldots + 1)}^{n \text{ എണ്ണം}}$$

$$= \left(2 \times \frac{1}{2} n(n + 1)\right) - n$$

$$= n(n + 1) - n$$

$$= n^2$$

അതായത്, ആദ്യത്തെ കുറെ ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുക, കൂട്ടിയ സംഖ്യകളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ വർഗമാണ്. (ഇതേകാര്യം, ഏഴാം ക്ലാസിലെ, **സമചതുരസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിലും പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്.)

ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ കാര്യത്തിലെന്നപോലെ, ഏതു സമാന്തര ശ്രേണിയുടെയും നിശ്ചിത എണ്ണം പദങ്ങളുടെ തുകയുടെ ബീജഗണിതരൂപം കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയേയും

$$x_n = an + b$$

എന്ന ബീജഗണിതവാക്യം കൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കാമല്ലോ. അപ്പോൾ

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$$

$$= (a \times 1 + b) + (a \times 2 + b) + (a \times 3 + b) + \ldots + (an + b)$$

$$= a(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + \overbrace{(b + b + b + \ldots + b)}^{n \text{ എണ്ണം}}$$

### പഴയൊരു ശ്രേണി

പ്രാചീന ഈജിപ്റ്റിലെ ഗണിതരചനയായ ആഹ്മോസ് പപ്പൈറസിനെക്കുറിച്ചു കേട്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. (ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ **സമവാക്യങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **പ്രാചീനഗണിതം** എന്ന ഭാഗം നോക്കുക.) ഇതിലെ 64-ാം പ്രശ്നം ഇങ്ങനെയാണ്.

*10 ഹെക്റ്റ് ബാർളി 10 പേർക്ക് ക്രമമായി വീതിക്കണം. അടുത്തടുത്തു വരുന്നവർക്കു കിട്ടുന്നത് $\frac{1}{8}$ ഹെക്റ്റ് വ്യത്യാസത്തിലായിരിക്കണം. ഓരോരുത്തർക്കും എത്ര വീതമാണ് കൊടുക്കേണ്ടത്?*

ഇവിടെ ഹെക്റ്റ് എന്നത് അന്നത്തെ ഒരു അളവാണ്. ഇതിന്റെ ഉത്തരം കണ്ടുപിടിച്ചിരിക്കുന്ന രീതി ഇങ്ങനെയാണ്.

1. 10 നെ 10 കൊണ്ടു ഹരിക്കുക. 1 കിട്ടും.
2. 10 ൽ നിന്ന് 1 കുറച്ച്, $\frac{1}{8}$ ന്റെ പകുതി കൊണ്ടു ഗുണിക്കുക : $\frac{9}{16}$ കിട്ടും.
3. ഇത് ആദ്യം കിട്ടിയ 1 നോടു കൂട്ടുക. ഇപ്പോൾ കിട്ടിയ $1\frac{9}{16}$ ആണ് ഏറ്റവും വലിയ വിഹിതം.
4. ഇതിൽ നിന്ന് $\frac{1}{8}$ തുടരെ കുറച്ച്, മറ്റു വിഹിതങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഈ കണക്കു കൂട്ടലിന്റെ യുക്തി എന്താണ്?

ഇന്നത്തെ രീതിയിൽ ഈ കണക്ക് എങ്ങനെയാണ് ചെയ്യുക?

$$= \left(a \times \frac{1}{2} n(n+1)\right) + n \times b$$

$$= \frac{1}{2} an(n+1) + bn$$

സൗകര്യത്തിനുവേണ്ടി ഇതൽപം മാറ്റിയെഴുതാം.

$$\frac{1}{2} an(n+1) + bn = \frac{1}{2} n\left(a(n+1) + 2b\right)$$

$$= \frac{1}{2} n\left((an+b) + (a+b)\right)$$

$$= \frac{1}{2} n(x_n + x_1)$$

ഇതിന്റെ അർത്ഥമെന്താണ്?

*ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ തുടർച്ചയായ കുറേ പദങ്ങളുടെ തുക, ആദ്യത്തേയും അവസാനത്തേയും പദങ്ങളുടെ തുകയെ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതിന്റെ പകുതിയാണ്.*

ഉദാഹരണമായി 3, 5, 7, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ 50 പദങ്ങളുടെ തുക കണ്ടുപിടിക്കണമെന്നു കരുതുക. ഇതിലെ 50-ാം പദം

$$3 + (49 \times 2) = 101$$

എന്നു കാണാമല്ലോ. അപ്പോൾ തുക

$$\frac{1}{2} \times 50 \times (3 + 101) = 2600$$

എന്നു കണക്കു കൂട്ടാം.

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ സ്വയം ചെയ്തുനോക്കൂ:

- ആദ്യപദം 5 ഉം, പൊതുവ്യത്യാസം 2 ഉം ആയ സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ 25 പദങ്ങളുടെ തുക കണ്ടുപിടിക്കുക
- ആദ്യപദം $f$ ഉം, പൊതുവ്യത്യാസം $d$ യും ആയ സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ $n$ പദങ്ങളുടെ തുക കണക്കുകൂട്ടുന്നതിനുള്ള ബീജഗണിതവാചകം കണ്ടുപിടിക്കുക.
- $5^2 \times 5^4 \times 5^6 \times \dots \times 5^{2n} = (0.04)^{-28}$ ആണെങ്കിൽ, $n$ എത്രയാണ്?
- ഒമ്പതിന്റെ ഗുണിതങ്ങളായ എല്ലാ മൂന്നക്കസംഖ്യകളുടേയും തുക കണ്ടുപിടിക്കുക.
- ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും ആദ്യത്തെ അഞ്ചു പദങ്ങളുടെ

### മറ്റൊരു മാർഗം

എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ തുക കണ്ടുപിടിക്കാൻ മറ്റൊരു മാർഗമുണ്ട്. $x$ ഏതു സംഖ്യയായാലും

$$(x+1)^2 - x^2 = 2x + 1$$

എന്നറിയാമല്ലോ. ഇതിൽ $1, 2, 3, \dots\dots, n$ എന്നു ക്രമമായി എടുത്താൽ

$$2^2 - 1^2 = (2 \times 1) + 1$$

$$3^2 - 2^2 = (2 \times 2) + 1$$

$$4^2 - 3^2 = (2 \times 3) + 1$$

.................................

$$(n+1)^2 - n^2 = (2 \times n) + 1$$

എന്നു കിട്ടും

ഈ സമവാക്യങ്ങളെല്ലാം തമ്മിൽ കൂട്ടിയാലോ?

$$(n+1)^2 - 1 = 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) + n$$

എന്നു കിട്ടും. ഇതിൽ നിന്ന്

$$1 + 2 + 3 + \dots + n$$

$$= \frac{1}{2}((n+1)^2 - 1 - n)$$

$$= \frac{1}{2}(n^2 + n)$$

$$= \frac{1}{2} n(n+1)$$

എന്നു കിട്ടും.

തുക, മൂന്നാമത്തെ പദത്തിന്റെ അഞ്ചു മടങ്ങാണെന്നു തെളിയിക്കുക. ഏഴുപദങ്ങളുടെ തുകയോ?

ഇത്തരം കണക്കുകളിൽ നിന്ന് ഒരു പൊതുനിയമം ഉണ്ടാക്കാമോ?

- ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ $n$ പദങ്ങളുടെ തുക $2n^2 + 3n$ ആണ്. ഈ ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം എഴുതുക.

ചുവടെയുള്ള ചോദ്യങ്ങൾക്ക്, മനക്കണക്കായി ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കുക

- 3, 5, 7, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ 25 പദങ്ങളുടെ തുകയേക്കാൾ എത്ര കൂടുതലാണ്, 4, 6, 8, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ 25 പദങ്ങളുടെ തുക?
- 1 മുതൽ 20 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുകയേക്കാൾ എത്ര കൂടുതലാണ്, 21 മുതൽ 40 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുക?
- $51 + 52 + 53 + ... + 70$
- $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + ... + \frac{25}{2}$
- $\frac{1}{2} + 1 + 1\frac{1}{2} + 2 + 2\frac{1}{2} + ... + 12\frac{1}{2}$

### പ്രോജക്ട്

- പദങ്ങളെല്ലാം എണ്ണൽസംഖ്യകളായ ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളിൽ ഒരെണ്ണം പൂർണവർഗമാണെങ്കിൽ, മറ്റനേകം പദങ്ങൾ പൂർണവർഗമാണെന്നു തെളിയിക്കുക. പദങ്ങളെല്ലാം എണ്ണൽസംഖ്യകളും, ഒരു പദംപോലും പൂർണവർഗമല്ലാത്തതുമായ സമാന്തരശ്രേണിയുണ്ടോ എന്നു കണ്ടുപിടിക്കുക.

### വർഗങ്ങളുടെ തുക

സർവസമവാക്യമുപയോഗിച്ച് എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ തുക കണ്ടുപിടിച്ചതുപോലെ, അവയുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുകയും കണ്ടുപിടിക്കാം.

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

എന്ന സർവസമവാക്യം കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. (ഒമ്പതാംക്ലാസിലെ **ബഹുപദങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **കൃതിയും ക്രമവും** എന്ന ഭാഗം നോക്കുക) ഇതിൽ നിന്ന്, $x$ ഏതു സംഖ്യയായാലും

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$$

എന്നു കാണാം. മുമ്പു ചെയ്തതുപോലെ ഇതിൽ $x = 1, 2, 3, ...., n$ എന്നെടുത്തു കൂട്ടിയാൽ

$$(n+1)^3 - 1$$
$$= 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + ... + n) + n$$

എന്നു കിട്ടും. അതായത്

$$n^3 + 3n^2 + 3n$$
$$= 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) + \frac{3}{2}n(n+1) + n$$

അപ്പോൾ

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$$
$$= \frac{1}{3}\left(n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3}{2}n(n+1) - n\right)$$

ഈ സമവാക്യത്തിലെ വലതുഭാഗം ലഘൂകരിച്ച്,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

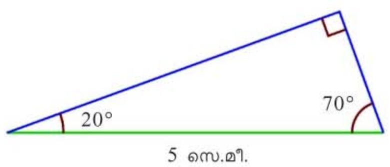
എന്നാക്കാം.

# 2 വൃത്തങ്ങൾ

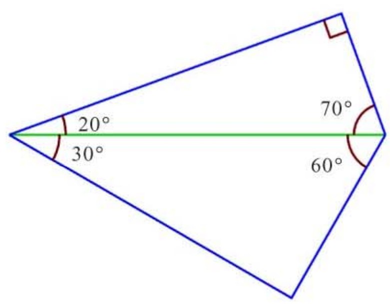
## കോൺ ചിത്രങ്ങൾ

ഒരു മട്ടത്രികോണം വരയ്ക്കണം. കർണം 5 സെന്റിമീറ്റർ വേണം. ലംബവശങ്ങൾ എന്തുമാകാം. എങ്ങനെയെല്ലാം വരയ്ക്കാം?

5 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ വര വരയ്ക്കുക. അതിന്റെ ഒരറ്റത്ത് ഇഷ്ടമുള്ള ഒരു കോണും, മറ്റേ അറ്റത്ത് $90°$ യിൽ നിന്നു ഇതു കുറച്ച കോണും വരച്ച്, ത്രികോണമാക്കാം. ഉദാഹരണമായി,




വരയുടെ ചുവട്ടിലും വരയ്ക്കാം:

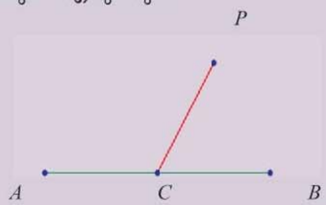



ജ്യാമിതിപ്പെട്ടിയിലെ മട്ടം ഉപയോഗിച്ചു വരയ്ക്കാം: മട്ടമൂല മുകളിൽ (അല്ലെങ്കിൽ താഴെ) വരുന്നവിധം, അതിന്റെ അരികുകൾ രണ്ടും വരയുടെ രണ്ടറ്റത്തും ചേർത്തുവച്ച് ശ്രമിച്ചുനോക്കൂ.

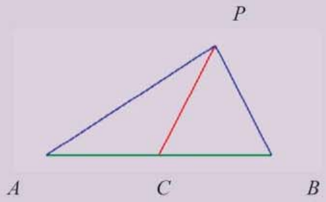
ഇത്തരം കുറേ ത്രികോണങ്ങൾ വരച്ച്, അവയുടെ മൂന്നാംമൂലകൾ മാത്രം നോക്കൂ:

### വൃത്തത്തിൽനിന്നു മട്ടം

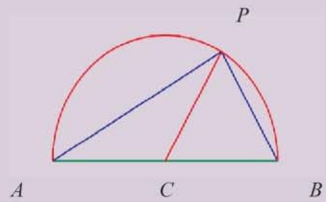
$AB$ കർണമായ മട്ടത്രികോണം വരയ്ക്കാൻ മറ്റൊരു മാർഗമുണ്ട്. $AB$ യുടെ മധ്യബിന്ദു $C$ യിൽ നിന്ന് $AB$ യുടെ നീളത്തിന്റെ പകുതി അകലത്തിൽ ഒരു ബിന്ദു $P$ എടുക്കുക:



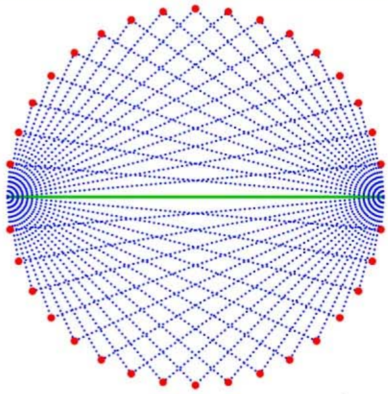

$\angle APB$ മട്ടമാണെന്നു തെളിയിക്കാം.



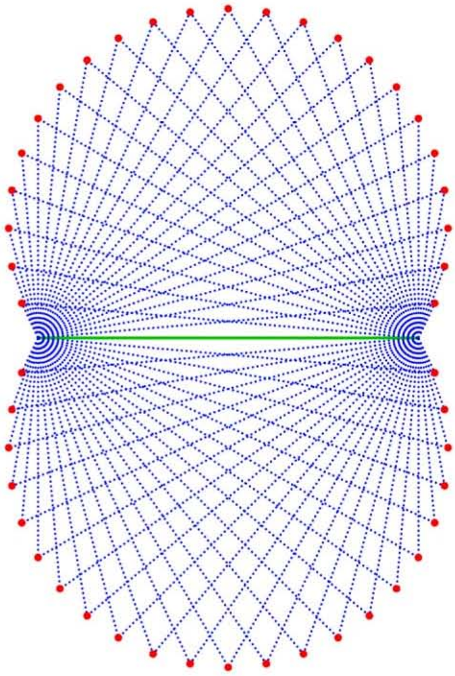

$CA = CB = CP$ ആയതിനാൽ, $C$ കേന്ദ്രമായി, ഈ നീളം ആരമായി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തം $P$ യിൽക്കൂടി കടന്നുപോകും:




അപ്പോൾ $\angle APB = 90°$ ആകണമല്ലോ. (എട്ടാം ക്ലാസിലെ **സർവസമത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **അർധവൃത്തത്തിലെ കോൺ** എന്ന ഭാഗം ഓർമയുണ്ടോ?)

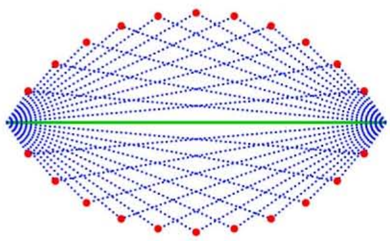


ഇനി കോണുകളെയെല്ലാം മട്ടമാക്കുന്നതിനുപകരം $60°$ ആയി വരച്ചു നോക്കൂ. (ജ്യാമിതിപ്പെട്ടിയിലെ ഒരു മട്ടത്തിന്റെ മൂല ഉപയോഗിക്കാം)



ജ്യാമിതിപ്പെട്ടിയിലെ മട്ടങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച്, കോൺ $45°$ആയും $30°$ ആയും വരച്ചാലോ?

ഇനി കട്ടിക്കടലാസിൽ, ഒരു കോൺ $120°$ ആയ ഒരു ത്രികോണം വെട്ടിയെടുക്കുക. അതുപയോഗിച്ച്, കോണുകൾ $120°$ ആയി വരച്ചു നോക്കൂ.



എന്തുകൊണ്ടാണ് ഇത്തരം ചിത്രങ്ങൾ കിട്ടുന്നത്? പരിശോധിച്ചു നോക്കാം.

### മട്ടത്തിൽ നിന്നു വൃത്തം

$AB$ എന്ന വര വ്യാസമായ വൃത്തത്തിൽ $A$, $B$ ഇവയല്ലാതെ ഏതു ബിന്ദു $P$ എടുത്താലും, $AB$ കർണമായ മട്ടത്രികോണം കിട്ടുമെന്നു കണ്ടല്ലോ.

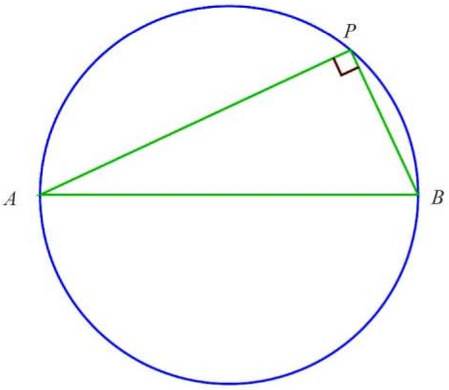
മറിച്ച് $AB$ കർണമായ ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നാംമൂല $P$ എന്നെടുത്താൽ, $APB$ എന്നത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം $AB$ ആയിരിക്കുകയും ചെയ്യും. (ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ **ജ്യാമിതിയിലെ അംശബന്ധങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **മറ്റൊരു ത്രികോണം** എന്ന ഭാഗത്ത് ഇങ്ങനെ ഒരു കണക്കുണ്ടല്ലോ).

അപ്പോൾ $AB$ കർണമായ മട്ടത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം മൂന്നാം മൂലകളെടുത്താൽ, $AB$ വ്യാസമായ വൃത്തത്തിലെ $A$, $B$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളൊഴിച്ചുള്ള മറ്റെല്ലാ ബിന്ദുക്കളും കിട്ടും.

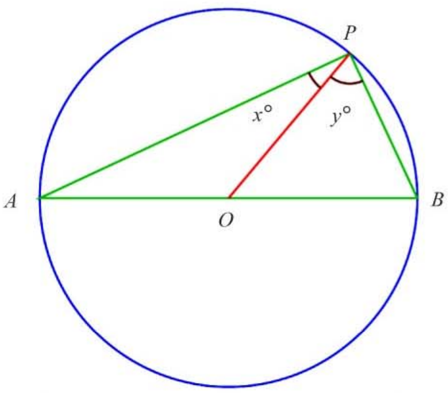
## മട്ടവും വൃത്തവും

മട്ടകോൺ ഉപയോഗിച്ചു വരച്ച ചിത്രത്തിൽ, ഒറ്റ വൃത്തമാണ് കിട്ടിയത്. ആദ്യത്തെ വര അതിന്റെ വ്യാസവുമായി. അതായത്, മുകളിലും താഴെയും അർധവൃത്തങ്ങൾ.

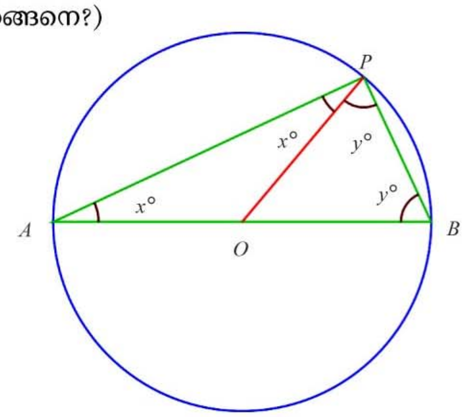
ഇത്തരമൊരു ചിത്രം നേരത്തെ കണ്ടിട്ടുണ്ടോ? (എട്ടാംക്ലാസിലെ **സർവസമത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **അർധവൃത്തത്തിലെ കോൺ** എന്ന ഭാഗം ഓർക്കുക)




$AB$ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസമാണ്. $\angle P$ മട്ടകോണാണെന്ന് കിട്ടിയത് എങ്ങനെയാണ്?



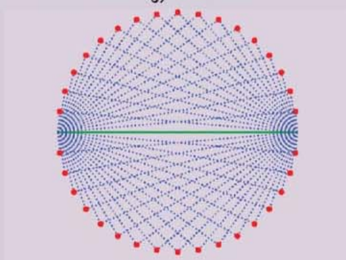

$O$ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രമാണ്. അതിനാൽ $OAP$ യും, $OBP$ യും സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളാണ് (കാരണം?) $\angle APO = x^\circ$ എന്നും $\angle BPO = y^\circ$ എന്നും എടുത്താൽ $\angle A = x^\circ$ എന്നും, $\angle B = y^\circ$ എന്നും കിട്ടും (അതെങ്ങനെ?)




### സഞ്ചാരപാത

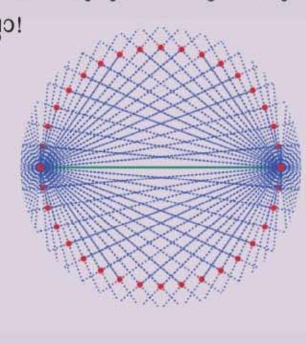
ബിന്ദുക്കളുടെ സഞ്ചാരപാതകളെ പലപ്പോഴും, നീളങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിലോ, കോണുകളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിലോ വിവരിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ ലംബസമഭാജി, ഈ ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്ന് തുല്യഅകലം പാലിച്ചുകൊണ്ട് ചലിക്കുന്ന ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സഞ്ചാരപാതയായി കാണാം; ഈ വരയുടെ രണ്ടറ്റങ്ങളുമായി യോജിപ്പിക്കുമ്പോൾ തുല്യകോണുകൾ വരത്തക്കവിധം സഞ്ചരിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ പാതയായും കാണാം.

ഒരു നിശ്ചിത വര കർണമായ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നാം മൂലയുടെ സഞ്ചാരപാത എന്താണ്?



ഈ വര വ്യാസമായ വൃത്തം മുഴുവൻ കിട്ടില്ലെന്നു കണ്ടല്ലോ; വരയുടെ അറ്റങ്ങൾ ഈ പാതയിലില്ല.

പകരം, ഒരു വരയുടെ അറ്റങ്ങളിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന, പരസ്പരം ലംബമായ വരകൾ, തമ്മിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സഞ്ചാരപാത എന്നാക്കിയാലോ? മുഴുവൻ വൃത്തവും കിട്ടുമല്ലോ!



$\Delta ABP$ യിലെ കോണുകളുടെ തുക $180°$ ആയതിനാൽ

$$x + y + (x + y) = 180°$$

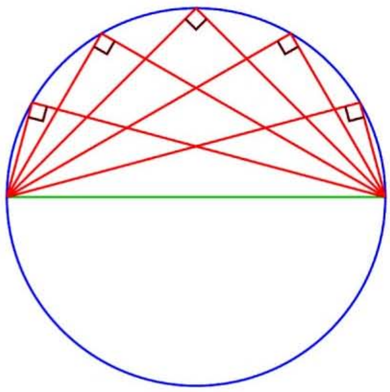
എന്നും കിട്ടും. ഇതിൽനിന്ന് $2x + 2y = 180°$ എന്നും, തുടർന്ന്

$$x + y = 90°$$

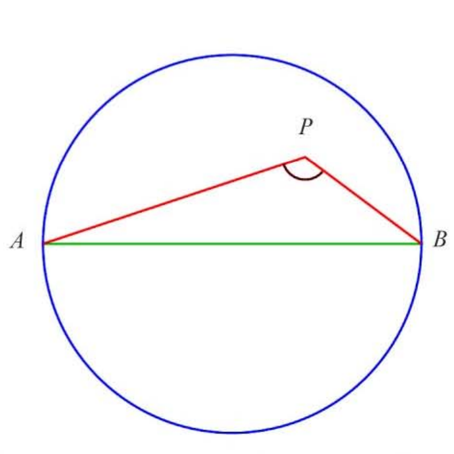
എന്നും കാണാം.

ഇതിൽ നിന്ന് എന്തു മനസ്സിലായി?

വൃത്തത്തിലെ ഒരു വ്യാസത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ, വൃത്തത്തിലെ മറ്റേതൊരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് മട്ടകോണാണ്.



ഇവിടെ മറ്റൊരു കാര്യം കൂടി നോക്കാം. വ്യാസത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ വൃത്തത്തിലെതന്നെ ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിക്കുമ്പോഴാണ് മട്ടകോൺ കിട്ടിയത്. വൃത്തത്തിനകത്തെ ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാലോ?



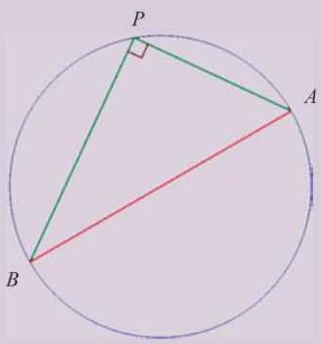

വൃത്തത്തിനകത്തെ ഏതു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാലും, ഇതുപോലെ മട്ടത്തേക്കാൾ വലിയ കോൺ കിട്ടുമോ?

ചിത്രത്തിലെ ഒരു വര നീട്ടി, വൃത്തത്തെ ഖണ്ഡിക്കുക; ആ ബിന്ദു, വ്യാസത്തിന്റെ മറ്റേ അറ്റവുമായി യോജിപ്പിക്കുക:

**മട്ടകോണും വ്യാസവും**

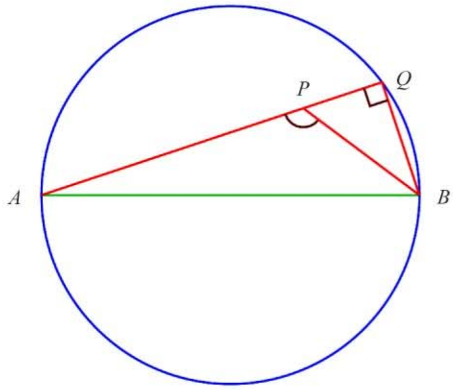
ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഒരു വ്യാസത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾ വൃത്തത്തിലെ മറ്റൊരു ബിന്ദുവിനോടു യോജിപ്പിക്കുമ്പോൾ, ഈ ബിന്ദുവിലുണ്ടാകുന്ന കോൺ മട്ടമാണെന്നു കണ്ടു.

മറിച്ച്, ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ടു വരകൾ വരച്ചുവെന്നു കരുതുക. ഈ വരകൾ വൃത്തത്തെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസമാണോ?



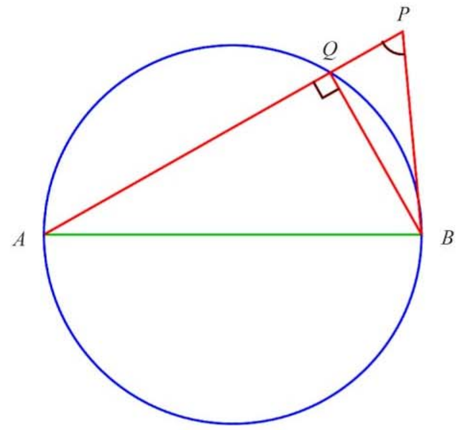

ഇവിടെ വൃത്തം, $APB$ എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തമാണ്. ഏതു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെയും കർണം അതിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസമാണല്ലോ. അപ്പോൾ $AB$ എന്ന വര വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസമാണ്.

(ഏഴാം ക്ലാസിലെ **വരകൾ ചേരുമ്പോൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **മട്ടവും വൃത്തവും** എന്ന ഭാഗത്ത്, വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം കണ്ടുപിടിക്കാൻ വിവരിച്ച മാർഗം എന്തുകൊണ്ടു ഫലിക്കുന്നു എന്ന് ഇപ്പോൾ മനസിലായില്ലേ?)




ഇപ്പോൾ $\Delta PQB$ യിൽ, $P$ യിലെ ബാഹ്യകോണാണ് $\angle APB$. ഇത്, ത്രികോണത്തിലെ $Q$ വിലേയും, $B$ യിലേയും (ആന്തര) കോണുകളുടെ തുകയാണല്ലോ. (ഒമ്പതാംക്ലാസ്സിലെ **ബഹുഭുജങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **മാറാത്ത തുക** എന്ന ഭാഗം നോക്കുക). ഇതിൽ $Q$ വിലെ കോൺ മട്ടമായതിനാൽ, $\angle APB$ മട്ടത്തേക്കാൾ കൂടുതലാണെന്നു കിട്ടിയില്ലേ?

ഇനി വൃത്തത്തിനു പുറത്ത് ഒരു ബിന്ദു ആയാലോ?



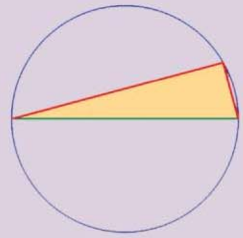

ഇപ്പോൾ $\Delta PQB$ യിൽ, $\angle APB$ യാണ് ആന്തരകോൺ; മട്ടകോണായ $\angle AQB$ ബാഹ്യകോണും. അപ്പോൾ $\angle APB$ മട്ടത്തേക്കാൾ ചെറുതാണെന്നു വന്നില്ലേ?

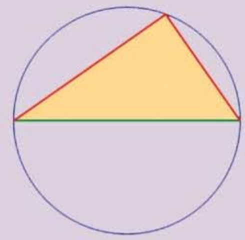
ഇനി, ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ ഏതോ ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചപ്പോൾ മട്ടകോൺ കിട്ടിയെന്നു കരുതുക. ഈ ബിന്ദു, വൃത്തത്തിനകത്താകില്ല (അകത്തെ ബിന്ദുക്കൾക്കെല്ലാം ഈ കോൺ മട്ടത്തേക്കാൾ കൂടുതലല്ലേ?); വൃത്തത്തിനു പുറത്തുമല്ല (പുറത്തെ ബിന്ദുക്കൾക്കെല്ലാം ഈ കോൺ മട്ടത്തേക്കാൾ കുറവാണല്ലോ). അപ്പോൾ, ഈ ബിന്ദു വൃത്തത്തിൽത്തന്നെയാണ്.

മട്ടത്രികോണങ്ങളുടെ മൂലകൾ ചേർത്ത്, ആദ്യം വരച്ച ചിത്രത്തിൽ വൃത്തം കിട്ടിയത് എന്തുകൊണ്ടാണെന്നു മനസിലായില്ലേ? ഇനി ഈ ആശയങ്ങളുപയോഗിച്ച്, ചില കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ.

### സമചതുരവിശേഷം

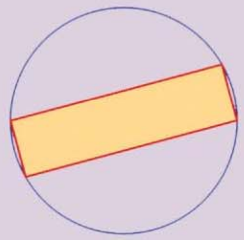
വൃത്തത്തിലെ വിവിധ ബിന്ദുക്കൾ ഏതെങ്കിലും വ്യാസത്തിന്റെ രണ്ടറ്റങ്ങളുമായി യോജിപ്പിച്ച്, വ്യത്യസ്ത മട്ടത്രികോണങ്ങളുണ്ടാക്കാമല്ലോ:

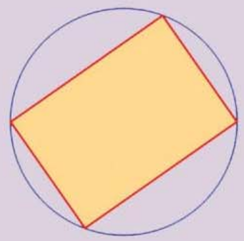




ഇവയിൽ ഏറ്റവും കൂടുതൽ പരപ്പളവ്, മുകളിലെ ബിന്ദു ഏതു സ്ഥാനത്തെടുക്കുമ്പോഴാണ്?

അപ്പോൾ മറ്റൊരു ചോദ്യം: നാലു മൂലകളും വൃത്തത്തിലായ പലപല ചതുരങ്ങൾ വരയ്ക്കാം.

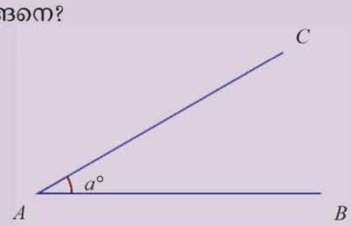




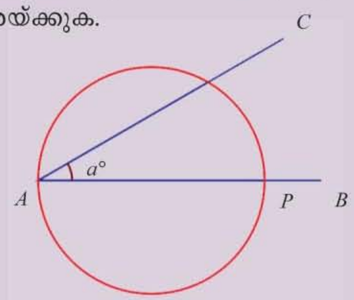
ഇവയിൽ ഏറ്റവും കൂടുതൽ പരപ്പളവുള്ള ചതുരത്തിന്റെ സവിശേഷത എന്താണ്?

### കോണിരട്ടിപ്പ്

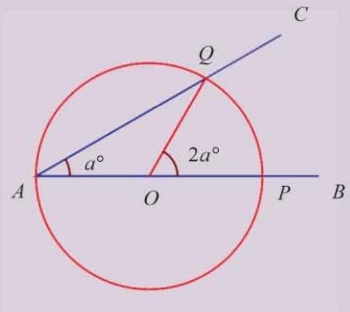
ഒരു കോണിന്റെ സമഭാജി വരച്ച്, അതിനെ പകുതിയാക്കാനറിയാമല്ലോ. ഒരു കോണിനെ ഇരട്ടിപ്പിക്കുന്നതെങ്ങനെ?




$AB$ യിലൊരു ബിന്ദു $P$ അടയാളപ്പെടുത്തി, $AP$ വ്യാസമായി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.




ഈ വൃത്തം $AC$ യെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദു $Q$ വും, വൃത്തകേന്ദ്രം $O$ യും യോജിപ്പിക്കുക




$OAQ$ സമപാർശ്വത്രികോണമായതിനാൽ , $\angle OQA = a°$; അതിനാൽ, $O$ യിലെ ബാഹ്യകോണായ $\angle POQ = 2a°$ എന്നിങ്ങനെ കാണാമല്ലോ.

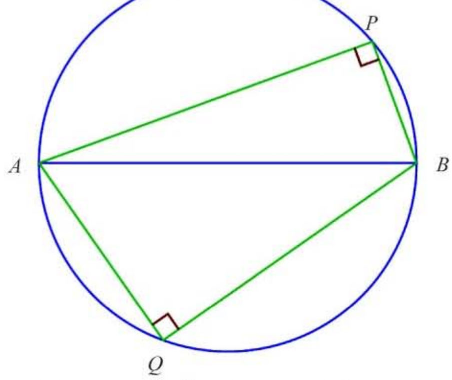
$AP$ വ്യാസമാക്കി വരക്കാതെയും കോണിരട്ടിപ്പിക്കാം. എങ്ങനെ?

- $\Delta ABC$ യിൽ, $\angle A = 60°$ ഉം $\angle B = 70°$ ഉം ആണ്. $C$ എന്ന ശീർഷം, $AB$ വ്യാസമായ വൃത്തത്തിനകത്തോ, പുറത്തോ?
- ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ ഒരു ജോടി എതിർകോണുകൾ മട്ടമാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ നാലു മൂലകളിൽക്കൂടിയും കടന്നു പോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമെന്നു തെളിയിക്കുക.
- $ABCD$ എന്ന ചതുർഭുജത്തിൽ $AB = 3$ സെന്റിമീറ്റർ, $BC = 4$ സെന്റിമീറ്റർ, $AC = 5$ സെന്റിമീറ്റർ, $\angle A = 120°$, $\angle C = 70°$. ഈ ചതുർഭുജത്തിന്റെ ഏതൊക്കെ മൂലകളാണ്, $AC$ വ്യാസമായ വൃത്തത്തിനു പുറത്തുള്ളത്? ഏതൊക്കെയാണ് അകത്ത്? വൃത്തത്തിൽത്തന്നെ ഏതെങ്കിലും ശീർഷമുണ്ടോ? $BD$ എന്ന വികർണം വ്യാസമായ വൃത്തത്തിലോ?

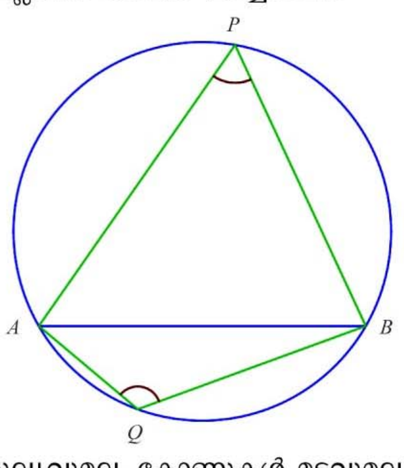
## കോണും ചാപവും ഞാണും

മട്ടകോൺ ഉപയോഗിച്ചു വരച്ച ചിത്രത്തിൽ വൃത്തം കിട്ടാനുള്ള കാരണം കണ്ടു. മറ്റു ചിത്രങ്ങളുടെ കാര്യമോ?

വീണ്ടും വൃത്തത്തിൽ നിന്നു തുടങ്ങാം. വൃത്തത്തിന്റെ ഏതു വ്യാസം $AB$ യും, വൃത്തത്തിനെ രണ്ടു തുല്യ ചാപങ്ങളാക്കുന്നു; അവയിലെ ഏതു ബിന്ദുക്കളുമായി വ്യാസാഗ്രങ്ങൾ $A, B$ യോജിപ്പിച്ചാലും മട്ടകോൺ കിട്ടുന്നു.

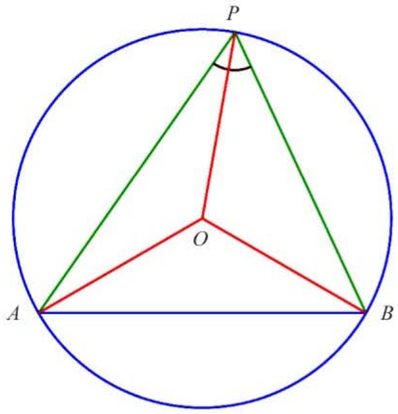



ഇനി വ്യാസമല്ലാത്ത ഞാൺ വരച്ചാലോ?

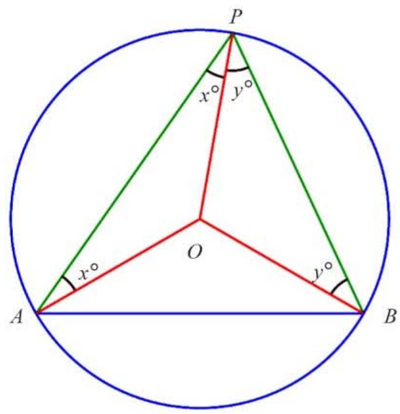



ചാപങ്ങൾ തുല്യവുമല്ല, കോണുകൾ മട്ടവുമല്ല.

മുകളിലേയും താഴെയുമുള്ള ചാപങ്ങളും കോണുകളും വെവ്വേറേ പരിശോധിക്കാം. ആദ്യം മുകളിലേത്. വ്യാസത്തിന്റെ കാര്യത്തിൽ ചെയ്തതുപോലെ, $P$ യെ വൃത്തകേന്ദ്രം $O$ യുമായി യോജിപ്പിക്കാം. ഇവിടെ വൃത്തകേന്ദ്രം ഞാണിൽത്തന്നെ അല്ലാത്തതിനാൽ, $OA$, $OB$ ഇവയും യോജിപ്പിക്കാം.

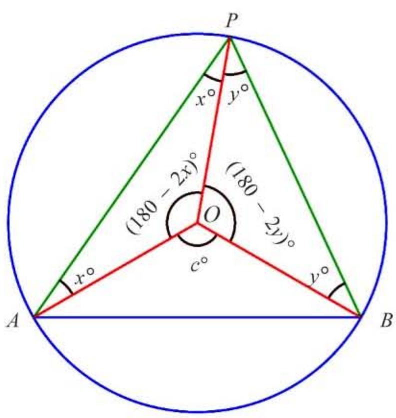



വ്യാസത്തിന്റെ കാര്യത്തിലെന്നപോലെ ഇതിലും $OAP$, $OBP$ ഇവ സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളാണല്ലോ.



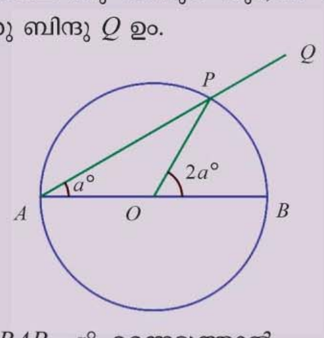

ഇവിടെ മുമ്പുകണ്ടതുപോലെ, ഈ സമപാർശ്വ ത്രികോണങ്ങൾ ചേർന്ന് ഒറ്റ ത്രികോണമാകുന്നില്ല; അതിനാൽ ത്രികോണത്തിലെ കോണുകളുടെ തുക എടുക്കുന്ന പഴയ സൂത്രം ഫലിക്കില്ല.

പകരം $O$ യുടെ ചുറ്റുമുള്ള കോണുകൾ എഴുതിനോക്കാം:



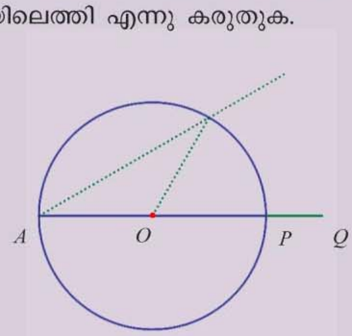

### തിരിവു കണക്ക്

ചിത്രത്തിലെ വൃത്തത്തിൽ $AB$ വ്യാസവും, $O$ കേന്ദ്രവുമാണ്. വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദു $P$ യും, $AP$ യിലെ ഒരു ബിന്ദു $Q$ ഉം.

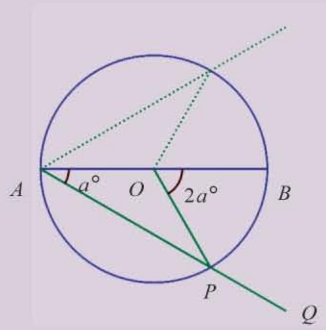



$\angle BAP = a°$ എന്നെടുത്താൽ,
$\angle BOP = 2a°$ ആണല്ലോ.

ഇനി, $P$ വൃത്തത്തിലൂടെ നീങ്ങി $B$ യിലെത്തി എന്നു കരുതുക.




$OP$ എന്ന വര $2a°$ ആണ് കറങ്ങിയത്. $AQ$ എന്ന വര $a°$ യും. വീണ്ടും $P$ നീങ്ങി, ആദ്യ സ്ഥാനത്തിന്റെ നേരെ ചുവട്ടിലെത്തുമ്പോഴോ?



അപ്പോൾ

$$(180 - 2x) + (180 - 2y) + c = 360$$

ആകണമല്ലോ (ഒമ്പതാംക്ലാസിലെ **വൃത്തങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ബിന്ദുവിനു ചുറ്റും** എന്ന ഭാഗം നോക്കുക). അതായത്

$$360 - 2(x + y) + c = 360$$

ഇതിൽ നിന്ന്

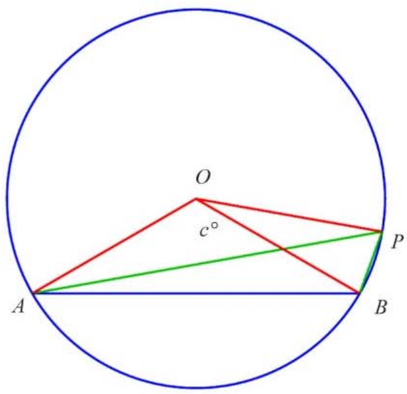
$$x + y = \frac{1}{2}c$$

എന്നു കാണാം. അതായത്

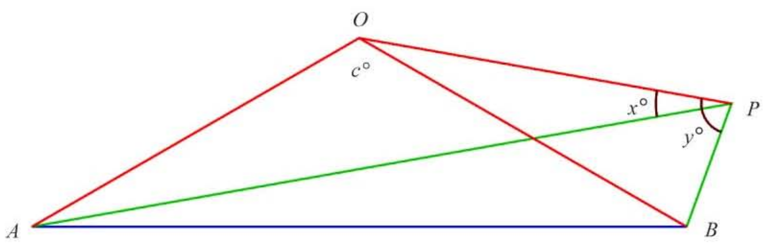
$$\angle APB = \frac{1}{2}c°$$

$P$ മുകളിലെ ചാപത്തിൽ എവിടെയായാലും ഇതു ശരിയാകുമോ?

ഇങ്ങനെ ആയാലോ?



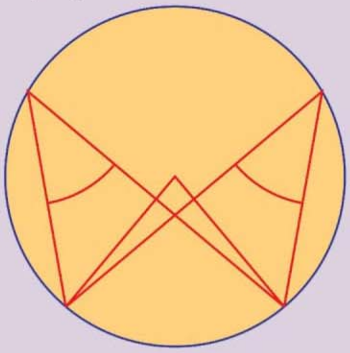

നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ $\angle OPA = x°$ എന്നും $\angle OPB = y°$ എന്നും എടുത്തു നോക്കാം. കാര്യങ്ങൾ വ്യക്തമായി കാണുന്നതിന്, ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണങ്ങൾ മാത്രം വലുതാക്കിയ ചിത്രം നോക്കാം:

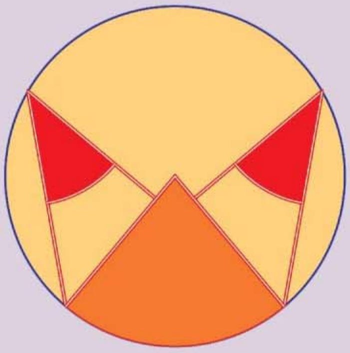



ഇനി നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ $OAP$, $OBP$ എന്നിവ സമപാർശ്വ ത്രികോണങ്ങളാണെന്നത് ഉപയോഗിച്ച്, മറ്റു കോണുകൾ കണ്ടുപിടിക്കാം:

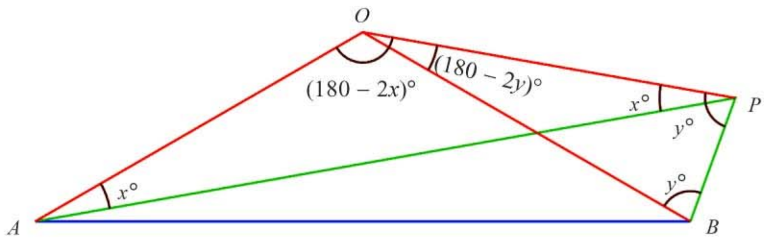
### മുറിക്കലും ചേർക്കലും

ചുവടെ കാണുന്നതുപോലെ, ഒരു ചിത്രം വരച്ച്, വൃത്താംശങ്ങൾ വെട്ടിയെടുക്കുക





ഇനി ഇവ ചുവടെക്കാണുന്നപോലെ ചേർത്തു വച്ചു നോക്കൂ:




ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്

$$\angle APB = (y - x)°$$

എന്നും

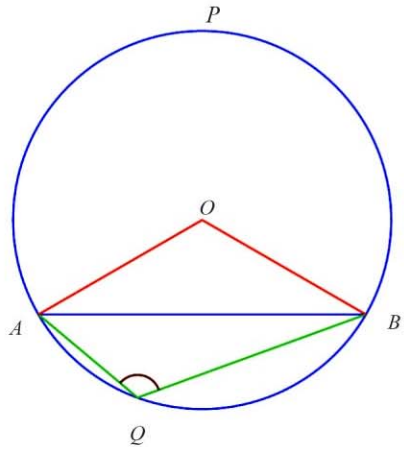
$$\angle AOB = (180 - 2x) - (180 - 2y) = 2(y - x)°$$

എന്നും കാണാമല്ലോ. അപ്പോൾ വീണ്ടും

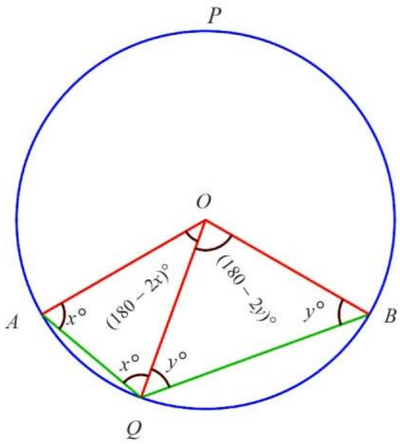
$$\angle APB = \frac{1}{2}c°$$

എന്നുതന്നെ കിട്ടും.

$AB$ യ്ക്കു ചുവടെയുള്ള കോണുകൾക്കും ഇതു ശരിയാണോ?

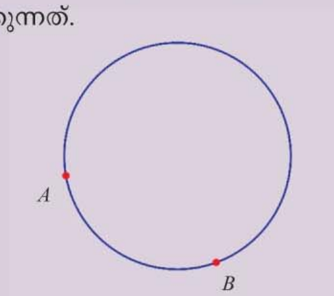



$OQ$ യോജിപ്പിച്ചാൽ ഇവിടെയും രണ്ടു സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങൾ കിട്ടും. അപ്പോൾ നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ കോണുകൾ എഴുതാം.



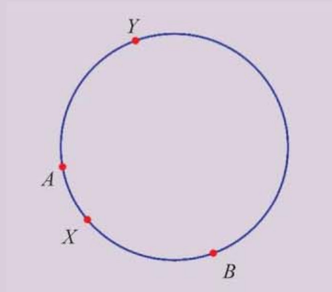

### ചാപജോടി

ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ അതിനെ രണ്ടു ചാപങ്ങളായാണ് മുറിക്കുന്നത്.




ചിത്രത്തിൽ, $A$ യിൽ നിന്നു വലത്തോട്ട് വൃത്തത്തിലൂടെ നീങ്ങി $B$ യിലെത്തുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ചെറിയ ചാപവും, $A$ യിൽ നിന്നു ഇടത്തോട്ട് വൃത്തത്തിലൂടെ നീങ്ങി $B$ യിലെത്തുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന വലിയ ചാപവും,

ഓരോ ചാപത്തിലും ഒരു ബിന്ദുകൂടി എടുത്താൽ, അതിന്റെ പേരും ചേർത്ത് ചാപങ്ങൾക്ക് പേരു കൊടുക്കാം:



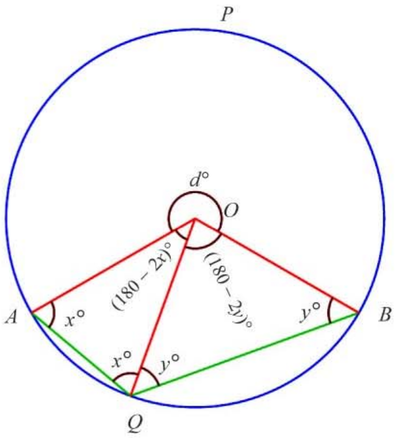

ചിത്രത്തിൽ ചെറിയ ചാപം $AXB$, വലിയ ചാപം $AYB$

അപ്പോൾ ഏതു ചാപത്തേയും, വൃത്തമാക്കി പൂർത്തീകരിക്കുന്ന ഒരു ചാപമുണ്ട്; ഒന്നേ ഉള്ളുതാനും. മറ്റൊരു തരത്തിൽപ്പറഞ്ഞാൽ, എത്ര ചെറിയ വട്ടക്ഷണത്തെയും മുഴുവട്ടമാക്കാം–ഒരേ ഒരു തരത്തിൽ.

ഇനി $APB$ എന്ന ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ $d$ എന്നെടുത്താൽ

$$(180 - 2x) + (180 - 2y) + d = 360$$

എന്നു ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ നിന്നു കാണാം.



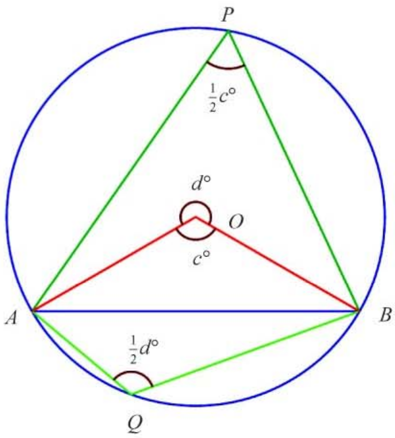

ഇതിൽ നിന്ന്

$$2(x + y) = d$$

എന്നു കിട്ടും, അതായത്

$$\angle AQB = \frac{1}{2} d^\circ$$

ഇക്കണ്ടതെല്ലാം ഒന്നു ചുരുക്കിപ്പറയാം. ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

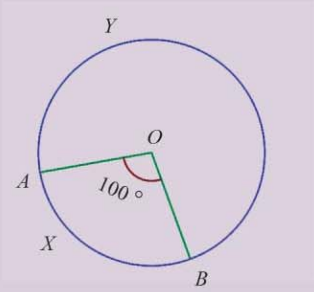



*$P$ എന്ന ബിന്ദു, $AB$ യ്ക്കു മുകളിൽ വൃത്തത്തിൽ എവിടെയെടുത്താലും, $\angle APB = \frac{1}{2} c^\circ$ ആയിരിക്കും.*

*$Q$ എന്ന ബിന്ദു, $AB$ യ്ക്കു താഴെ വൃത്തത്തിൽ എവിടെയെടുത്താലും, $\angle AQB = \frac{1}{2} d^\circ$ ആയിരിക്കും.*

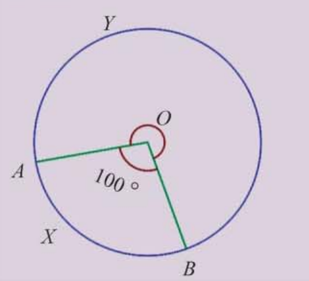
ഇക്കാര്യംതന്നെ $AB$ എന്ന് ഞാൺ ഉപയോഗിക്കാതെ പറയാം: ഒരു വൃത്തത്തിൽ ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെടുത്താലും, അത് വൃത്തത്തെ രണ്ടു ചാപങ്ങളായി ഭാഗിക്കുമല്ലോ:

### കേന്ദ്രകോൺ



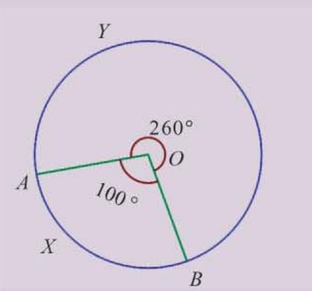

ചിത്രത്തിൽ $AXB$ എന്ന ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ $100^\circ$ ആണ്.

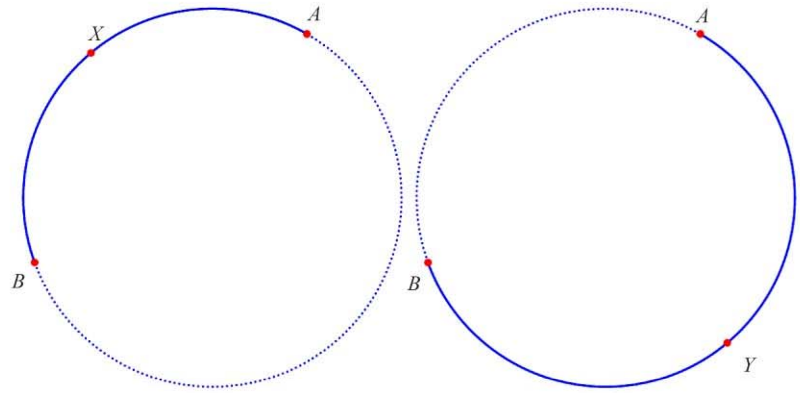
$AYB$ എന്ന ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ എത്രയാണ്?




ഡിഗ്രി എന്ന കോണളവിന്റെ അർത്ഥമനുസരിച്ച്, ഈ വൃത്തത്തെ 360 സമഭാഗങ്ങളാക്കിയതിൽ 100 എണ്ണം ചേർന്നതാണ് $OAXB$ എന്ന ഭാഗം. അപ്പോൾ എത്ര ഭാഗം ചേർന്നതാണ്, മിച്ചമുള്ള $OAYB$ എന്ന ഭാഗം?

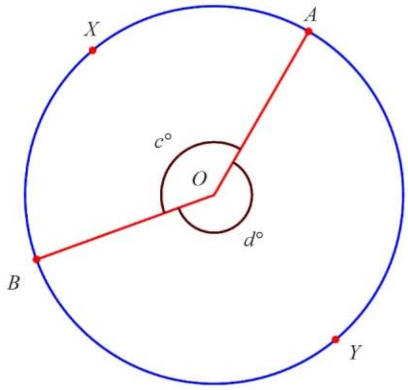
അതായത്, $AYB$ എന്ന ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ $260^\circ$.



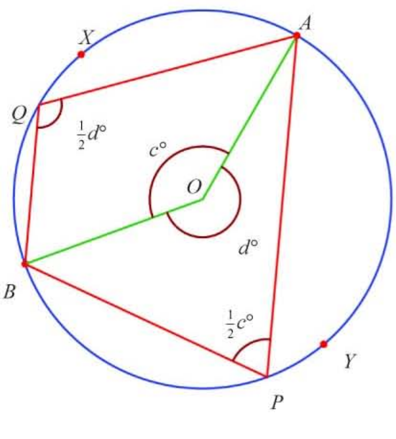



ചിത്രത്തിൽ $A$, $B$ ഇവ വൃത്തത്തെ, $AXB$, $AYB$ എന്ന രണ്ടു ചാപങ്ങളാക്കി ഭാഗിക്കുന്നു. $AXB$ യെ $AYB$ യുടെ മറുചാപമെന്നോ, ശിഷ്ട ചാപമെന്നോ, പൂരകചാപമെന്നോ വിളിക്കാം. (മറിച്ചും)

ഇനി $A$, $B$ ഇവ വൃത്തകേന്ദ്രം $O$ യുമായി യോജിപ്പിച്ചാലോ?

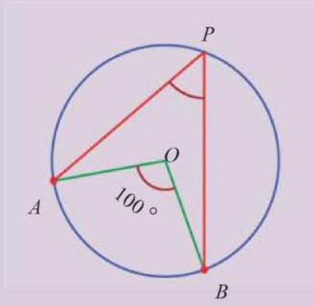



ചിത്രത്തിൽ $c°$ എന്നത്, $AXB$ എന്ന ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണും, $d°$ എന്നത് $AYB$ എന്ന ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണുമാണല്ലോ. ഇനി $AYB$ എന്ന ചാപത്തിൽ $P$ എന്ന ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവും, $AXB$ എന്ന ചാപത്തിൽ $Q$ എന്ന ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവും എടുത്താലോ?



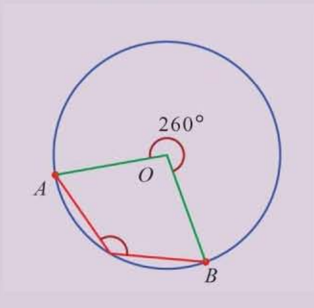

അപ്പോൾ മുമ്പു രണ്ടായിപ്പറഞ്ഞ കാര്യങ്ങൾ ഒന്നിച്ചെഴുതാം:

**കോൺമാറ്റം**




ചിത്രത്തിൽ $\angle APB = 50°$ ആണല്ലോ. മാത്രമല്ല $A$, $B$ ഇവയുണ്ടാക്കുന്ന രണ്ടു ചാപങ്ങളിലെ വലിയ ചാപത്തിൽ എവിടെ $P$ എടുത്താലും ഈ കോൺ $50°$ തന്നെയായിരിക്കും.

ഇനി ഈ ബിന്ദു, വൃത്തത്തിലൂടെ ഇടത്തോട്ടു നീങ്ങുന്നു എന്നു കരുതുക. $A$ യിലെത്തുന്നതുവരെ കോൺ മാറുന്നില്ല. $A$ യിലെത്തുമ്പോൾ, കോൺ തന്നെയില്ല. വീണ്ടും നീങ്ങി, ചെറിയ ചാപത്തിലാകുമ്പോൾ കോൺ മാറും, എത്രയാകും?



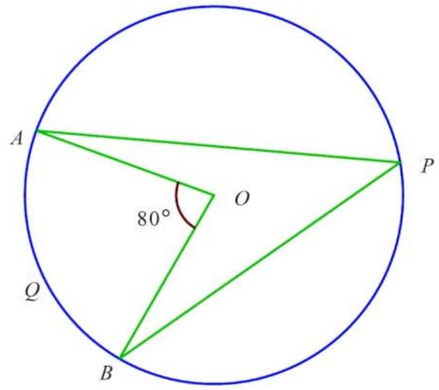

തുടർന്ന് $B$ യിലെത്തും വരെ $130°$ തന്നെ.

*ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ വൃത്തത്തെ രണ്ടു ചാപങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നു. ഈ ബിന്ദുക്കൾ, ഇതിൽ ഒരു ചാപത്തിലെ ഏതെങ്കിലും ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചുകിട്ടുന്ന കോൺ, മറുചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്ര കോണിന്റെ പകുതിയാണ്.*

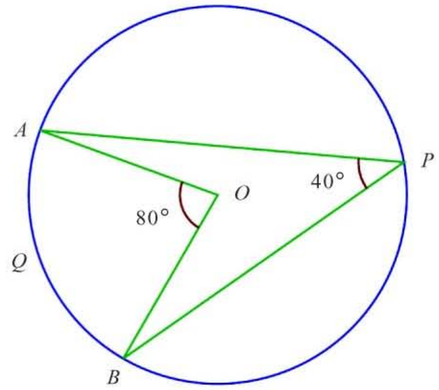
ഇതിൽ, "ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ" എന്നതിനു പകരം "ചാപം കേന്ദ്രത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന കോൺ" എന്നും പറയാം; അതുപോലെ "ചാപത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾ ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന കോൺ" എന്നതിനു പകരം "ചാപം ഒരു ബിന്ദുവിലുണ്ടാക്കുന്ന കോൺ" എന്നും പറയാം. അപ്പോൾ മുകളിലെഴുതിയത് ഇങ്ങനെയാകും:

*വൃത്തത്തിലെ ഒരു ചാപം കേന്ദ്രത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന കോണിന്റെ പകുതിയാണ്, ആ ചാപം അതിന്റെ മറുചാപത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ.*

ഉദാഹരണമായി, ഈ ചിത്രം നോക്കുക:




$AQB$ എന്ന ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ $80°$ ആണല്ലോ. അപ്പോൾ മറുചാപത്തിലെ $P$ എന്ന ബിന്ദുവിലെ $APB$ എന്ന കോൺ, $80°$ യുടെ പകുതിയായ $40°$ ആണ്.

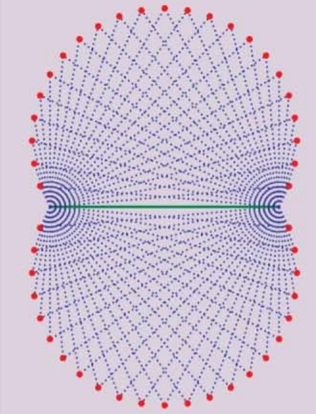



ഈ ചിത്രത്തിൽ നിന്നുതന്നെ $APB$ എന്ന ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്ര കോൺ $360 - 80 = 280°$ എന്നും കാണാം.

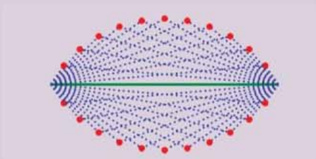
### വൃത്തവിദ്യ

ഒരു വരയുടെ മുകളിലും താഴെയും ഒരേകോണുകൾ വരച്ച്, ചില ചിത്രങ്ങൾ കിട്ടിയില്ലേ?

മുകളിലും താഴെയും $60°$ എടുത്തപ്പോൾ ഇങ്ങനെയല്ലേ കിട്ടിയത്:

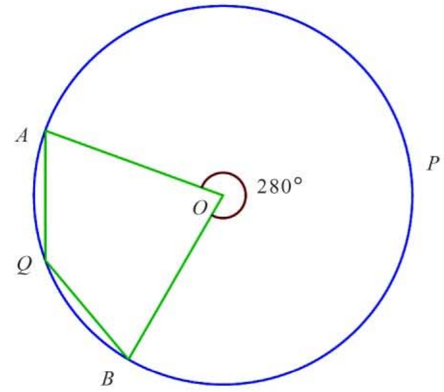


$120°$ എടുത്തപ്പോൾ ഇങ്ങനെയും:



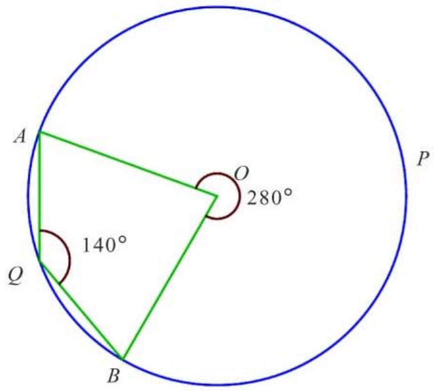
മുകളിൽ $60°$ ഉം, താഴെ $120°$ എടുത്തു നോക്കൂ. ഒരു മുഴുവൻ വൃത്തംതന്നെ കിട്ടിയില്ലേ? എന്തുകൊണ്ടാണിത്?

മുകളിൽ $30°$ കോണുകളാണ് എടുത്തതെങ്കിൽ, മുഴുവൻ വൃത്തമാകാൻ, താഴെ എടുക്കേണ്ട കോൺ എത്രയാണ്?



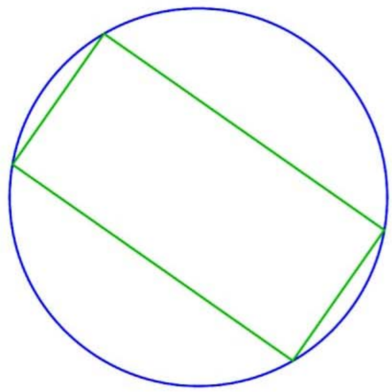

അപ്പോൾ, മറുചാപത്തിലെ $Q$ വിലുണ്ടാകുന്ന

$$\angle AQB = \frac{1}{2} \times 280 = 140°$$




മറ്റു ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കാം.

- ചിത്രത്തിലെ ചതുരത്തിന്റെ നാലു മൂലകളും വൃത്തത്തിലാണ്. ചതുരത്തിന്റെ വികർണം, വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

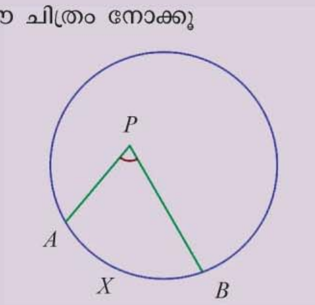


ചതുരത്തിന്റെ ഒരു ജോടി എതിർമൂലകൾ വൃത്തകേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിക്കുക.

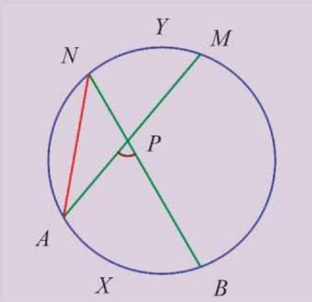
### വൃത്തത്തിനകത്ത്

ഒരു ചാപത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ, വൃത്തത്തിനകത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചുകിട്ടുന്ന കോണിനെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം?

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ




$\angle APB$ കണ്ടുപിടിക്കാൻ, $AP$, $BP$ ഈ വരകളെ നീട്ടി വൃത്തത്തെ ഖണ്ഡിക്കുക. ഈ ബിന്ദുക്കളിലൊന്നുമായി ചാപത്തിന്റെ ഒരറ്റം യോജിപ്പിക്കുക.



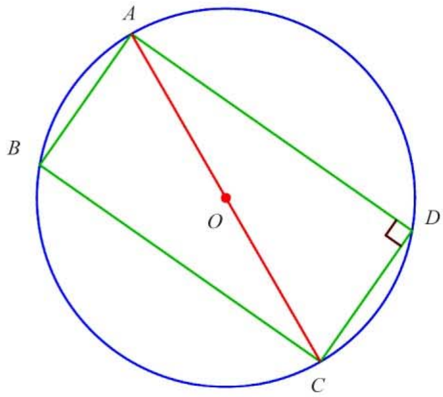

$AXB$ എന്ന ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ $x°$ എന്നും $MYN$ എന്ന ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ $y°$ എന്നുമെടുത്താൽ

$\angle ANB = \frac{1}{2}\, x°$ എന്നും $\angle MAN = \frac{1}{2}\, y°$

എന്നും കാണാമല്ലോ. ഇവ $PAN$എന്ന ത്രികോണത്തിലെ കോണുകളാണ്; $\angle APB$ മൂന്നാം മൂലയിലെ ബാഹ്യകോണും. അപ്പോൾ

$$\angle APB = \frac{1}{2}\,(x + y)°$$

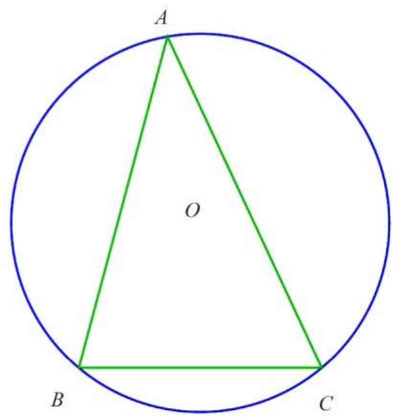
അതായത്, $AXB$, $MYN$ എന്നീ ചാപങ്ങളുടെ കേന്ദ്രകോണുകളുടെ ശരാശരിയാണ്, $\angle APB$.



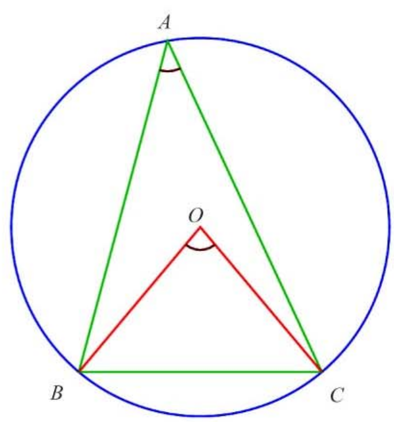

$ABCD$ ചതുരമായതിനാൽ $\angle ADC = 90°$. അപ്പോൾ $ADC$ എന്ന ചാപത്തിന്റെ മറുചാപമായ $ABC$ യുടെ കേന്ദ്രകോൺ $2 \times 90° = 180°$ ആണ്. അതായത്, $\angle AOC = 180°$. ഇതിന്റെ അർത്ഥം, $A, O, C$ ഒരു വരയിലാണെന്നല്ലേ? മറ്റൊരുതരത്തിൽപ്പറഞ്ഞാൽ $AC$ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസമാണ്.

- ആരം 2.5 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ഒരു വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ, കോണുകൾ $40°$, $60°$, $80°$ ആയ ത്രികോണം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ?

വൃത്തത്തിൽ, വെറുതെ ഒരു ത്രികോണം വരച്ചു നോക്കാം.

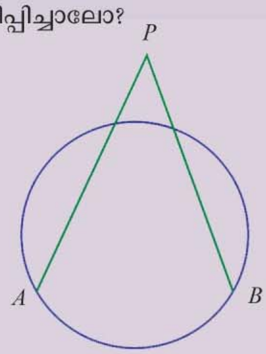



$B$, $C$ ഇവ വൃത്തകേന്ദ്രം $O$ യുമായി യോജിപ്പിക്കുക.

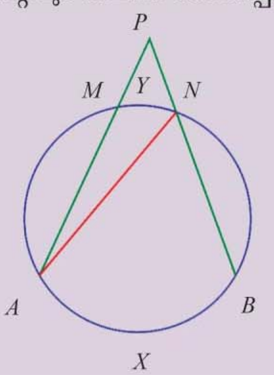



### വൃത്തത്തിനുപുറത്ത്

ഒരു ചാപത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ വൃത്തത്തിനു പുറത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാലോ?




ഈ വരകളിലൊന്ന് വൃത്തത്തിനെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുവും, ചാപത്തിന്റെ മറ്റേ അറ്റവും തമ്മിൽ യോജിപ്പിക്കുക:




പഴയതുപോലെ, $AXB$ എന്ന ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ $x°$ എന്നും $MYN$ എന്ന ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ $y°$ എന്നുമെടുത്താൽ $\angle ANB = \frac{1}{2}\ x°$ എന്നും $\angle MAN = \frac{1}{2}\ y°$ എന്നും കാണാമല്ലോ. ഇവിടെ $\Delta PAN$ ലെ ഒരു ബാഹ്യകോൺ $ANB$ ആണ്. അപ്പോൾ

$$\frac{1}{2}x = \angle APN + \frac{1}{2}\ y$$

എന്നും, അതിൽനിന്ന്

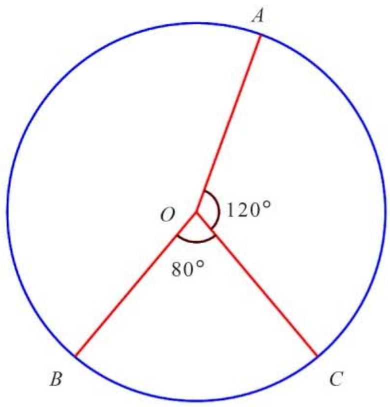
$$\angle APB = \frac{1}{2}\ (x - y)°$$

എന്നു കിട്ടും.

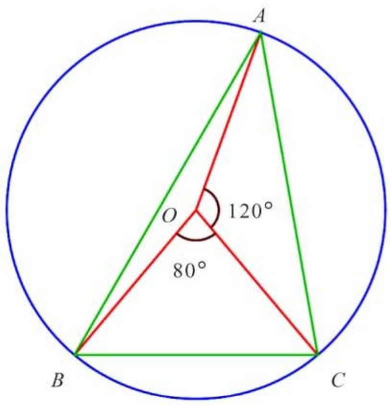
$\angle BAC = 40°$ ആകണമെങ്കിൽ, $\angle BOC$ എത്ര ആയിരിക്കണം?

ഇതുപോലെ മറ്റു മൂലകൾ കേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിച്ചുണ്ടാകുന്ന കോണുകൾ കണ്ടുപിടിച്ചുകൂടേ?

അപ്പോൾ, ആദ്യം ചുവടെക്കാണുന്നതുപോലെ, വൃത്തത്തിൽ $A, B, C$ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

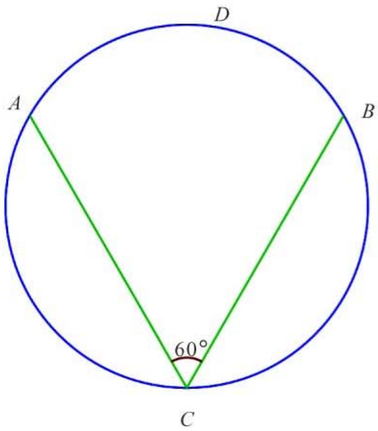



ഇനി $A, B, C$ യോജിപ്പിച്ചാൽ, ഉദ്ദേശിച്ച ത്രികോണമായില്ലേ?



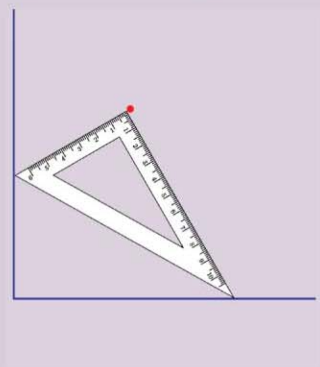

ചുവടെയുള്ള കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ:

- ചിത്രത്തിലെ $ADB$ എന്ന ചാപത്തിന്റെ നീളം, വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ്?

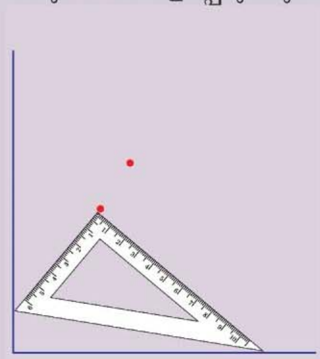



### മറ്റൊരു മട്ടക്കണക്ക്

കടലാസിൽ, പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ടു വരകൾ വരച്ച്, ജ്യാമിതിപ്പെട്ടിയിലെ മട്ടം ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ വയ്ക്കുക.



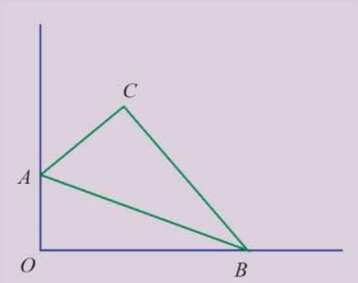
മുകളിലെ മൂലയുടെ സ്ഥാനം അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇനി മൂലകൾ വശങ്ങളിൽ തൊട്ടുകൊണ്ടുതന്നെ മട്ടം അങ്ങോട്ടുമിങ്ങോട്ടും നിരക്കി, ഓരോ സമയത്തും, മുകളിലെ മൂലയുടെ സ്ഥാനവും അടയാളപ്പെടുത്തുക.



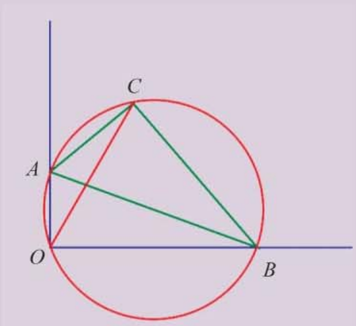
ഈ ബിന്ദുക്കളുടെ കൂട്ടത്തിനെന്തെങ്കിലും സവിശേഷതയുണ്ടോ?

## മട്ടവും, വൃത്തവും, വരയും

മട്ടക്കണക്കിൽ, അടയാളപ്പെടുത്തിയ കുത്തുകളെല്ലാം ഒരേ വരയിലല്ലേ? എന്തുകൊണ്ടാണിത്?



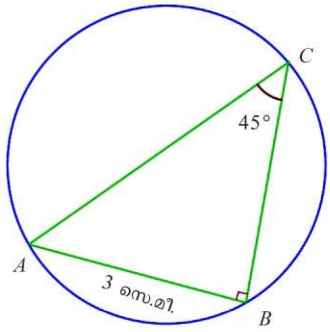

ചിത്രത്തിൽ $ABC$ യാണ് മട്ടം. $\angle ACB$, $\angle AOB$ ഇവ രണ്ടും മട്ടകോണുകളായതിനാൽ, $AB$ വ്യാസമായ വൃത്തം $O$, $C$ എന്നീ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിലൂടെയും കടന്നുപോകും.



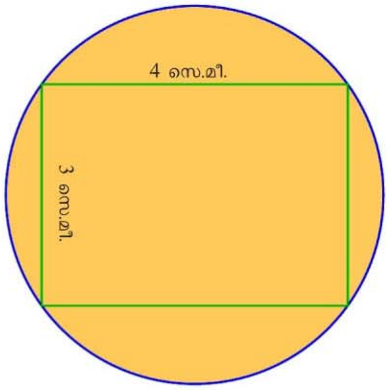

അതിനാൽ $\angle BAC = \angle BOC$. ഇതിൽ $\angle BAC$ നാം ഉപയോഗിക്കുന്ന മട്ടത്തിന്റെ കോണായതിനാൽ അത് മാറുന്നില്ല. ( ഈ ചിത്രത്തിൽ നിന്ന് അത് $60°$ ആണ്)

അപ്പോൾ മട്ടം നിരക്കുമ്പോൾ $C$ യുടെ സ്ഥാനം മാറിയാലും $C$ യും $O$ യും യോജിപ്പിക്കുന്ന വര $OB$ യുമായി ഒരേ ചരിവിലാണ്. മറ്റൊരു വിധത്തിൽപ്പറഞ്ഞാൽ $OB$ യുമായി ഒരു നിശ്ചിത കോൺ ഉണ്ടാക്കുന്ന വരയിൽക്കൂടിയേ $C$ യ്ക്ക് നീങ്ങാൻ കഴിയുള്ളൂ.

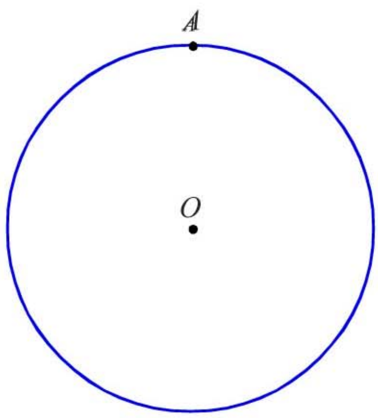
- ചിത്രത്തിലെ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്രയാണ്?



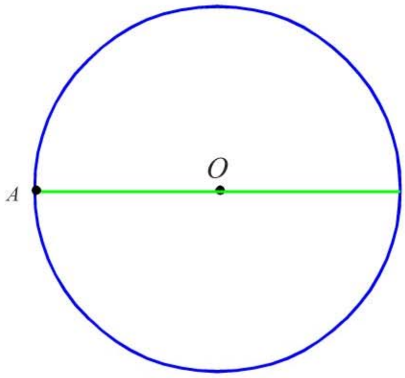

- ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിലെ വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?



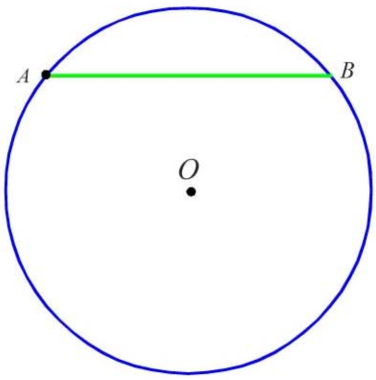

- രണ്ടു കോണുകൾ $40°$, $120°$ ആയ ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കണം. പരിവൃത്തത്തിന്റെ ആരം 3 സെന്റിമീറ്ററായിരിക്കണം. എങ്ങനെ വരയ്ക്കും?
- $22\frac{1}{2}°$ അളവുള്ള ഒരു കോൺ വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെയാണ്?
- ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങളിലോരോന്നിലും, നിബന്ധനകൾ അനുസരിച്ച് $22\frac{1}{2}°$ കോൺ വരയ്ക്കുക.
  - $A$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ



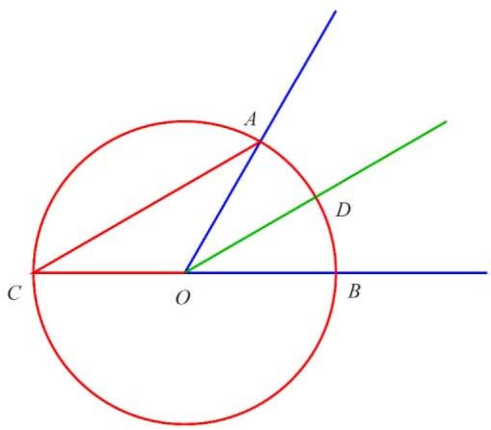
- ഒരു വശം $OA$ ആയി, $A$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ




- ഒരു വശം $AB$ ആയി, $A$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ




- ചിത്രത്തിൽ $O$ വൃത്ത കേന്ദ്രവും. $OD$ എന്ന വര, $AC$ എന്ന വരയ്ക്കു സമാന്തരവുമാണ്.

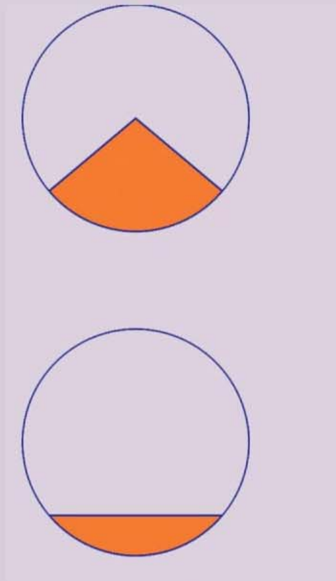



$\angle AOB$ യുടെ സമഭാജിയാണ് $OD$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

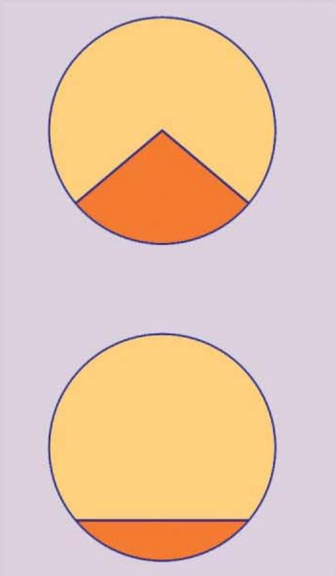
തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു കോണിന്റെ സമഭാജി വരയ്ക്കാൻ ഇത് ഉപയോഗിക്കാൻ കഴിയുമോ? എങ്ങനെ?

**വൃത്താംശവും വൃത്തഖണ്ഡവും**

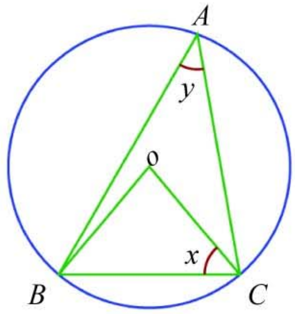
വൃത്തത്തിലെ ഒരു ചാപവും അതിന്റെ അറ്റങ്ങൾ കേന്ദ്രത്തോടു യോജിപ്പിക്കുന്ന വരകളും ചേർന്നതാണ് വൃത്താംശം; ചാപവും, അതിന്റെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന ഓരോ ഞാണും ചേർന്നത് വൃത്തഖണ്ഡം.



വൃത്തത്തിലെ ചാപങ്ങൾ ജോടികളായാണ് ഉണ്ടാകുന്നത് എന്നതിനാൽ, വൃത്താംശങ്ങളും വൃത്തഖണ്ഡങ്ങളും ജോടികളായാണ് പ്രത്യക്ഷപ്പെടുന്നത്.

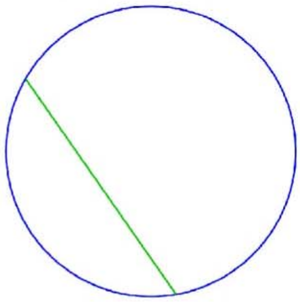


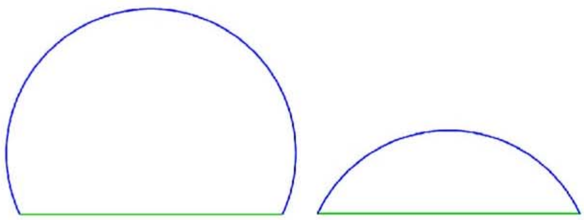
- ചിത്രത്തിൽ $O$ വൃത്തകേന്ദ്രമാണ്. $x + y = 90^\circ$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.




## വൃത്തഖണ്ഡങ്ങൾ

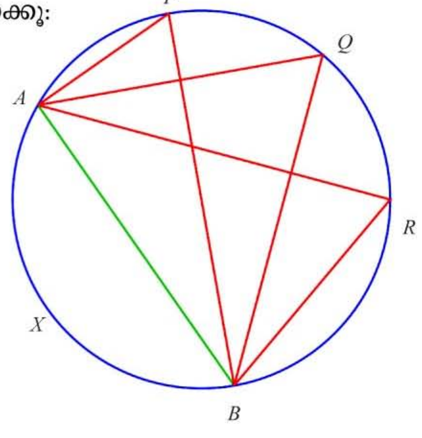
ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഏതു ഞാണും അതിനെ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളാക്കുമല്ലോ.





ഇത്തരം ഭാഗങ്ങളെ വൃത്തഖണ്ഡങ്ങൾ (segments of a circle) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

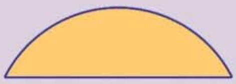


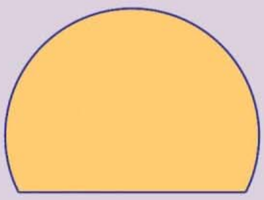

$\angle APB$, $\angle AQB$, $\angle ARB$ ഇവയെല്ലാം $AXB$ എന്ന ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണിന്റെ പകുതിയാണ്. അതിനാൽ ഇവയെല്ലാം തുല്യവുമാണ്.

### ഭാഗങ്ങളുടെ വലിപ്പം

വൃത്തത്തിലെ ചാപത്തിന്റെ നീളം മാറുന്നതനുസരിച്ച്, അതുകൊണ്ടുണ്ടാക്കുന്ന വൃത്താംശത്തിന്റെയും വൃത്തഖണ്ഡത്തിന്റെയും വലിപ്പം മാറും. ചാപത്തിന്റെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കാനുപയോഗിക്കുന്നത്, അതിന്റെ കേന്ദ്രകോണും. (ചാപത്തിന്റെ നീളം അളക്കുന്നതിനേക്കാൾ എളുപ്പം, കേന്ദ്രകോൺ അളക്കുന്നതാണല്ലോ.)

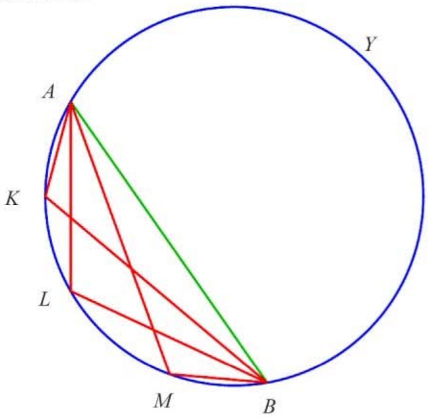
ഒരു വൃത്താംശത്തിൽ, കേന്ദ്രകോൺ പ്രകടമാണ്. വൃത്തഖണ്ഡത്തിലോ?





ആദ്യം കേന്ദ്രം കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടിവരും, അല്ലേ? അതെങ്ങനെയാണെന്ന് കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ (ഒമ്പതാംക്ലാസിലെ **വൃത്തങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിന്റെ **മറ്റൊരു നോട്ടം** എന്ന ഭാഗം)

ഈ ചിത്രത്തിലോ?



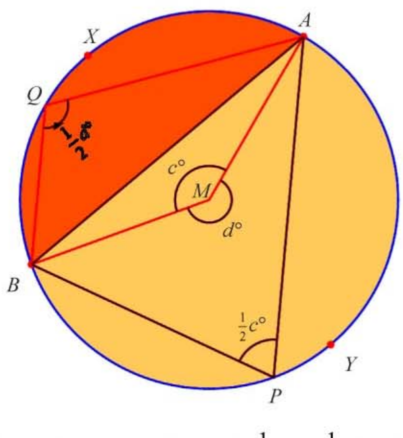

ഇതിൽ $\angle AKB$, $\angle ALB$, $\angle AMB$ ഇവയെല്ലാം $AYB$ എന്ന ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണിന്റെ പകുതിയും, അതിനാൽ തുല്യവുമാണ്.

ഇക്കാര്യം ചുരുക്കി ഇങ്ങനെ പറയാം.

*ഒരു വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണുകൾ തുല്യമാണ്.*

ഒരു കാര്യം കൂടി നോക്കാം. ഏതു വൃത്തഖണ്ഡത്തിനും ഒരു മറുഖണ്ഡമുണ്ട്; അതായത്, ഒരു ഞാൺ വൃത്തത്തെ ഒരു ജോടി വൃത്തഖണ്ഡങ്ങളായാണ് മുറിക്കുന്നത്. അതിൽ ഒരു വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണുകൾ തുല്യമാണെന്ന് കണ്ടു. ഒരു വൃത്തഖണ്ഡത്തിലേയും, അതിന്റെ മറുഖണ്ഡത്തിലേയും കോണുകൾ തമ്മിലെന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?

ഒരു വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണുകളെല്ലാം, ഒരു ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണിന്റെ പകുതിയും, അതിന്റെ മറുഖണ്ഡത്തിലെ കോണുകളെല്ലാം മറുചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണിന്റെ പകുതിയുമാണല്ലോ.



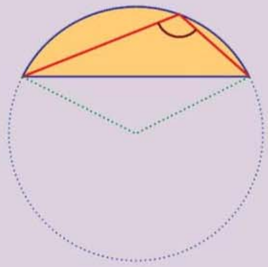

ഇതിൽ $c + d = 360$ ആയതിനാൽ $\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d = 180$ ആകും.

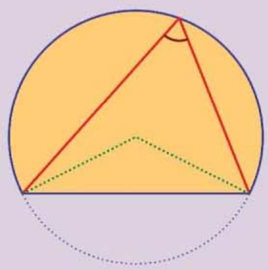
അതായത്,

$$\angle APB + \angle AQB = 180^\circ$$

**വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോൺ**

വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ കണ്ടുപിടിക്കാൻ, വൃത്തകേന്ദ്രം കണ്ടുപിടിക്കാതെ നേരിട്ടൊരു മാർഗമുണ്ടോ? ഒരു വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണുകളെല്ലാം തുല്യമാണെന്നു കണ്ടല്ലോ. ആ കോണിൽ നിന്ന് കേന്ദ്രകോൺ കണ്ടുപിടിയ്ക്കാം:





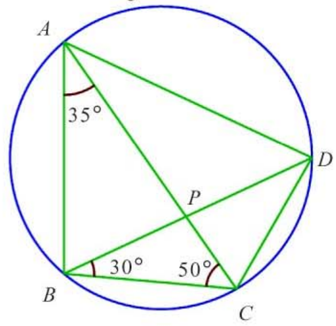
വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോൺ $x^\circ$ എന്നെടുത്താൽ, ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ എന്താണ്?

ഇക്കാര്യം ഇങ്ങനെ ചുരുക്കിപ്പറയാം

*മറുഖണ്ഡങ്ങളിലെ കോണുകൾ അനുപൂരകമാണ്*

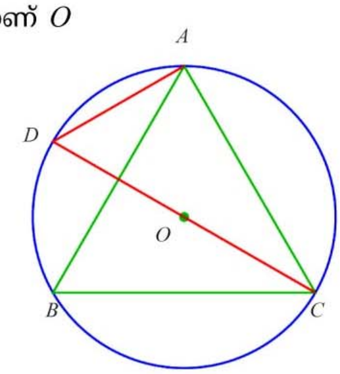
ഈ ആശയങ്ങളുപയോഗിച്ച്, ചുവടെ പറയുന്ന കണക്കുകൾ ചെയ്തു നോക്കൂ:

- ചിത്രത്തിൽ $A$, $B$, $C$, $D$ വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കളാണ്.



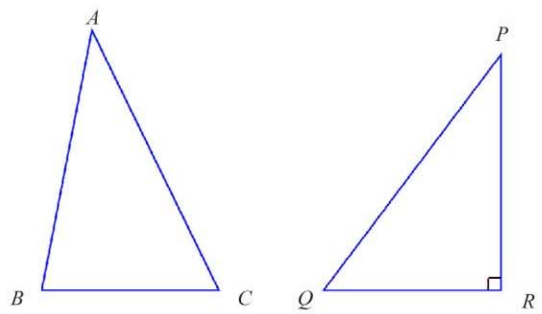

$ABCD$ എന്ന ചതുർഭുജത്തിലെ കോണുകളും, അവയുടെ വികർണങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള കോണുകളും കണ്ടുപിടിക്കുക.

- ചിത്രത്തിൽ $ABC$ ഒരു സമഭുജത്രികോണമാണ്. അതിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രമാണ് $O$




$AD$ യുടെ നീളം വൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിന് തുല്യമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

- ചിത്രത്തിലെ $PQR$ മട്ടത്രികോണമാണ്. $\angle A = \angle P$ യും $BC = QR$ ഉം ആണ്.




$\Delta ABC$ യുടെ പരിവൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം $PQ$ വിന്റെ നീളത്തിനു തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

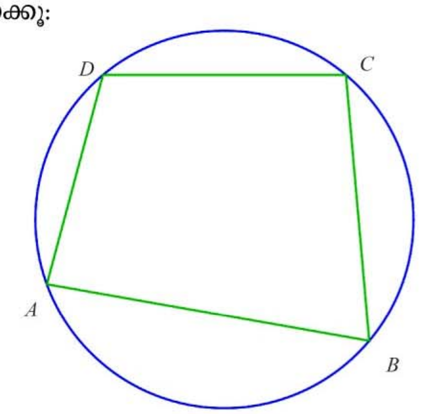
**പരിവൃത്തം**

ഒരു നേർവരയിലല്ലാത്ത ഏതു മൂന്നു ബിന്ദുക്കളെടുത്താലും, അവയിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാമെന്നു കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. (ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ **വൃത്തങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിന്റെ **മൂന്നുബിന്ദുക്കൾ** എന്ന ഭാഗം) മറ്റൊരു വിധത്തിൽപ്പറഞ്ഞാൽ, ഏതു ത്രികോണത്തിനും പരിവൃത്തം വരയ്ക്കാം.

ചതുർഭുജങ്ങളുടെ കാര്യമോ? ചതുരത്തിനും, ചിലതരം ലംബകങ്ങൾക്കുമെല്ലാം പരിവൃത്തമുണ്ട്. എന്നാൽ ചതുരമല്ലാത്ത സാമാന്തരികങ്ങൾക്ക് പരിവൃത്തമില്ല. അതായത്, ചതുർഭുജങ്ങളുടെയിടയിൽ, പരിവൃത്തമുള്ളവയും, ഇല്ലാത്തവയും എന്ന രണ്ടു വിഭാഗവുമുണ്ട്.

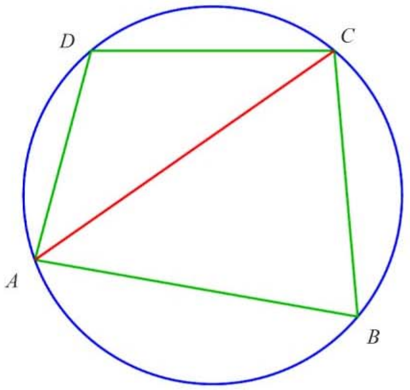
## വൃത്തവും ചതുർഭുജവും

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:




$A, B, C, D$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലെ കോണുകൾ തമ്മിലെന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?

കിട്ടിയില്ലെങ്കിൽ $AC$ യോജിപ്പിച്ചു നോക്കൂ.




ഇപ്പോൾ $B$ യിലെയും $D$ യിലെയും കോണുകൾ. $AC$ എന്ന ഞാൺ വൃത്തത്തെ മുറിച്ചുണ്ടാകുന്ന രണ്ടു വൃത്തഖണ്ഡങ്ങളിലെ കോണുകളാണ്. അതിനാൽ അവ അനുപൂരകവുമാണ്.

ഇതുപോലെ, $BD$ വരച്ചുനോക്കിയാൽ $A$ യിലേയും $C$ യിലേയും കോണുകൾ അനുപൂരകമാണെന്നും കിട്ടും.

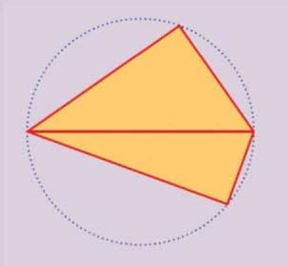
അപ്പോൾ പൊതുവെ എന്തു പറയാം?

*ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂലകളെല്ലാം ഒരു വൃത്തത്തിലാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ എതിർകോണുകൾ അനുപൂരകമാണ്.*

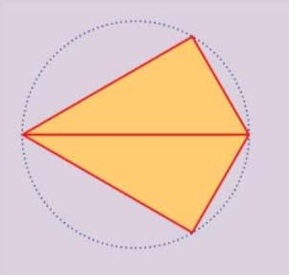
മറിച്ചു പറഞ്ഞാൽ ശരിയാകുമോ? അതായത്, ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർകോണുകൾ അനുപൂരകമാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ നാലു മൂലകളിൽക്കൂടിയും കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമോ? ഇതിനു ഉത്തരം പറയാൻ, ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ നാലു മൂലകളും വൃത്തത്തിലാക്കാൻ പറ്റുമോ എന്നു പ്രായോഗികമായി കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം.

### ചതുർഭുജനിർമാണം

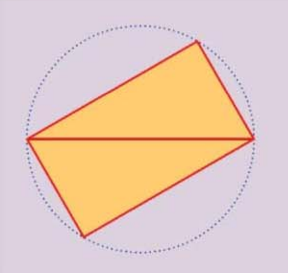
പരിവൃത്തമുള്ള ചിലതരം ചതുർഭുജങ്ങളുണ്ടാക്കാൻ എളുപ്പമാണ്. ഒരേ കർണമുള്ള രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങൾ ചേർത്തു വച്ചാൽ മതി.



ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കുന്ന ത്രികോണങ്ങൾ സർവസമമാണെങ്കിൽ കിട്ടുന്നത്, ഏതുതരം ചതുർഭുജമാണ്?

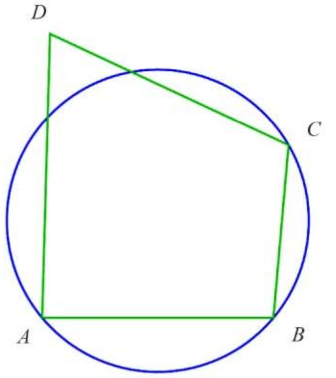


ഇതിൽ താഴത്തെ ത്രികോണം മറിച്ചു വച്ചാലോ?

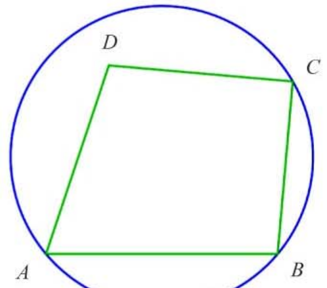


ഇനി മട്ടത്രികോണങ്ങൾക്കു പകരം മറ്റു ത്രികോണങ്ങളുപയോഗിച്ച്, പരിവൃത്തമുള്ള ചതുർഭുജങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാൻ കഴിയുമോ? മുകളിലും താഴേയും വയ്ക്കുന്ന ത്രികോണങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എന്തായിരിക്കണം?

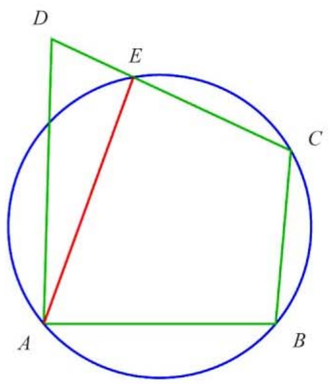
ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂന്നു മൂലകളിൽക്കൂടി ഏതായാലും വൃത്തം വരയ്ക്കാമല്ലോ. (ഒരു വരയിലല്ലാത്ത ഏതു മൂന്നു ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടിയും വൃത്തം വരയ്ക്കാമെന്ന് ഒമ്പതാം ക്ലാസിൽ കണ്ടത് ഓർമയില്ലേ?) ഇനി നാലാമത്തെ മൂല. അത് ഈ വൃത്തത്തിൽത്തന്നെയാണെങ്കിൽ കാര്യം കഴിഞ്ഞു. പക്ഷേ ഈ മൂല ചിലപ്പോൾ വൃത്തത്തിനു പുറത്താകാം.




അല്ലെങ്കിൽ വൃത്തത്തിനകത്താകാം.



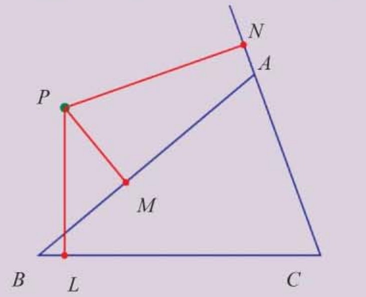

ആദ്യത്തെ ചിത്രം നോക്കാം. വൃത്തം $CD$ യെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുവും $A$ യും യോജിപ്പിച്ചാൽ, വൃത്തത്തിനകത്ത് $ABCE$ എന്ന മറ്റൊരു ചതുർഭുജമായി.



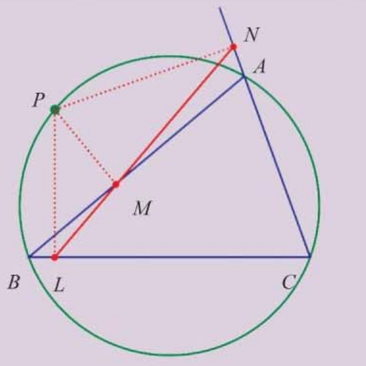

ഇപ്പോൾ $A, B, C, E$ ഇവയെല്ലാം ഒരു വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കളായതിനാൽ,

### വൃത്തവും വരയും

ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദു ഒരു നിശ്ചിത ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തത്തിലാണോ എന്നു കോണുകൾ അളന്നു പരിശോധിക്കാം. മറ്റൊരുമാർഗമുണ്ട്; ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളിലേക്കു ലംബം വരയ്ക്കുക:




ഈ ലംബങ്ങളുടെ ചുവടുകൾ ഒരേ വരയിലാണെങ്കിൽ, $P$ പരിവൃത്തത്തിലാണ്; അല്ലെങ്കിൽ പരിവൃത്തത്തിലല്ല.




സിംസൺ സിദ്ധാന്തം (*Simpson's Theorem*) എന്ന പേരിലാണ് ഈ തത്വം അറിയപ്പെടുന്നത്.

(1) $$\angle B + \angle AEC = 180°$$

ഇനി **മട്ടവും വൃത്തവും** എന്ന ഭാഗത്തിൽ, വൃത്തത്തിനകത്തും പുറത്തുമുള്ള ബിന്ദുക്കളെക്കുറിച്ചുള്ള ചർച്ചയിലേതുപോലെ,

$$\angle AEC = \angle EAD + \angle D$$

എന്നും, അതിനാൽ

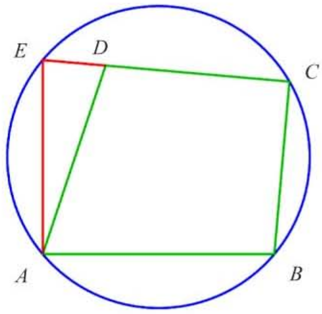
(2) $$\angle D < \angle AEC$$

എന്നും കാണാമല്ലോ. ഇവിടെ (1), (2) എന്ന് അടയാളപ്പെടുത്തിയ ബീജഗണിതവാക്യങ്ങളുടെ അർത്ഥം ആലോചിച്ചാൽ,

$$\angle B + \angle D < 180°$$

എന്നു കാണാൻ വിഷമമില്ല.

ഇനി രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ, $CD$ നീട്ടി, അതു വൃത്തത്തെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുവും $A$ യും യോജിപ്പിക്കാം.




ഇതിൽ

(3) $$\angle B + \angle E = 180°$$

എന്നു കാണാം.

കൂടാതെ $\Delta AED$ യിൽ നിന്ന്

$$\angle ADC = \angle E + \angle EAD$$

എന്നും അതിനാൽ

(4) $$\angle ADC > \angle E$$

എന്നും കാണാം.

(3), (4) എന്നി വാക്യങ്ങളിൽ നിന്ന്

$$\angle B + \angle ADC > 180°$$

എന്നു കാണാമല്ലോ.

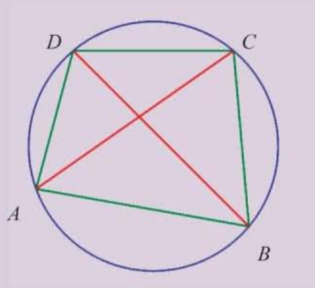
അപ്പോൾ എന്താണ് കണ്ടത്?

*ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂന്നു മൂലകളിൽക്കൂടി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തത്തിനു പുറത്താണ് നാലാമത്തെ മൂലയെങ്കിൽ, ആ മൂലയിലേയും, എതിർമൂലയിലേയും കോണുകളുടെ തുക $180°$ യേക്കാൾ കുറവാണ്; അകത്താണെങ്കിൽ, തുക $180°$ യേക്കാൾ കൂടുതലും.*

### മറ്റൊരു സിദ്ധാന്തം

സിംസൺ സിദ്ധാന്തം, പരിവൃത്തമുള്ള ചതുർഭുജങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള ഒരു തത്വമായും കാണാം. ഇത്തരമൊരു ചതുർഭുജത്തെക്കുറിച്ചുള്ള മറ്റൊരു സിദ്ധാന്തം, അതിന്റെ എതിർവശജോടികളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ തുക, വികർണങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തിനു തുല്യമാണ് എന്നതാണ്. അതായത് $ABCD$ എന്ന ചതുർഭുജത്തിന് പരിവൃത്തമുണ്ടെങ്കിൽ,

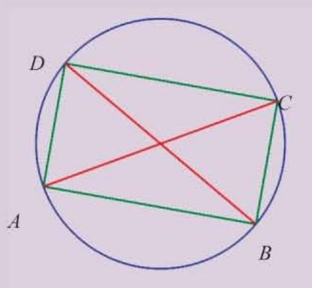
$$(AB \times CD) + (AD \times BC) = AC \times BD$$




മറിച്ച്, ഏതെങ്കിലും ചതുർഭുജത്തിൽ ഇതു ശരിയാണെങ്കിൽ, ആ ചതുർഭുജത്തിന് പരിവൃത്തമുണ്ടായിരിക്കുകയും ചെയ്യും. ടോളമി സിദ്ധാന്തം (*Ptolemy's Theorem*) എന്നാണ് ഇതറിയപ്പെടുന്നത്.

ചതുരം ചക്രീയമാണല്ലോ. ചതുരത്തിൽ എതിർവശങ്ങൾ തുല്യവുമാണ്; വികർണങ്ങളും തുല്യമാണ്. അപ്പോൾ $ABCD$ ചതുരമാണെങ്കിൽ, ഈ സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$




ഇത് പൈഥഗോറസ് സിദ്ധാന്തമല്ലേ?

(നാലാമത്തെ മൂല വൃത്തത്തിൽത്തന്നെയാണെങ്കിൽ, ഈ തുക $180°$ തന്നെയായിരിക്കുമെന്ന് നേരത്തെ കണ്ടല്ലോ.)

ഇനി ഒരു ചതുർഭുജം $ABCD$ യിൽ $\angle B + \angle D = 180°$ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. $A, B, C$ ഇവയിൽക്കൂടിയുള്ള വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

$D$ വൃത്തത്തിനു പുറത്താകുമോ? പുറത്താകണമെങ്കിൽ, $\angle B, \angle D$ ഇവയുടെ തുക $180°$ യേക്കാൾ കുറവാകണമല്ലോ. അപ്പോൾ വൃത്തത്തിനു പുറത്തല്ല.

$D$ അകത്താണോ? അകത്താകണമെങ്കിൽ $\angle B, \angle D$ ഇവയുടെ തുക $180°$ യേക്കാൾ കൂടുതലാകണമല്ലോ. അപ്പോൾ വൃത്തത്തിനു അകത്തുമല്ല.

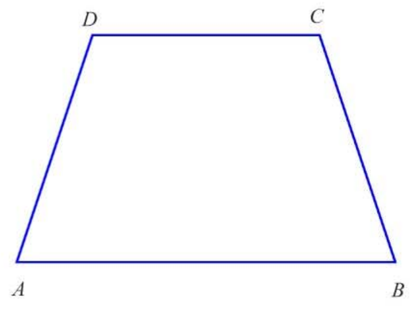
പുറത്തും അകത്തുമല്ലാത്തതുകൊണ്ട്, $D$ വൃത്തത്തിൽത്തന്നെയാണ്.

അതായത്,

*ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർകോണുകൾ അനുപൂരകമാണെങ്കിൽ അതിന്റെ നാലു മൂലകളിൽക്കൂടിയും കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കാം.*

നാലുമൂലകളിൽക്കൂടിയും കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുന്ന ചതുർഭുജം എന്നതിനെ ചുരുക്കി ചക്രീയചതുർഭുജം (cyclic quadrilateral) എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഇപ്പോൾ കണ്ടതനുസരിച്ച്, എതിർകോണുകൾ അനുപൂരകമായ ചതുർഭുജങ്ങളാണ് ചക്രീയ ചതുർഭുജങ്ങൾ.

ചതുരങ്ങളെല്ലാം ചക്രീയ ചതുർഭുജങ്ങളാണല്ലോ. സമപാർശ്വലംബകങ്ങളും ചക്രീയചതുർഭുജങ്ങൾതന്നെ. ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:




$ABCD$ ഒരു സമപാർശ്വലംബകമാണ്. അപ്പോൾ

$$\angle A = \angle B$$

(ഒമ്പതാംക്ലാസിലെ **ചതുർഭുജങ്ങളുടെ നിർമിതി** എന്ന പാഠത്തിലെ **സമപാർശ്വലംബകങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം ഓർക്കുക.) മാത്രമല്ല,

### പരപ്പളവ്

ഭാരതീയ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായ ബ്രഹ്മഗുപ്തൻ, ചക്രീയ ചതുർഭുജങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാനൊരു മാർഗം കണ്ടുപിടിച്ചിട്ടുണ്ട്: ഒരു ചക്രീയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം $a, b, c, d$ എന്നും $s = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$ എന്നും എടുത്താൽ, പരപ്പളവ്

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

ഇതുപോലൊരു വാചകം മുമ്പു കണ്ടിട്ടുണ്ടോ? ഇതിൽ $d = 0$ എന്നെടുത്താൽ

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)s}$$

എന്നാകുമല്ലോ. ഇതല്ലേ, ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവു കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ഹെറോണിന്റെ രീതി?

ചക്രീയമല്ലാത്ത ചതുർഭുജങ്ങളുടെയും പരപ്പളവ്, വശങ്ങളുടെയും കോണുകളുടെയും അടിസ്ഥാനത്തിൽ കണക്കുകൂട്ടാനുള്ള മാർഗങ്ങൾ ബ്രഹ്മഗുപ്തൻ പറയുന്നുണ്ട്. ഇതുപയോഗിച്ചാൽ മറ്റൊരു പ്രധാന വസ്തുത കിട്ടും:

*വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങളെല്ലാം ഒരേപോലെ വരുന്ന വ്യത്യസ്ത ചതുർഭുജങ്ങളിൽ ഏറ്റവും കൂടുതൽ പരപ്പളവ് ചക്രീയ ചതുർഭുജങ്ങൾക്കാണ്.*

$AB$ യും $CD$ യും സമാന്തരമായതിനാൽ

$$\angle A + \angle D = 180^\circ$$

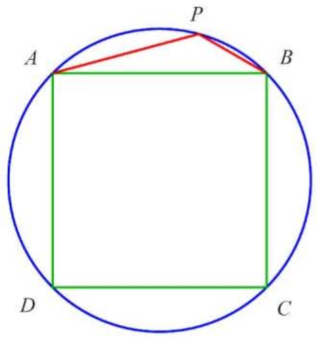
ഈ രണ്ടു സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്ന്

$$\angle B + \angle D = 180^\circ$$

എന്നു കാണാമല്ലോ. അതായത്, $ABCD$ ചക്രീയചതുർഭുജമാണ്.

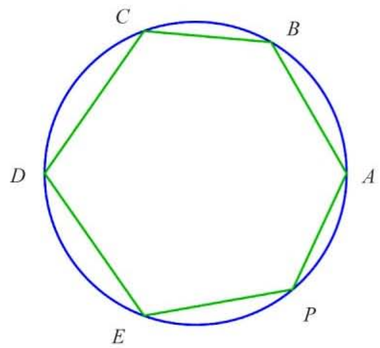
ഇനി ഈ കണക്കുകൾ സ്വയം ചെയ്തുനോക്കൂ:

- ഒരു ചക്രീയചതുർഭുജത്തിലെ ഏതു മൂലയിലേയും ബാഹ്യകോൺ, എതിർമൂലയിലെ ആന്തരകോണിനു തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.
- ചതുരമല്ലാത്ത സാമാന്തരികങ്ങളൊന്നും ചക്രീയമല്ലെന്നു തെളിയിക്കുക.
- സമപാർശ്വമല്ലാത്ത ലംബകങ്ങളൊന്നും ചക്രീയമല്ലെന്നു തെളിയിക്കുക.
- ചിത്രത്തിൽ, $ABCD$ ഒരു സമചതുരമാണ്.



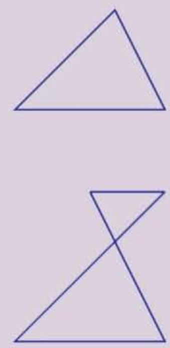

$\angle APB$ എത്രയാണ്?

- ചിത്രത്തിലെ $ABCDEF$ എന്ന ചക്രീയഷഡ്ഭുജത്തിൽ $\angle A + \angle C + \angle E = \angle B + \angle D + \angle F$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

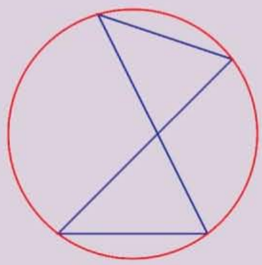



### സദൃശത്രികോണങ്ങൾ

ഒരു ത്രികോണത്തിന് സദൃശമായ മറ്റൊരു ത്രികോണം വരയ്ക്കാൻ കുറേ മാർഗങ്ങൾ അറിയാമല്ലോ. ഇങ്ങനെയും ഒരു മാർഗം കണ്ടിട്ടുണ്ട്.



ചുവടെയുള്ള വശത്തിന് സമാന്തര വര വരയ്ക്കുന്നതിനുപകരം, അതിന്റെ അറ്റങ്ങളിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരച്ചു നോക്കൂ:

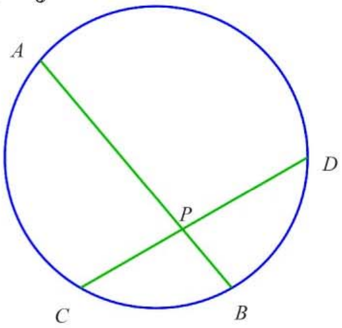


ഇപ്പോൾ മുകളിൽകിട്ടിയ ത്രികോണം, ആദ്യം ചുവട്ടിൽ വരച്ച ത്രികോണത്തിന് സദൃശമാണോ?

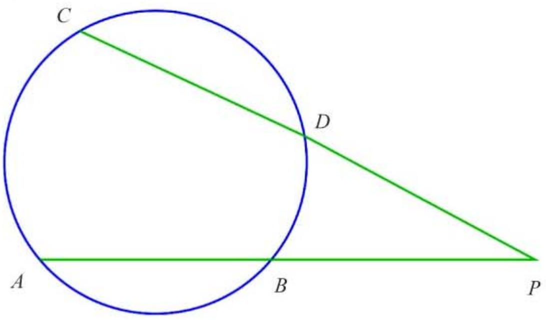
## ചാപഖണ്ഡനം

ഒരു വൃത്തത്തിലെ സമാന്തരമല്ലാത്ത രണ്ടു ഞാണുകൾ എടുക്കുക. അവ ഒരു ബിന്ദുവിൽ ഖണ്ഡിക്കുമല്ലോ.

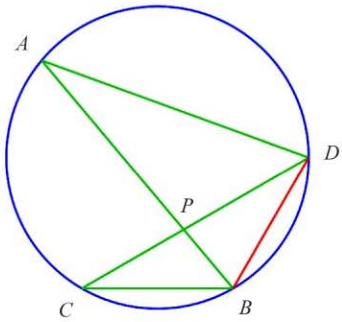
ഖണ്ഡിക്കുന്നത്, വൃത്തത്തിനകത്താകാം.

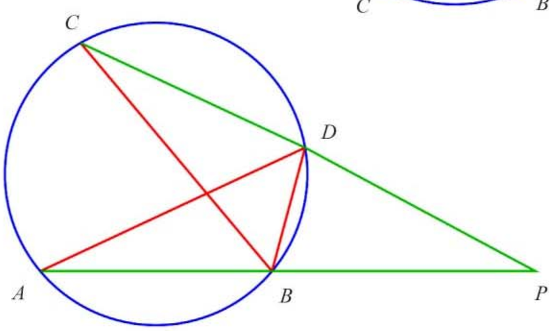



പുറത്തുമാകാം.




എങ്ങനെയായാലും $AD$, $BC$ ഇവ യോജിപ്പിച്ചു കിട്ടുന്ന ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശമാണെന്നു തെളിയിക്കാം.



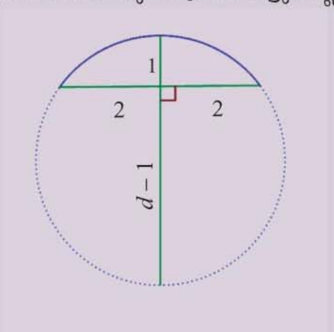




രണ്ടു ചിത്രങ്ങളിലും, $\Delta APD$, $\Delta BPC$ ഇവയിലെ $A$ യിലേയും $C$ യിലേയും, കോണുകൾ നോക്കൂ. ഇവ $BD$ എന്ന ഞാൺ

### പഴയ കണക്ക്, പുതിയ രീതി

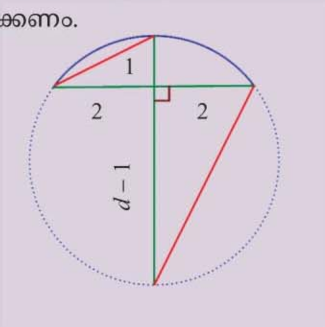
ഒരു വളക്കഷണത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം 4 സെന്റിമീറ്ററും, ഏറ്റവും കൂടിയ ഉയരം 1 സെന്റിമീറ്ററും ആണ്. വളയുടെ ആരം കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

ഈ പ്രശ്നം, ഒമ്പതാം ക്ലാസിൽ ചെയ്തതോർമയുണ്ടോ? ഇപ്പോൾ അത് കുറേക്കൂടി എളുപ്പം ചെയ്യാം. വള മുഴുവനാക്കിയത് സങ്കൽപിച്ചാൽ ഇങ്ങനെയൊരു ചിത്രം കിട്ടുമല്ലോ.




ഇതിൽ $d$ എന്നത്, വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസമാണ്.

ചിത്രത്തിൽ, ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കണം.




ഇവ സദൃശമായതിനാൽ (കാരണം?)

$$\frac{d-1}{2}=\frac{2}{1}$$

അതായത്, $d-1=4$, അഥവാ $d=5$

വൃത്തത്തെ ഭാഗിക്കുന്ന രണ്ടു വൃത്തഖണ്ഡങ്ങളിൽ വലുതിലെ കോണുകളാണ്; അതിനാൽ അവ തുല്യവുമാണ്.

ആദ്യത്തെ ചിത്രത്തിൽ, $P$ യിലെ കോണുകൾ $\angle APD$, $\angle BPC$ ഇവ $AB$, $CD$ ഇവ ഖണ്ഡിച്ച് ഉണ്ടായ എതിർകോണുകളാണ്; അതിനാൽ തുല്യവും. രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ, ഇവ ഒരേ കോണിന്റെ രണ്ടു പേരുകളാണ്.

അങ്ങനെ ഏതു ചിത്രമായാലും, $\Delta APD$, $\Delta BPC$ ഇവയിൽ, രണ്ടു ജോടി കോണുകൾ തുല്യമാണ്. അപ്പോൾ മൂന്നാമത്തെ ജോടിയും തുല്യമാണ്. അതായത്, ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശമാണ്.

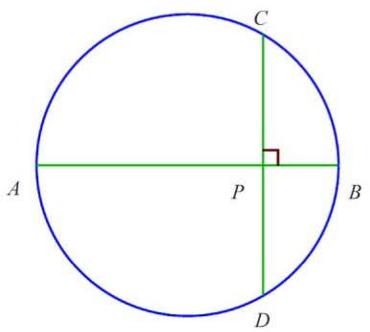
ഇനി സദൃശത്രികോണങ്ങളിൽ, തുല്യമായ കോൺജോടികൾക്ക് എതിരെയുള്ള വശങ്ങൾ ഒരേ അംശബന്ധത്തിലായതിനാൽ, ആദ്യത്തെ ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്

$$\frac{AP}{CP} = \frac{PD}{PB}$$

എന്നു കിട്ടും. രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ നിന്നും ഇതുതന്നെ കിട്ടുമല്ലോ (നോക്കിയോ?). ഈ സമവാക്യത്തിൽ നിന്ന്

$$AP \times PB = CP \times PD$$

ഇതിന്റെ തന്നെ ഒരു സവിശേഷ സന്ദർഭം നോക്കാം. $AB$ വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു വ്യാസവും, $CD$ അതിനു ലംബമായ ഒരു ഞാണും.




വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നുള്ള ലംബം ഞാണിനെ സമഭാഗം ചെയ്യുമെന്നതിനാൽ, ഇവിടെ $CP = PD$ ആണ്. അപ്പോൾ നേരത്തെ കണ്ട ബന്ധം എങ്ങനെയാകും.

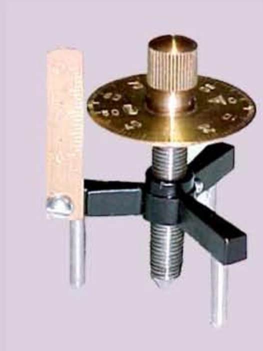
$$AP \times PB = CP^2$$

ഏതു പരപ്പളവിലും സമചതുരം വരയ്ക്കാൻ ഇതുപയോഗിക്കാം. (ഇതിന് ഒരു മാർഗം, ഒമ്പതാംക്ലാസിലെ **അഭിന്നകസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ബീജഗണിതവും പൈഥഗോറസും** എന്ന ഭാഗത്തു കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ)

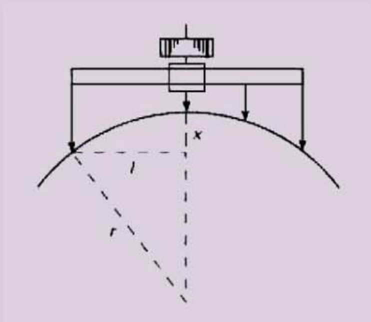
ഉദാഹരണമായി, 12 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള ഒരു സമചതുരം നിർമിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം: നമുക്കു വേണ്ടത്, നീളത്തിന്റെ വർഗം 12 ആയ ഒരു വരയാണ്. മുകളിലത്തെ

### ഉപകരണക്കണക്ക്

കാചങ്ങളും മറ്റും ഗോളങ്ങളിൽനിന്നു മുറിച്ച് ഉണ്ടാക്കുന്നവയാണ്. ഒരു കാചം ഉണ്ടാക്കാനുപയോഗിച്ച ഗോളത്തിന്റെ ആരം കണ്ടുപിടിക്കേണ്ട ആവശ്യം പലപ്പോഴുമുണ്ടാകും. ഇതിനു സഹായിക്കുന്ന ഒരു ഉപകരണമാണ് ഗോളമാപിനി (*spherometer*)

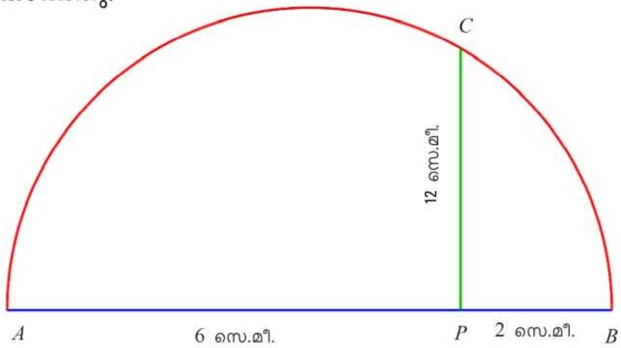


ഇതിന്റെ മൂന്നു കാലുകൾ ഗോളഭാഗത്തിനു മുകളിൽ നടുക്കായി വച്ച്, ഒരു ചാപത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം അളക്കാം. മുകളിലെ തിരിയാണി ഉപയോഗിച്ച്, പരമാവധി ഉയരവും കണ്ടുപിടിക്കാം.




ഇതിൽ നിന്ന് നമ്മുടെ വളക്കണക്കിലേതുപോലെ ഗോളത്തിന്റെ ആരം കണ്ടുപിടിക്കാം.

സമവാക്യത്തിൽ, ഒരു നീളത്തിന്റെ വർഗത്തിനെ മറ്റു രണ്ടു നീളങ്ങളുടെ ഗുണനമായിട്ടാണ് എഴുതിയിരിക്കുന്നത്. അപ്പോൾ നമുക്കു വേണ്ട വർഗമായ 12 നെ രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ഗുണനമായി ആദ്യം എഴുതാം. $12 = 6 \times 2$ ആണല്ലോ. അപ്പോൾ മുകളിലെ ചിത്രത്തിൽ, $AP = 6$, $PB = 2$ എന്നെടുത്താൽ, $CP^2 = 12$ എന്നു കിട്ടും. ആദ്യം 8 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ $AB$ വരച്ച്, അതിൽ $A$ യിൽ നിന്ന് 6 സെന്റിമീറ്റർ അകലെ $P$ അടയാളപ്പെടുത്താം. എന്നിട്ട് $AB$ വ്യാസമായ ഒരു അർധവൃത്തം വരയ്ക്കണം. ഇനി $P$ യിൽക്കൂടി $AB$ യ്ക്കു ലംബം വരച്ച്, അർധവൃത്തത്തെ ഖണ്ഡിച്ചാൽ കാര്യങ്ങൾ മിക്കവാറും കഴിഞ്ഞു.




ഇനി $CP$ ഒരു വശമായി സമചതുരം വരച്ചാൽ മതിയല്ലോ. (ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ **രേഖീയസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **വർഗമൂലം** എന്ന ഭാഗം ഓർമയുണ്ടോ?)

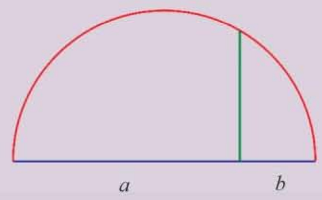
ഇതേ സമചതുരം തന്നെ മറ്റേതെല്ലാം രീതിയിൽ വരയ്ക്കാം?

ചുവടെയുള്ള കണക്കുകളും നിങ്ങൾക്ക്:

- വശങ്ങളുടെ നീളം 4 സെന്റിമീറ്ററും, 5 സെന്റിമീറ്ററും ആയ ചതുരം വരയ്ക്കുക. അതേ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കുക.
- വശങ്ങളുടെ നീളം 4, 5, 6 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. അതേ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കുക.
- വശങ്ങളുടെ നീളം 2, 3, 4, 6 സെന്റിമീറ്ററും ഒരു വികർണം 5 സെന്റിമീറ്ററും ആയ ചതുർഭുജം വരയ്ക്കുക. അതേ പരപ്പളവുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കുക.
- ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ ചിത്രം കിട്ടിയാൽ, നീളമൊന്നും അളക്കാതെ, അതേ പരപ്പളവുള്ള ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ?

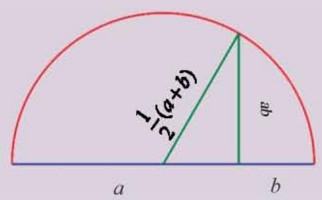
### ജ്യാമിതി, ബീജഗണിതം, സംഖ്യകൾ

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:




ലംബത്തിന്റെ ഉയരം എത്രയാണ്? അത് $x$ എന്നെടുത്താൽ $ab = x^2$ എന്നും, അങ്ങനെ $x = \sqrt{ab}$ എന്നു കാണാം.

ഈ അർധവൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്രയാണ്? വ്യാസം $a + b$ ആയതിനാൽ, ആരം $\frac{1}{2}(a+b)$




ചിത്രത്തിൽ, ആരം ലംബത്തെക്കാൾ വലുതാണല്ലോ. ഇവ തുല്യമാകുന്ന സന്ദർഭമുണ്ടോ?

അപ്പോൾ എന്തു കിട്ടി?

വ്യത്യസ്തമായ ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകൾ $a$, $b$ എടുത്താലും

$$\frac{1}{2}(a+b) > \sqrt{ab}$$

# 3 രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങൾ

## പുതിയ സമവാക്യങ്ങൾ

ഒരു ചോദ്യത്തിൽ നിന്നു തുടങ്ങാം:

- ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം 5 സെന്റിമീറ്റർ വീതം കൂട്ടിയപ്പോൾ, ചുറ്റളവ് 36 സെന്റിമീറ്ററായി. ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളമെന്തായിരുന്നു?

ഇത്തരം ചോദ്യങ്ങൾ ധാരാളം കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതെങ്ങനെയാണ്?

പുതിയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം, $36 \div 4 = 9$ സെന്റിമീറ്റർ; അപ്പോൾ പഴയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം $9 - 5 = 4$ എന്നു ചിന്തിച്ച് ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കാം.

ചതുരവും ചുറ്റളവുമെല്ലാം മറന്ന്, സംഖ്യകളുടെ മാത്രം അടിസ്ഥാനത്തിൽ ചിന്തിച്ച്, ചോദ്യം ഇങ്ങനെയാക്കാം:

- ഒരു സംഖ്യയോട് 5 കൂട്ടിയതിന്റെ 4 മടങ്ങ് 36 ആണ്. സംഖ്യ എന്താണ്?

വിപരീത ദിശയിൽ, വിപരീതക്രിയകളിലൂടെ, സംഖ്യയോട് 5 കൂട്ടിയത് $36 \div 4 = 9$, അപ്പോൾ സംഖ്യ $9 - 5 = 4$ എന്ന് ഉത്തരവും കിട്ടും.

അൽപംകൂടി കടന്ന്, ബീജഗണിതഭാഷയിൽ, സംഖ്യ $x$ എന്നെടുത്ത്, ചോദ്യം ഇങ്ങനെയാക്കാം:

$4(x + 5) = 36$ ആകുന്ന $x$ എന്താണ്?

ഇതിൽ നിന്ന്

$$x + 5 = \frac{36}{4} = 9$$

എന്നും, തുടർന്ന്

$$x = 9 - 5 = 4$$

എന്ന് ഉത്തരവും കണ്ടെത്താം.

### അളവുകളും സമവാക്യങ്ങളും

അളവുകളെ സൂചിപ്പിക്കാനാണ് സംഖ്യകൾ പ്രധാനമായും ഉപയോഗിക്കുന്നത്. മാറുന്ന അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള മാറാത്ത ബന്ധങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കാൻ ബീജഗണിതവാക്യങ്ങളും ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, സമചതുരങ്ങളുടെ വശത്തിന്റെ നീളവും, ചുറ്റളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തെ.

$$p = 4s$$

എന്നെഴുതാം. വശത്തിന്റെ നീളം എന്തു തന്നെ ആയാലും ചുറ്റളവ് അതിന്റെ നാല് മടങ്ങാണ് എന്നതാണല്ലോ മാറാത്ത ബന്ധം.

ഭൂമിയിൽ നിന്നു $u$ മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന വേഗത്തിൽ മേലോട്ടെറിയുന്ന വസ്തുവിന്റെ, $t$ സെക്കന്റു കഴിഞ്ഞുള്ള വേഗം,

$$v = u - 9.8t$$

എന്നെഴുതാം.

ചില അളവുകൾ അറിയാമെങ്കിൽ, മറ്റളവുകൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ ഈ സമവാക്യങ്ങളുപയോഗിക്കാം, ഉദാഹരണമായി, 20 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന വേഗത്തിൽ മുകളിലോട്ടെറിയുന്ന വസ്തുവിന്റെ വേഗം എപ്പോഴാണ് 10 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് ആകുന്നതെന്നറിയാൻ

$$20 - 9.8t = 10$$

എന്ന സമവാക്യം ശരിയാകുന്നവിധം $t$ എന്ന സംഖ്യ കണ്ടുപിടിച്ചാൽ മതി.

ചോദ്യം അൽപം മാറ്റിയാലോ?

- ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം 5 സെന്റിമീറ്റർ വീതം കൂട്ടിയപ്പോൾ, പരപ്പളവ് 36 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററായി. ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളമെന്തായിരുന്നു?

പുതിയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?

എങ്ങനെയാണ് 6 സെന്റിമീറ്റർ എന്നു കിട്ടിയത്?

അപ്പോൾ, ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശം $6 - 5 = 1$ സെന്റിമീറ്റർ.

സംഖ്യകൾ മാത്രമാക്കി ചോദ്യത്തെ മാറ്റിയാലോ?

- ഒരു സംഖ്യയോട് 5 കൂട്ടിയതിന്റെ വർഗം 36 ആണ്. സംഖ്യ എന്താണ്?

വർഗത്തിൽ നിന്ന് സംഖ്യ തിരിച്ചുകിട്ടാൻ, വർഗമൂലം കണ്ടാൽ മതിയല്ലോ. (മറ്റൊരു രീതിയിൽപ്പറഞ്ഞാൽ, വർഗമെടുക്കുക എന്നതിന്റെ വിപരീതക്രിയയാണ്, വർഗമൂലമെടുക്കുക എന്നത്.)

അപ്പോൾ സംഖ്യയോട് 5 കൂട്ടിയത്, $\sqrt{36} = 6$;

സംഖ്യ $6 - 5 = 1$

ഇനി ചോദ്യം ബീജഗണിതത്തിലാക്കിയാലോ?

$(x + 5)^2 = 36$ ആകുന്ന $x$ എന്താണ്?

ഉത്തരമോ?

$$x + 5 = \sqrt{36} = 6$$

$$x = 6 - 5 = 1$$

മറ്റൊരു ചോദ്യം:

- ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ പൊതുവ്യത്യാസം 5 ആണ്. രണ്ടാമത്തെ പദത്തിന്റെ വർഗം 36 ആണ്. ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ പദം എന്താണ്?

കഴിഞ്ഞ ചോദ്യത്തിലേതുപോലെ ചിന്തിച്ചാൽ, രണ്ടാമത്തെ പദം, 6 ആണ്. അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ പദം 1 എന്നു കിട്ടും.

അതായത്, ശ്രേണി 1, 6, 11, ...

ഈ കണക്കിൽപ്പറഞ്ഞ ഗുണങ്ങളുള്ള മറ്റേതെങ്കിലും സമാന്തര ശ്രേണിയുണ്ടോ? $-11, -6, -1, \ldots$ ആയാലോ?

ഈ ഉത്തരം കാണാതെ പോയതെന്തുകൊണ്ട്? രണ്ടാമത്തെ പദത്തിന്റെ വർഗം 36, അപ്പോൾ രണ്ടാംപദം 6 എന്നു ചിന്തിച്ചപ്പോൾ, $-6$ ന്റെ വർഗവും 36 ആണ് എന്നത് മറന്നുപോയി, അല്ലേ?

### പലതരം സമവാക്യങ്ങൾ

ഒരു അളവു മാത്രം ഉൾപ്പെടുന്ന ചില സന്ദർഭങ്ങളും, അവയിൽ നിന്നുണ്ടാകുന്ന സമവാക്യങ്ങളും എട്ടാം ക്ലാസിൽ പരിചയപ്പെട്ടല്ലോ. ഇവയെല്ലാംതന്നെ, ലഘൂകരണങ്ങളെല്ലാം കഴിഞ്ഞാൽ, $2x = 3$ എന്ന രൂപത്തിലോ, $\frac{1}{2}x = -7$ എന്ന രൂപത്തിലോ ഒക്കെ ആയിരുന്നു. പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, $ax = b$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള സമവാക്യങ്ങൾ മാത്രമാണ് അവിടെ കണ്ടത്.

എന്നാൽ പല സന്ദർഭങ്ങളിലും, അളവുകളുടെ വർഗങ്ങളും കൂടി ഉൾപ്പെട്ട പ്രശ്നങ്ങളുണ്ടാകും. ഉദാഹരണമായി,

ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം മറ്റേ വശത്തേക്കാൾ 2 സെന്റിമീറ്റർ കൂടുതലായ, 323 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാണ് എന്ന പ്രശ്നം നോക്കുക.

ഈ പ്രശ്നത്തിന് ഉത്തരം കിട്ടാൻ

$$x(x+2) = 323$$

അഥവാ

$$x^2 + 2x = 323$$

എന്ന സമവാക്യം ശരിയാകുന്ന വിധത്തിൽ $x$ എന്ന സംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കണം.

അപ്പോൾ, ശരിയായ ചിന്ത എങ്ങനെയാണ്?

രണ്ടാമത്തെ പദം 6 അല്ലെങ്കിൽ $-6$; രണ്ടാംപദം 6 എങ്കിൽ ആദ്യ പദം $6 - 5 = 1$; രണ്ടാം പദം $-6$ എങ്കിൽ ആദ്യപദം $-6 - 5 = -11$

ബീജഗണിതരീതിയിലായാലോ?

$$(x + 5)^2 = 36$$

$$x + 5 = 6 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } x + 5 = -6$$

$$x = 6 - 5 = 1 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } x = -6 - 5 = -11$$

ഇത് അൽപംകൂടി ചുരുക്കിയെഴുതാൻ, ഒരു ചിഹ്നം ഉപയോഗിക്കാറുണ്ട്. 6 അല്ലെങ്കിൽ $-6$ എന്നതിനെ $\pm 6$ എന്നാണെഴുതുക. അപ്പോൾ മുകളിലെഴുതിയ സമവാക്യങ്ങൾ ഇങ്ങനെയാകും:

$$(x + 5)^2 = 36$$

$$x + 5 = \pm 6$$

$$x = -5 \pm 6$$

$$x = -5 + 6 = 1 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } x = -5 - 6 = -11$$

അപ്പോഴൊരു ചോദ്യം : ചതുരക്കണക്കിലും ഇത്തരമൊരു ചിന്ത വേണ്ടേ?

വേണോ? ചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം ന്യൂനസംഖ്യ ആവില്ലല്ലോ.

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, ഇത്തരം കണക്കുകൾ ബീജഗണിതരീതിയിൽചെയ്യുമ്പോൾ, രണ്ട് ഉത്തരങ്ങളും കണ്ടുപിടിക്കുകയും, പിന്നീട് യഥാർത്ഥ കണക്കിലെ സാഹചര്യമനുസരിച്ച് രണ്ടും എടുക്കുകയോ, ഒന്നു മാത്രം എടുക്കുകയോ ചെയ്യുകയുമാണ് നല്ല രീതി.

ഒരു ചോദ്യം കൂടി

- ഒന്നിടവിട്ട രണ്ടു പൂർണ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലത്തോട് 1 കൂട്ടിയപ്പോൾ 169 കിട്ടി. സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെയാണ്?

വിപരീതക്രിയകളുപയോഗിച്ച് ചെയ്യാൻ കഴിയുന്നുണ്ടോ? അപ്പോൾ ബീജഗണിതരീതി നോക്കാം.

സംഖ്യകൾ $x$, $x + 2$ എന്നെടുത്താൽ

$$x(x + 2) + 1 = 169$$

എന്ന സമവാക്യം കിട്ടും. ഇതിനെ

$$x^2 + 2x + 1 = 169$$

എന്നെഴുതാം. ഇനിയെന്തു ചെയ്യും?

### പരിഹാരം – ഗണിതവും യാഥാർത്ഥ്യവും

20 സെന്റിമീറ്റർ ചുറ്റളവുള്ള ചതുരമുണ്ടാക്കണം; വീതി നീളത്തെക്കാൾ 11 സെന്റിമീറ്റർ കുറവായിരിക്കണം.

നീളം $x$ എന്നെടുത്താൽ, ഈ പ്രശ്നത്തിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം.

$$x + (x - 11) = 10$$

ഇതിൽ നിന്ന്

$$x = 10.5$$

എന്നു കിട്ടും. അതായത്, നീളം 10.5 സെന്റിമീറ്റർ. അപ്പോൾ വീതിയോ?

$$10.5 - 11 = -0.5$$

ഇതു സാധ്യമല്ലല്ലോ. അതായത്, ഇത്തരമൊരു ചതുരം വരയ്ക്കാൻ കഴിയില്ല.

ഇനി ഈ ചോദ്യം നോക്കൂ.

സംഖ്യാരേഖയിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന രണ്ടു സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം 11 ആണ്; ഇവയുടെ തുക 10 ഉം. സംഖ്യകൾ എന്തൊക്കെയാണ്?

വലിയ സംഖ്യ $x$ എന്നെടുത്താൽ, മുകളിലെഴുതിയ സമവാക്യം തന്നെയാണ് കിട്ടുന്നത്. സംഖ്യകൾ $10\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ ഇവ ഈ പ്രശ്നത്തിന്റെ ഉത്തരമാണു താനും.

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ, വ്യത്യസ്ത സാഹചര്യങ്ങളിൽ നിന്നുണ്ടാകുന്ന സമവാക്യങ്ങൾ ഒന്നുതന്നെയാവാം. അവയുടെ പരിഹാരങ്ങൾ എല്ലാ സന്ദർഭങ്ങൾക്കും ഇണങ്ങണമെന്നില്ല.

മുമ്പു ചെയ്ത കണക്കുകളിലെപ്പോലെ, ഇടതുവശത്തുള്ള ബഹു പദത്തിനെ വർഗമായി എഴുതാൻ കഴിയുമോ?

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

എന്നത് ഓർമയുണ്ടല്ലോ?

അപ്പോൾ സമവാക്യം എന്തായി?

$$(x+1)^2 = 169$$

ഇതിൽ നിന്ന്

$$x + 1 = \pm\sqrt{169} = \pm 13$$

എന്നു കാണാമല്ലോ. അതിനാൽ

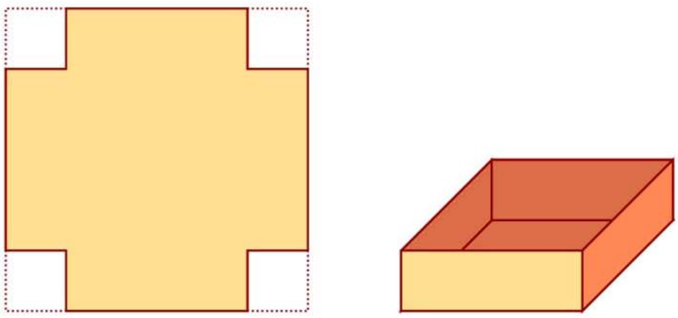
$$x = -1 \pm 13$$

$$x = 12 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } x = -14$$

അപ്പോൾ സംഖ്യകൾ 12, 14, അല്ലെങ്കിൽ −14, −12.

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ സ്വയം ചെയ്തു നോക്കൂ:

- 2000 രൂപ, വാർഷികമായി കൂട്ടുപലിശ കണക്കാക്കുന്ന ഒരു പദ്ധതിയിൽ നിക്ഷേപിച്ചു രണ്ടു വർഷം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ 2205 രൂപയായി. പലിശനിരക്ക് എത്ര ശതമാനമാണ്?
- സമചതുരാകൃതിയായ ഒരു മൈതാനത്തിനുചുറ്റും 2 മീറ്റർ വീതിയിൽ ഒരു പാതയുണ്ട്. മൈതാനവും പാതയും ചേർന്ന സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, 1225 ചതുരശ്രമീറ്ററാണ്. മൈതാനത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?
- സമചതുരാകൃതിയിലുള്ള കട്ടിക്കടലാസിന്റെ നാലുമൂലകളിൽ നിന്നും ഓരോ ചെറിയ സമചതുരം മുറിച്ചുമാറ്റി, മേലോട്ടു മടക്കി, ഒരു പെട്ടി ഉണ്ടാക്കണം.



പെട്ടിയുടെ ഉയരം 5 സെന്റിമീറ്ററും, ഉള്ളളവ് $\frac{1}{2}$ ലിറ്ററും വേണം. ആദ്യം എടുക്കേണ്ട സമചതുരത്തിന്റെ വശം എത്രയായിരിക്കണം?

### വർഗവിശേഷം

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയുടെ വർഗത്തെക്കുറിച്ചുള്ള ഒരു സർവസമവാക്യം എട്ടാംക്ലാസിൽ കണ്ടല്ലോ.

$x, y$ ഏതു സംഖ്യകളായാലും

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

ഇതിൽ $y$ ആയി വ്യത്യസ്ത സംഖ്യകൾ എടുത്താൽ, പലപല സർവസമവാക്യങ്ങൾ കിട്ടും

$x$ ഏതു സംഖ്യയായാലും

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 = x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}$$

$$(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$$

ഇവയുടെയെല്ലാം വലതുഭാഗത്തുള്ള വാചകങ്ങൾ നോക്കൂ. എല്ലാം രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളാണ്. $x$ ന്റെ ഗുണകവും, അവസാനത്തെ സംഖ്യയും തമ്മിലെന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?

$x^2 + 8x + 64$ നെ ഏതെങ്കിലും ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദത്തിന്റെ വർഗമായി എഴുതാൻ കഴിയുമോ?

$x^2 + 8x + 16$ ആയാലോ?

- പൊതുവ്യത്യാസം 1 ആയ ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെയും, മൂന്നാമത്തെയും സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം 143 ആണ്. ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങൾ ഏതൊക്കെയാണ്?

## വർഗത്തികവ്

കഴിഞ്ഞ ഭാഗത്തിലെ അവസാനത്തെ കണക്ക് എങ്ങനെയാണ് ചെയ്തത്? ശ്രേണിയിലെ രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ $x$ എന്നെടുത്താൽ, ആദ്യത്തെയും, മൂന്നാമത്തെയും സംഖ്യകൾ $x - 1$ ഉം $x + 1$ ഉം ആകും; തന്നിട്ടുള്ള വിവരം

$$(x - 1)(x + 1) = 143$$

എന്നുമാകും, ഇതിൽ

$$(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$$

ആണല്ലോ. അതിനാൽ

$$x^2 - 1 = 143$$

എന്നു കിട്ടും. ഇനി

$$x^2 = 144$$

$$x = \pm 12$$

എന്നും, ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങൾ 11, 12, 13 അല്ലെങ്കിൽ −13, −12, −11 എന്നും കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ.

ഈ രീതിക്കു പകരം, ശ്രേണിയിലെ ആദ്യസംഖ്യയെ $x$ എന്നെടുത്തു തുടങ്ങിയാലോ?

$$x(x + 2) = 143$$

എന്ന സമവാക്യമാണ് കിട്ടുക. ഇതിനെ

$$x^2 + 2x = 143$$

എന്നെഴുതാം. ഇനിയോ?

ഇടതുവശത്തെ ബഹുപദത്തെ വർഗമായി എഴുതാൻ കഴിയുമോ? അല്ലെങ്കിൽ, വർഗമാക്കി എഴുതാൻ കഴിയുമോ? മുമ്പു ചെയ്ത കണക്കുകളെല്ലാം ഒന്നുകൂടി നോക്കൂ.

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

ആണല്ലോ. അപ്പോൾ നമ്മുടെ സമവാക്യത്തിന്റെ ഇരുവശത്തും 1 കൂട്ടിയാലോ?

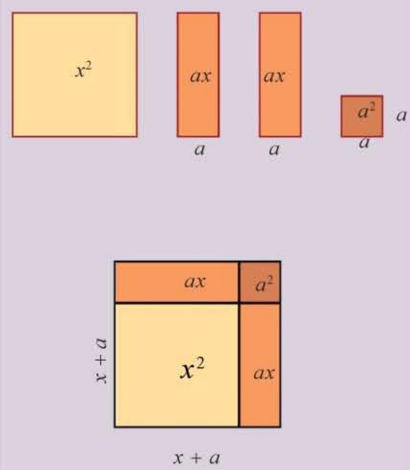
$$x^2 + 2x + 1 = 144$$

### ജ്യാമിതീയ വർഗം

$x$, $a$ ഏതു സംഖ്യകളായാലും,

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$

എന്നു കണ്ടല്ലോ. $x$, $a$ അധിസംഖ്യകളാണെങ്കിൽ, ഇക്കാര്യത്തിന് ഒരു ജ്യാമിതീയരൂപം കൊടുക്കാം:



അതായത്,

$$(x+1)^2 = 144$$

ഇനി കാര്യങ്ങൾ എളുപ്പമായില്ലേ?

$$x+1 = \pm\sqrt{144} = \pm 12$$

$$x = -1 \pm 12$$

$x = 11$ അല്ലെങ്കിൽ $x = -13$

ശ്രേണിയിലെ സംഖ്യകൾ 11, 12, 13 അല്ലെങ്കിൽ −13, −12, −11

ഈ കണക്ക് അൽപം മാറ്റി ഇങ്ങനെയാക്കിയാലോ?

- പൊതുവ്യത്യാസം 6 ആയ ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെയും, രണ്ടാമത്തെയും സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം 280 ആണ്. ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങൾ ഏതൊക്കെയാണ്?

ആദ്യത്തെ പദം $x$ എന്നെടുത്താൽ കിട്ടുന്ന സമവാക്യമെന്താണ്?

$$x^2 + 6x = 280$$

ഇതിൽ, ഇടതുവശത്തുള്ള $x^2 + 6x$ നെ വർഗരൂപത്തിലാക്കാൻ ഏതു സംഖ്യയാണ് കൂട്ടേണ്ടത്? ($x$, $a$ എന്ന ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകളെടുത്താലും, $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ ആണെന്നോർക്കുക)

$x^2 + 6x$ നെ $x^2 + (2 \times 3)x$ എന്നെഴുതാമല്ലോ.

അപ്പോൾ $x^2 + 6x$ നെ $(x+3)^2$ ആക്കാൻ $3^2 = 9$ കൂട്ടിയാൽപ്പോരേ?

അതിനാൽ സമവാക്യത്തെ ഇങ്ങനെ മാറ്റിയെഴുതാം:

$$x^2 + 6x + 9 = 289$$

അതായത്

$$(x+3)^2 = 289$$

ഇനി

$$x + 3 = \pm 17$$

$x = 14$ അല്ലെങ്കിൽ $-20$

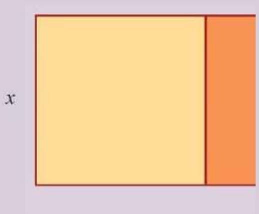
എന്നും, ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങൾ 14, 20, 26; അല്ലെങ്കിൽ −20, −14, −8 എന്നും കാണാമല്ലോ.

മറ്റൊരു ചോദ്യം നോക്കാം:

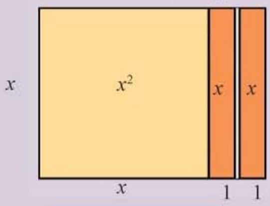
- ഒരു ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻ 300 കിലോമീറ്റർ യാത്ര ചെയ്ത് സമ്മേളനത്തിനെത്തി. പ്രസംഗത്തിനിടയിൽ അദ്ദേഹം പറഞ്ഞു.

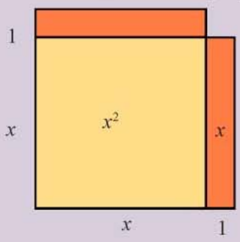
### സമചതുരത്തികവ്

$x^2 + 2x$ നെ വർഗമാക്കാൻ 1 കൂട്ടണം എന്ന കാര്യത്തെ ജ്യാമിതീയമായും കാണാം. അതിന് ആദ്യം $x^2 + 2x$ എന്നതിനെ, വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം $x$ ആയ ഒരു സമചതുരവും, വശങ്ങളുടെ നീളം $x$ ഉം 2 ഉം ആയ ഒരു ചതുരവും ചേർത്തുവച്ചതായി കാണണം.

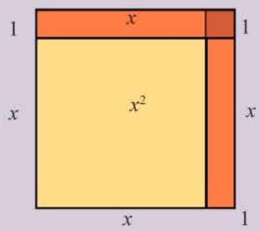



ഇനി ചേർത്തുവച്ച ചതുരത്തെ, താഴെ കാണുന്നതുപോലെ രണ്ടായി ഭാഗിച്ച്, ഒരു ഭാഗം മേൽപോട്ട് മാറ്റിയാലോ?




ഇതിനെ, വശങ്ങളെല്ലാം $x+1$ ആയ സമചതുരമാക്കാൻ, വലത്തു മുകളിലെ മൂലയിൽ, വശങ്ങൾ 1 ആയ ഒരു സമചതുരം ചേർത്തുവച്ചാൽപോരേ?



"എന്റെ യാത്രയുടെ ശരാശരി വേഗം മണിക്കൂറിൽ പത്തുകിലോമീറ്റർ കൂട്ടിയിരുന്നെങ്കിൽ, ഒരു മണിക്കൂർ മുമ്പേ എത്താമായിരുന്നു". ശരാശരി വേഗം എത്രയായിരുന്നു?

ശരാശരി വേഗം മണിക്കൂറിൽ $x$ കിലോമീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ,

യാത്രയ്ക്കെടുക്കുന്ന സമയം എത്ര മണിക്കൂറാണ്? $\frac{300}{x}$

യാത്രയുടെ വേഗം മണിക്കൂറിന് പത്ത് കിലോമീറ്റർ കൂട്ടിയാലോ?

യാത്രയ്ക്കെടുക്കുന്ന സമയം എത്രയാകും? $\frac{300}{x+10}$

അപ്പോൾ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻ പറഞ്ഞ കാര്യം ബീജഗണിത ഭാഷയിൽ ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

$$\frac{300}{x} - \frac{300}{x+10} = 1$$

ഇത് ഇങ്ങനെയാക്കാമല്ലോ:

$$\frac{300(x+10) - 300x}{x(x+10)} = 1$$

$$\frac{300(x+10-x)}{x(x+10)} = 1$$

ഇതിൽ നിന്ന്

$$x(x + 10) = 3000$$

എന്നു കിട്ടും, അതായത്

$$x^2 + 10x = 3000$$

ഇനി ഇടതുവശത്തെ ബഹുപദം വർഗരൂപത്തിലാക്കാൻ എന്തു കൂട്ടണം?

അപ്പോൾ, നമ്മുടെ സമവാക്യം

$$x^2 + 10x + 25 = 3025$$

എന്നാക്കാം; അതായത്

$$(x + 5)^2 = 3025$$

ഇതിൽനിന്ന് ശരാശരി വേഗം മണിക്കൂറിൽ 50 കിലോമീറ്ററാണെന്നു കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ:

### വ്യത്യസ്തമാർഗം

$x(x + 6) = 280$ എന്ന സമവാക്യം പരിഹരിക്കാൻ മറ്റൊരു മാർഗമുണ്ട്. $x + 6$ നെ $(x + 3) + 3$ എന്നും, $x$ നെ $(x + 3) - 3$ എന്നും എഴുതാമല്ലോ.

ഇവ ഉപയോഗിച്ച്

$$x(x+6) = ((x+3)-3)((x+3)+3)$$
$$= (x+3)^2 - 3^2$$

എന്നാക്കാം. അപ്പോൾ തുടങ്ങിയ സമവാക്യം

$$(x+3)^2 - 9 = 280$$

എന്നാകും. ഇതിൽ നിന്ന്

$$(x+3)^2 = 289$$

എന്നെഴുതി നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ $x$ കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ.

ഈ രീതിയിൽ $x^2 + 10x = 3000$ എന്ന സമവാക്യം പരിഹരിക്കാമോ എന്നു നോക്കൂ.

മറ്റൊരു ചോദ്യം:

- ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങളിൽ ഒന്നിന്, മറ്റേ വശത്തേക്കാൾ 5 സെന്റിമീറ്റർ നീളം കൂടുതലാണ്. ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, 12 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററും ആണ്. ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാണ്?

ലംബവശങ്ങളിൽ ചെറുതിന്റെ നീളം $x$ എന്നെടുത്താൽ, മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളം $x + 5$ ആകും; പരപ്പളവോ?

അപ്പോൾ തന്നിരിക്കുന്ന വിവരങ്ങൾ ബീജഗണിതത്തിലാക്കിയാൽ

$$\frac{1}{2}x(x+5) = 12$$

എന്നു കിട്ടും. ഇതു തന്നെ

$$x^2 + 5x = 24$$

എന്നെഴുതാം.

$x^2 + 5x$ നോട് ഏതു സംഖ്യ കൂട്ടിയാലാണ്, $x^2 + 2ax + a^2$ എന്ന രൂപത്തിലാകുക?

$$x^2 + 5x = x^2 + \left(2 \times \frac{5}{2}\right)x$$

എന്നെഴുതി നോക്കൂ.

$$x^2 + 2 \times \left(\frac{5}{2}\right)x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2$$

ആണല്ലോ.

അപ്പോൾ നമ്മുടെ സമവാക്യത്തിന്റെ ഇരുഭാഗത്തും $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$ കൂട്ടാം.

$$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 24 + \frac{25}{4}$$

അതായത്

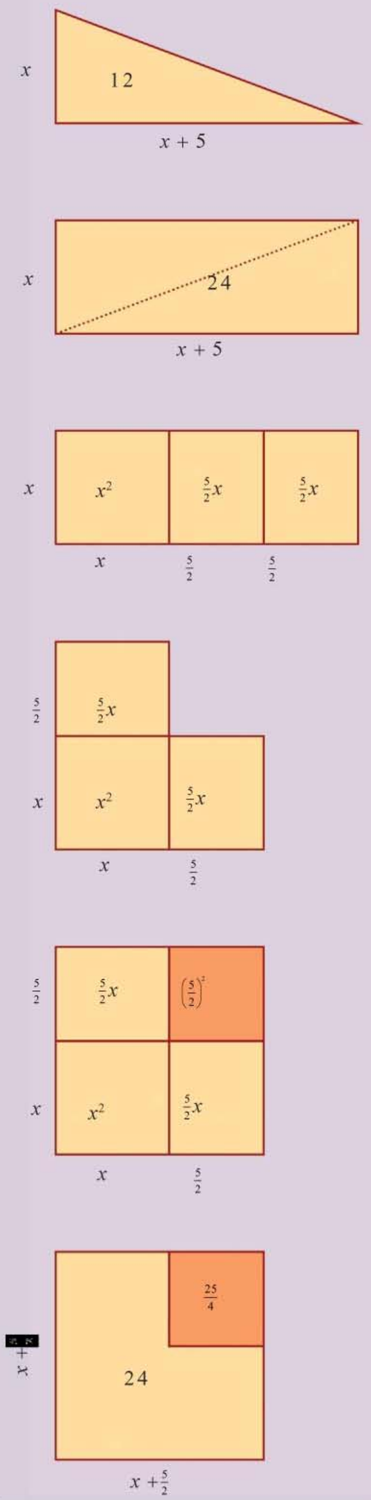
$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{121}{4}$$

ഇതിൽ നിന്ന്

$$x = -\frac{5}{2} \pm \frac{11}{2}$$

**ജ്യാമിതീയപരിഹാരം**

മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പ്രശ്നം പരിഹരിച്ചതിന്റെ ജ്യാമിതീയരൂപം നോക്കൂ:



$x = -\frac{5}{2} + \frac{11}{2}$ അല്ലെങ്കിൽ $x = -\frac{5}{2} - \frac{11}{2}$

ഇവിടെ $-\frac{5}{2} - \frac{11}{2}$ ന്യൂനസംഖ്യ ആണല്ലോ. നീളം ന്യൂനസംഖ്യ അല്ലാത്തതിനാൽ ഇതു ശരിയാകില്ല. അപ്പോൾ $x$ ആയി $-\frac{5}{2} + \frac{11}{2} = 3$ മാത്രം എടുത്താൽ മതി.

അതായത് ലംബവശങ്ങളുടെ നീളം 3 സെന്റിമീറ്ററും, 8 സെന്റിമീറ്ററും. ഇനി കർണത്തിന്റെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കാൻ വിഷമമില്ലല്ലോ. ചെയ്തുനോക്കൂ.

ഒരു ചോദ്യം കൂടിയാകാം:

- ചുറ്റളവ് 100 സെന്റിമീറ്ററും, പരപ്പളവ് 525 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററുമായ ഒരു ചതുരം ഉണ്ടാക്കണം. അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്തായിരിക്കണം?

ഈ ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും കൂട്ടിയാൽ 50 സെന്റിമീറ്ററാണല്ലോ. (എന്തുകൊണ്ട്?) അപ്പോൾ, ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം $x$ എന്നെടുത്താൽ, മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളം $50 - x$. പരപ്പളവ് 525 ആകണം. അതായത്

$$x(50 - x) = 525$$

ഇതിനെ

$$50x - x^2 = 525$$

എന്നെഴുതാം. അൽപം കൂടി മാറ്റി

$$x^2 - 50x = -525$$

എന്നെഴുതുന്നതാണ് സൗകര്യം (എന്തുകൊണ്ട്?)

ഇനിയെന്തു ചെയ്യും?

$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

എന്ന സർവസമവാക്യം ഓർത്താൽ, കാര്യങ്ങൾ എളുപ്പമായി. $x^2 - 50x$ നോട് കൂട്ടേണ്ട സംഖ്യ എന്താണ്?

അപ്പോൾ നമ്മുടെ സമവാക്യത്തെ

$$x^2 - 50x + 25^2 = -525 + 25^2$$

എന്നാക്കാം. അതായത്

$$(x - 25)^2 = 100$$

ഇതിൽ നിന്ന്

$$x = 25 \pm 10$$

### കൂട്ടിയും കുറച്ചും

ചുറ്റളവ് 100 സെന്റിമീറ്ററും, പരപ്പളവ് 525 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററുമായ ചതുരം കണ്ടുപിടിക്കാൻ മറ്റൊരു മാർഗമുണ്ട്.

100 സെന്റിമീറ്റർ ചുറ്റളവുള്ള സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശം 25 സെന്റിമീറ്ററും, അതിനാൽ പരപ്പളവ് 625 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററുമാണ്. നമുക്കാവശ്യമായ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് (സ്വാഭാവികമായും) ഇതിൽക്കുറവാണ്. അതു കിട്ടാൻ, ഈ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശം അൽപം കുറയ്ക്കണം. ചുറ്റളവ് മാറാത്തതിനാൽ, മറ്റേ വശം അത്ര തന്നെ കൂട്ടണം.

കൂട്ടുന്നതും, കുറയ്ക്കുന്നതും $x$ എന്നെടുത്താൽ, ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം $25 - x$, $25 + x$. അപ്പോൾ പ്രശ്നത്തിന്റെ സമവാക്യം

$$(25 - x)(25 + x) = 525$$

അതായത്

$$625 - x^2 = 525$$

ഇതിൽനിന്ന്,

$$x = \pm 10$$

എന്നു കാണാമല്ലോ. അതായത്, ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ $25 - 10 = 15$, $25 + 10 = 35$ സെന്റിമീറ്റർ എന്നു കിട്ടും.

$$x = 35 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } x = 15$$

$x = 35$ എന്നെടുത്താൽ $50 - x = 15$; മറിച്ച്, $x = 15$ എന്നെടുത്താൽ. $50 - x = 35$. ഏതായാലും ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 35 സെന്റിമീറ്ററും, 15 സെന്റിമീറ്ററും ആകണം.

ഇവിടെ കണ്ട കണക്കുകളുടെയെല്ലാം ബീജഗണിതരൂപം നോക്കൂ:

- $x^2 + 2x = 143$
- $x^2 + 10x = 3000$
- $x^2 + 5x = 24$
- $x^2 - 50x = -525$

ഇവയുടെയെല്ലാം പൊതുരൂപം

$$x^2 + ax = b$$

എന്നാണല്ലോ. ഇനി ഓരോ സമവാക്യവും മാറ്റിയതെങ്ങനെയാണ്?

- $x^2 + 2x + 1^2 = 143 + 1^2$ അഥവാ $(x + 1)^2 = 144$
- $x^2 + 10x + 5^2 = 3000 + 5^2$ അഥവാ $(x + 5)^2 = 3025$
- $x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 24 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$ അഥവാ $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{121}{4}$
- $x^2 - 50x + 25^2 = -525 + 25^2$ അഥവാ $(x - 25)^2 = 100$

പൊതുവായ രീതി, $x^2 + ax$ നോട്, $x$ ന്റെ ഗുണകമായ $a$ യുടെ പകുതിയുടെ വർഗം, അതായത്, $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ കൂട്ടി വർഗമാക്കുക:

$$x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2$$

ഈ രീതിക്ക്, "വർഗം തികയ്ക്കുക" (*completing the square*) എന്നാണ് പേര്

ഈ ചോദ്യം നോക്കൂ:

- 3, 7, 11, ... എന്നിങ്ങനെ സമാന്തരശ്രേണിയിലായ എത്ര സംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാലാണ് 300 കിട്ടുക?

ഈ സമാന്തരശ്രേണിയിലെ സംഖ്യകളെ $x_1$, $x_2$, $x_3$, ... എന്നെടുത്താൽ

$$x_n = 3 + 4(n - 1) = 4n - 1$$

അപ്പോൾ

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = \frac{1}{2}n(x_1 + x_n)$$

### അൽപം ചരിത്രം

രണ്ടാം കൃതി സമവാക്യങ്ങൾ പരിഹരിക്കാൻ വർഗം തികയ്ക്കുന്ന രീതിയ്ക്ക് ഏറെ പഴക്കമുണ്ട്. ഏതാണ്ട് ബി.സി. 1500 ൽ തന്നെ ബാബിലോണിയക്കാർ, ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട പ്രശ്നങ്ങളിൽ ഈ രീതി പ്രയോഗിച്ചിരിക്കുന്നതു കാണാം.

എന്നാൽ ഇന്നത്തെപ്പോലെ പ്രശ്നങ്ങളെ ബീജഗണിത സമവാക്യങ്ങളാക്കുന്ന രീതിയൊന്നും അന്നില്ലായിരുന്നു. (ഈ രീതിയ്ക്ക് ഏറിയാൽ അഞ്ഞൂറു വർഷത്തെ പഴക്കമേയുള്ളൂ.) പ്രശ്നങ്ങളും, അവയുടെ പരിഹാരമാർഗങ്ങളുമെല്ലാം സാധാരണ ഭാഷയിലാണ് പറഞ്ഞിരുന്നത്. ജ്യാമിതീയപ്രശ്നങ്ങളാകുമ്പോൾ, പരിഹാരമാർഗങ്ങളും ജ്യാമിതീയഭാഷയിൽത്തന്നെ ആയിരുന്നു.

അതായത്, ബീജഗണിതരീതികളുടെ ജ്യാമിതീയരൂപങ്ങളായി നാം ഇന്നവതരിപ്പിക്കുന്ന പലതും, ചരിത്രപരമായി നോക്കിയാൽ, ഈ ബീജഗണിതരീതികളുടെ ആദിരൂപമാണ്.

$$= \frac{1}{2}n\left(3 + (4n - 1)\right)$$

$$= 2n^2 + n$$

ഈ തുക 300 ആകണമെങ്കിലോ?

$$2n^2 + n = 300$$

ഇത് $x^2 + ax = b$ എന്ന രൂപത്തിലാണോ?

ഇതിലെ $n^2$ ന്റെ ഗുണകം 1 ആക്കുന്നതെങ്ങനെ?

നമ്മുടെ സമവാക്യത്തിന്റെ ഇരുവശത്തേയും 2 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാലോ?

$$n^2 + \frac{1}{2}n = 150$$

അടുത്തത്, വർഗം തികയ്ക്കലാണ്.

$$n^2 + \frac{1}{2}n + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 150 + \frac{1}{16}$$

അതായത്

$$\left(n+\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{2401}{16}$$

ഇനി $n$ കണ്ടുപിടിക്കാം:

$$n = -\frac{1}{4} \pm \frac{49}{4}$$

$n = 12$ അല്ലെങ്കിൽ $n = -\frac{50}{4}$

$n$ എണ്ണൽസംഖ്യയായതിനാൽ, $n = 12$ എന്ന ഉത്തരം മാത്രം മതി.

അതായത്, ശ്രേണിയിലെ 12 സംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാൽ 300 കിട്ടും.

അപ്പോൾ ചില സമവാക്യങ്ങളിൽ, വർഗം തികയ്ക്കുന്നതിനുമുമ്പ്, $x^2$ ന്റെ ഗുണകം 1 ആക്കുന്ന ജോലി കൂടിയുണ്ട്.

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ സ്വയം ചെയ്തുനോക്കൂ:

- ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളം വീതിയേക്കാൾ 10 സെന്റിമീറ്റർ കൂടുതലാണ്. പരപ്പളവ് 144 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററും. നീളവും വീതിയും എത്രയാണ്?
- 5, 7, 9, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലുള്ള ആദ്യത്തെ എത്ര സംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാലാണ് തുക 140 ആകുന്നത്?

### വികർണക്കണക്ക് – ബീജഗണിതം

രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങൾ പരിഹരിക്കാൻ മാത്രമല്ല, വർഗമൂലങ്ങളുടെ ഏകദേശവിലകൾ കാണാനും, വർഗം തികയ്ക്കുന്ന രീതി പണ്ടേ ഉപയോഗിച്ചിരുന്നതായി കാണാം.

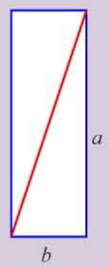
ഉദാഹരണമായി വീതി കുറഞ്ഞ, ഉയരം കൂടിയ ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വികർണം കണ്ടുപിടിക്കുന്ന രീതി, പുരാതന ബാബിലോണിലെ ഒരു കളിമൺ പലകയിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നത്, ഇങ്ങനെയാണ്.

*വീതിയുടെ വർഗത്തിനെ ഉയരം കൊണ്ടു ഹരിച്ച്, അതിന്റെ പകുതി ഉയരത്തോട് കൂട്ടുക.*

ഇത്, ഇന്നത്തെ രീതിയിൽ എഴുതിയാൽ

$$\sqrt{a^2 + b^2} \approx a + \frac{b^2}{2a}$$

എന്നാകും.




ഇതിന്റെ യുക്തിയും ഇന്നത്തെ രീതിയിൽത്തന്നെ നോക്കാം:

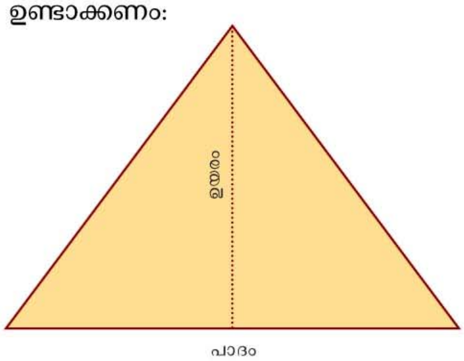
$$a^2 + b^2 + \left(\frac{b^2}{2a}\right)^2 = \left(a + \frac{b^2}{2a}\right)^2$$

ആണല്ലോ. $b$ എന്ന സംഖ്യ, $a$ എന്ന സംഖ്യയെ അപേക്ഷിച്ചു വളരെച്ചെറുതാണെങ്കിൽ, $\left(\frac{b^2}{2a}\right)^2$ എന്നത്, തീരെച്ചെറിയ ഒരു സംഖ്യയായിരിക്കും. അപ്പോൾ

$$a^2 + b^2 \approx \left(a + \frac{b^2}{2a}\right)^2$$

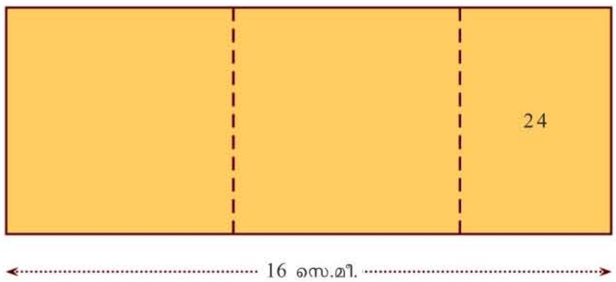
എന്നെടുക്കാം.

- ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ഒരു സമപാർശ്വ ത്രികോണം ഉണ്ടാക്കണം:



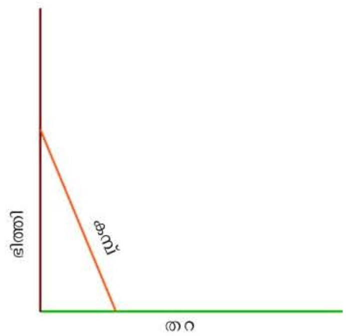

ഉയരം, പാദത്തെക്കാൾ 2 മീറ്റർ കുറവാകണം; പരപ്പളവ് 12 ചതുരശ്രമീറ്ററാകണം. ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്തായിരിക്കണം?

- ചതുരാകൃതിയായ ഒരു കടലാസിൽ നിന്നു ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ രണ്ടു സമചതുരങ്ങൾ മുറിച്ചു മാറ്റുന്നു.




മിച്ചമുള്ള ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 24 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററാണ്. മുറിച്ചെടുത്ത സമചതുരങ്ങളുടെ വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?

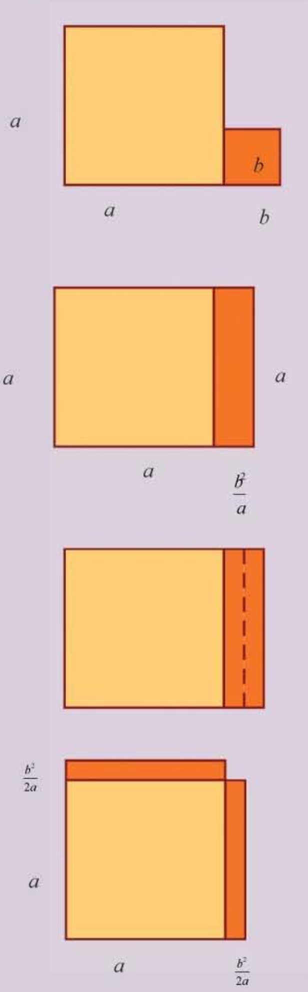
- 2.6 മീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു കമ്പ് ചുവരിൽ ചാരിവച്ചിരിക്കുന്നു. കമ്പിന്റെ ചുവട്, ഭിത്തിയിൽ നിന്ന് 1 മീറ്റർ അകലെയാണ്.




കമ്പിന്റെ ചുവട്ടിൽ നിന്ന് ഭിത്തിയിലേക്കുള്ള അകലം അൽപം കൂട്ടിയപ്പോൾ, അതിന്റെ മുകളറ്റം അത്രയും തന്നെ കീഴോട്ടു നീങ്ങി. കമ്പ് എത്ര ദൂരമാണ് നീക്കിയത്?

### വികർണക്കണക്ക് – ജ്യാമിതി

ബാബിലോണിയക്കാരുടെ വികർണക്കണക്കിന്റെ ജ്യാമിതി നോക്കാം:



അവസാനത്തെ രൂപത്തിന്, വശങ്ങളുടെ നീളം $a + \frac{b^2}{2a}$ ആയ സമചതുരവുമായി ചെറിയൊരു വ്യത്യാസമല്ലേയുള്ളൂ?

- ഒരു ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 28 മീറ്ററും, വികർണം 10 മീറ്ററുമാണ്. അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാണ്?
- തുക 4 ഉം, ഗുണനഫലം 2 ഉം ആയ രണ്ടു സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.
- ഒരു സംഖ്യയുടെയും അതിന്റെ വ്യുൽക്രമത്തിന്റെയും തുക $2\frac{1}{12}$ ആണ്. സംഖ്യ എന്താണ്?
- മുപ്പതു മിഠായി കുറേ കുട്ടികൾക്കു വീതിച്ചു കൊടുത്തു. മധുരം നുണഞ്ഞുകൊണ്ടൊരു കൊച്ചു കണക്കുകാരൻ പറഞ്ഞു. "നമ്മളിൽ ഒരാൾ കുറവായിരുന്നെങ്കിൽ, എല്ലാർക്കും ഒരു മിഠായി കൂടി കിട്ടുമായിരുന്നു." കൂട്ടത്തിലെത്ര കുട്ടികളുണ്ടായിരുന്നു?
- ഒരു സംഭരണിയിൽ വെള്ളം നിറയ്ക്കാൻ രണ്ടു കുഴലുകളുണ്ട്. രണ്ടും തുറന്നു വച്ചാൽ, 12 മിനിറ്റുകൊണ്ട് സംഭരണി നിറയും. ചെറിയ കുഴൽ മാത്രം തുറന്നു വച്ചാൽ നിറയാനെടുക്കുന്ന സമയം, വലിയ കുഴൽ മാത്രം തുറന്നുവച്ചാൽ നിറയാനെടുക്കുന്ന സമയത്തേക്കാൾ 10 മിനിറ്റു കൂടുതലാണ്. ചെറിയ കുഴൽ മാത്രം തുറന്നു വച്ചാൽ നിറയാനെടുക്കുന്ന സമയമെത്രയാണ്?

## സമവാക്യങ്ങളും ബഹുപദങ്ങളും

ഇതുവരെ ചെയ്ത കണക്കുകളുടെയെല്ലാം ബീജഗണിതരൂപം

$$ax^2 + bx + c = 0$$

എന്നതാണ്. ഉദാഹരണമായി, ആദ്യം ചെയ്ത കണക്കിലെ

$$(x + 5)^2 = 36$$

എന്ന സമവാക്യത്തെ

$$x^2 + 10x - 11 = 0$$

എന്നെഴുതാം; മറ്റൊരു കണക്കിൽ

$$2x^2 + x = 300$$

എന്നു കണ്ടതിനെ

$$2x^2 + x - 300 = 0$$

എന്നാക്കാം.

ഇങ്ങനെ നോക്കിയാൽ, മറ്റൊരു കാര്യം കൂടി തെളിഞ്ഞുവരും. $ax^2 + bx + c$ എന്നത്, രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദത്തിന്റെ പൊതുരൂപമാണല്ലോ. ($a$ പൂജ്യമാകരുതെന്നു മാത്രം. ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ **ബഹുപദങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **കൃതിയും രൂപവും** എന്ന ഭാഗം നോക്കുക.)

### വർഗമൂലം

ചതുരത്തിന്റെ വികർണത്തിന്റെ ഏകദേശനീളം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ബാബിലോണിയക്കാരുടെ രീതി, പൊതുവേ വർഗമൂലങ്ങളുടെ ഏകദേശവിലകൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ ഉപയോഗിക്കാം: $a, x$ ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകളായാലും

$$a^2 + x + \left(\frac{x}{2a}\right)^2 = \left(a + \frac{x}{2a}\right)^2$$

ആണല്ലോ. $x$ എന്ന സംഖ്യ $a$ എന്ന സംഖ്യയെ അപേക്ഷിച്ചു വളരെച്ചെറുതാണെങ്കിൽ,

$$a^2 + x \approx \left(a + \frac{x}{2a}\right)^2$$

എന്നെടുക്കാം. അപ്പോൾ

$$\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a}$$

എന്നുമെടുക്കാം.

ഉദാഹരണമായി $2 = \frac{9}{4} - \frac{1}{4}$ ആയതിനാൽ

$$\sqrt{2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}$$

$$\approx \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{17}{12}$$

$$\approx 1.4166$$

എന്നു കണ്ടെത്താം

പുരാതന ബാബിലോണിലും, നമ്മുടെ നാട്ടിൽതന്നെയും $\sqrt{2}$ ന്റെ ഏകദേശ വിലയായി $\frac{17}{12}$ ഉപയോഗിച്ചിരുന്നു എന്ന് ഒമ്പതാംക്ലാസ്സിൽ കണ്ടല്ലോ. (**പഴയൊരു രീതി, നാട്ടുക്കണക്ക്** എന്നീ ഭാഗങ്ങൾ)

അപ്പോൾ നാം ചെയ്ത കണക്കുകളെല്ലാം, ഒരു രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദത്തിൽ ഏതു സംഖ്യ ഉപയോഗിച്ചാലാണ് പൂജ്യം കിട്ടുക എന്ന അന്വേഷണമായിരുന്നു എന്നു വേണമെങ്കിൽപ്പറയാം.

ഇനി ഇതെങ്ങനെ ചെയ്തുവെന്നും ബീജഗണിതരൂപത്തിൽതന്നെ എഴുതിനോക്കാം:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

എന്ന സമവാക്യം പരിഹരിക്കാൻ, ആദ്യം സമവാക്യത്തെ ഇതുവരെ കണ്ട രീതിയിൽ

$$ax^2 + bx = -c$$

എന്നു മാറ്റിയെഴുതാം. തുടർന്ന്, നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ, ആദ്യം $a$ കൊണ്ടു ഹരിച്ച്

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

എന്ന രൂപത്തിലാക്കാം. ഇനി ഇടതുവശത്തുള്ള വാചകത്തെ വർഗരൂപത്തിലാക്കാൻ, $x$ ന്റെ ഗുണകമായ $\frac{b}{a}$ യുടെ പകുതിയുടെ വർഗം കൂട്ടണം:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

ഇതിലെ ഇടതുഭാഗത്തുള്ള വാചകത്തിനെ

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$$

എന്നെഴുതാം. വലതുഭാഗത്തെ വാചകം

$$-\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

എന്നാക്കാം. അപ്പോൾ നമ്മുടെ സമവാക്യം

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

എന്നാകും. ഇതിൽനിന്ന്

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

എന്നും, തുടർന്ന്

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

എന്നും കണ്ടുപിടിക്കാം.

### ബഹുപദവിചാരം

ഒരു രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദത്തിന്റെ സ്വഭാവങ്ങളറിയാനും വർഗം തികയ്ക്കുന്ന രീതി ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി,

$$p(x) = x^2 + 6x + 11$$

എന്ന ബഹുപദമെടുക്കാം. വർഗം തികച്ച്

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2 + 6x + 11 \\ &= (x^2 + 6x + 9) + 2 \\ &= (x+3)^2 + 2 \end{aligned}$$

എന്നെഴുതാം. ഇതിൽ, $x$ ഏതു സംഖ്യ ആയാലും $(x+3)^2$ ന്യൂനസംഖ്യ ആകില്ലല്ലോ. അതിനാൽ $p(x)$ ആയി കിട്ടുന്ന സംഖ്യ 2 ൽ കുറയില്ല.

അതായത്, പലപല സംഖ്യകൾ $x$ ആയി എടുക്കുമ്പോൾ $p(x)$ ൽ നിന്നു കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളിൽ ഏറ്റവും ചെറുത് 2 ആണ്; ഇത് കിട്ടുന്നതാകട്ടെ $x = -3$ എന്നെടുക്കുമ്പോഴും.

അതായത്,

*$a \neq 0$, $b$, $c$ എന്ന ഏതു മൂന്നു സംഖ്യകളെടുത്താലും $ax^2 + bx + c = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

നേരത്തെ പറഞ്ഞതനുസരിച്ച്, ഇക്കാര്യം ഇങ്ങനെയും പറയാം.

*$p(x) = ax^2 + bx + c$ എന്ന രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദത്തിൽ,*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

*എന്നെടുത്താൽ $p(x) = 0$ ആകും.*

ഇത്തരം രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങൾ പരിഹരിക്കാൻ, $x^2$ ന്റെ ഗുണകം കൊണ്ടു ഹരിച്ച്, വർഗം തികയ്ക്കുന്നതിനുപകരം, നേരിട്ട് ഈ സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിക്കാം. (എങ്ങനെ ചെയ്താലും, ക്രിയകൾ ഒന്നു തന്നെയാണെന്ന് ഓർക്കുക.)

ഉദാഹരണമായി, നേരത്തെ ചെയ്ത

$$2x^2 + x = 300$$

എന്ന സമവാക്യം നോക്കുക. ഇതിനെ

$$2x^2 + x - 300 = 0$$

എന്നെഴുതിയാൽ, ഇപ്പോൾ കണ്ടതനുസരിച്ച്

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 2 \times (-300)}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{2401}}{4}$$

$$= \frac{-1 \pm 49}{4}$$

$$= 12 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } \frac{-25}{2}$$

എന്നു പരിഹരിക്കാം.

ചുവടെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന കണക്കുകളുടെ ഉത്തരം, കാൽക്കുലേറ്റർ ഉപയോഗിച്ച്, രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾക്കു കൃത്യമായി കണ്ടുപിടിക്കുക:

- 10.75 മീറ്റർ ചുറ്റളവും, 5.8 ചതുരശ്രമീറ്റർ പരപ്പളവും ഉള്ള ചതുരം നിർമിക്കണം. അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയായിരിക്കണം?

### വിവിധ മാർഗങ്ങൾ

ഒരു രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യത്തിൽ, വർഗം തികയ്ക്കുന്നതിനുള്ള ക്രിയകൾ ഓരോന്നായി ചെയ്ത് പരിഹാരം കണ്ടുപിടിക്കാം; അല്ലെങ്കിൽ, ഈ ക്രിയകളെല്ലാം ഒരുമിച്ചു ചെയ്ത്, പെട്ടെന്നു പരിഹാരത്തിലെത്തുന്ന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിക്കാം. ഏതാണ് കൂടുതൽ സൗകര്യമെന്നത്, സമവാക്യത്തിന്റെ സ്വഭാവമനുസരിച്ചിരിക്കും.

ഉദാഹരണമായി,

$$x^2 + 12x + 7 = 0$$

പരിഹരിക്കാൻ, വർഗം തികച്ച്

$$(x+6)^2 = -7 + 36$$

എന്നെഴുതി, തുടരുന്നതാണ്,

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \times 1 \times 7}}{2}$$

എന്നു കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനേക്കാൾ എളുപ്പം.

മറിച്ച്,

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ കാര്യത്തിൽ

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 + 4 \times 2 \times 3}}{4}$$

എന്നെഴുതി നേരിട്ട് കണ്ടുപിടിക്കുന്നതാണ്, വർഗം തികച്ച്

$$\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{3}{2} + \frac{25}{16}$$

എന്നെഴുതി തുടരുന്നതിനേക്കാൾ എളുപ്പം.

- മുകളിലേക്കെറിഞ്ഞ ഒരു വസ്തു $t$ സെക്കന്റുകൊണ്ടു സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം $30t - 4.9t^2$ മീറ്റർ ആണ്. അത് എത്ര സമയം കഴിഞ്ഞാണ് നിലത്തുവീഴുക? ഏതൊക്കെ സമയത്താണ് അതു നിലത്തുനിന്ന് 20 മീറ്റർ ഉയരത്തിലാകുക?
- ചുവടെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദത്തിലും $x$ ഏതൊക്കെ സംഖ്യയായെടുത്താലാണ് പൂജ്യം കിട്ടുന്നത് എന്നു കണ്ടുപിടിക്കുക:
  - $x^2 - 5x + 6$
  - $x^2 + 5x + 6$
  - $x^2 + x - 6$
  - $x^2 - x - 6$
  - $x^2 - 2x - 1$
  - $2x^2 - 7x - 15$
  - $9x^2 + 12x + 4$

## വിവേചനം

പുതിയ അറിവുകളുമായി പഴയതുപോലുള്ള ഒരു കണക്കുനോക്കാം:

- 20 സെന്റിമീറ്റർ ചുറ്റളവുള്ള ഒരു ചതുരമുണ്ടാക്കണം; അതിന്റെ പരപ്പളവ് 26 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ ആകണം. വശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാകണം?

ഈ ആവശ്യങ്ങളുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$x(10 - x) = 26$$

എന്നാണല്ലോ. ഇതിനെ

$$x^2 - 10x + 26 = 0$$

എന്ന രൂപത്തിലാക്കി, പുതിയ രീതി പരീക്ഷിച്ചു നോക്കാം:

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 104}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$\sqrt{-4}$ എന്നാലെന്താണർത്ഥം? ന്യൂനസംഖ്യകൾക്കൊന്നും, വർഗമൂലമില്ലല്ലോ.

ഇങ്ങനെ ഉത്തരം കിട്ടുന്നതിന്റെ അർത്ഥം, $x^2 - 10x + 26 = 0$ എന്ന സമവാക്യം ശരിയാകുന്ന സംഖ്യകളൊന്നും ഇല്ല എന്നാണ്. (മറ്റൊരുവിധത്തിൽപ്പറഞ്ഞാൽ, $x$ ആയി ഏതു സംഖ്യ എടുത്താലും, $x^2 - 10x + 26$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽനിന്ന് പൂജ്യം കിട്ടില്ല.)

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ $ax^2 + bx + c = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരത്തിൽ, $\sqrt{b^2 - 4ac}$ എന്നൊരു വർഗമൂലമുണ്ടല്ലോ; ഇതിലെ $b^2 - 4ac$ അധിസംഖ്യയാണെങ്കിൽ, അതിന് രണ്ടു വർഗമൂലമുണ്ട്; ഓരോന്നും സമവാക്യത്തിന് പരിഹാരം തരികയും ചെയ്യും.

### സമചതുരം വീണ്ടും!

20 സെന്റിമീറ്റർ ചുറ്റളവുള്ള പലപല ചതുരങ്ങളിൽ, വശത്തിന്റെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്ററായ സമചതുരത്തിനാണ് ഏറ്റവും കൂടുതൽ പരപ്പളവ്, എന്ന് ഒമ്പതാംക്ലാസിൽ കണ്ടല്ലോ. (**ബഹുപദങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **സമചതുരവിശേഷം** എന്ന ഭാഗം.)

ഇതു മറ്റൊരു രീതിയിലും കാണാം. ഇത്തരത്തിലൊരു സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം $x$ എന്നെടുത്താൽ, പരപ്പളവ്,

$$p(x) = x(10 - x) = 10x - x^2 = -(x^2 - 10x)$$

ഇത്തരം ചതുരങ്ങളുടെയെല്ലാം പരപ്പളവ്, ഈ ബഹുപദത്തിൽ നിന്നു കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ. വർഗം തികച്ച്,

$$p(x) = -\left((x-5)^2 - 25\right) = 25 - (x-5)^2$$

എന്നെഴുതാം. ഇതിൽ $x$ ആയി ഏതു സംഖ്യ എടുത്താലും $(x - 5)^2$ ന്യൂനസംഖ്യയാകില്ല; അതിനാൽ $p(x)$ എന്ന സംഖ്യ 25 നേക്കാൾ കൂടുതലാകില്ല. $x = 5$ എന്നെടുത്താൽ, $p(x) = 25$ എന്നു കിട്ടുകയും ചെയ്യും.

അതല്ല, $b^2 - 4ac$ ന്യൂനസംഖ്യയാണെങ്കിൽ, സമവാക്യത്തിന് പരിഹാരമില്ല.

ഇനി $b^2 - 4ac$ പൂജ്യമായാലോ? അതിന് ഒരു വർഗമൂലമേയുള്ളു (പൂജ്യം തന്നെ); അതിനാൽ, സമവാക്യത്തിന് ഒരു പരിഹാരമേയുള്ളൂ.

ഈ $b^2 - 4ac$ എന്ന സംഖ്യയെ $ax^2 + bx + c = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ വിവേചകം (*discriminant*) എന്നാണ് പറയുന്നത്. അപ്പോൾ

*ഒരു രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യത്തിന്റെ വിവേചകം അധിസംഖ്യയാണെങ്കിൽ, അതിന് രണ്ടു പരിഹാരങ്ങളുണ്ട്; വിവേചകം ന്യൂനസംഖ്യയാണെങ്കിൽ, പരിഹാരമൊന്നുമില്ല; വിവേചകം പൂജ്യമാണെങ്കിൽ ഒരു പരിഹാരം മാത്രമുണ്ടാകും.*

ഇനി ഈ കണക്കു നോക്കുക:

- 8 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു കമ്പി വളച്ചു ചതുരമാക്കണം. വികർണത്തിന്റെ നീളം 2 സെന്റിമീറ്ററായ ഒരു ചതുരം ഇങ്ങനെ ഉണ്ടാക്കാൻ കഴിയുമോ? വികർണത്തിന്റെ നീളം 4 സെന്റിമീറ്റർ ആയാലോ?

ഇത്തരമൊരു ചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം $x$ എന്നെടുത്താൽ, മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളം $4 - x$ ആകണമല്ലോ. അപ്പോൾ വികർണത്തിന്റെ വർഗം

$$x^2 + (4 - x)^2 = 2x^2 - 8x + 16$$

ഇതു 4 ആകാൻ പറ്റുമോ എന്നാണ് ആദ്യത്തെ ചോദ്യം, അതായത്,

$$2x^2 - 8x + 16 = 4$$

ഇതിനെ

$$2x^2 - 8x + 12 = 0$$

എന്നെഴുതാം. ഈ സമവാക്യത്തിന്റെ വിവേചകം,

$$(-8)^2 - 4 \times 2 \times 12 = 64 - 96 < 0$$

അപ്പോൾ ഇത്തരമൊരു ചതുരം പറ്റില്ല.

ഇനി വികർണം 4 ആക്കാമോ എന്നു നോക്കാം. ഈ ആഗ്രഹത്തിന്റെ സമവാക്യം

$$2x^2 - 8x = 0$$

ആണല്ലോ.

ഇതിന്റെ വിവേചകം

$$(-8)^2 - 4 \times 2 \times 0 = 8^2 = 64$$

### വാക്കും അർത്ഥവും

വിവേചനം എന്ന വാക്കിന്റെ അർത്ഥം, തിരിച്ചറിവ് എന്നാണ്. വ്യത്യസ്തങ്ങളായവയെ തിരിച്ചറിയാനുള്ള കഴിവാണ്, വിവേകം. വേർതിരിച്ചറിയുന്നത്, വിവേചകം.

രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങളുടെ ഗുണങ്ങൾ വേർതിരിച്ചറിയാൻ സഹായിക്കുന്നതാണ്, അതിന്റെ വിവേചകം.

ഇംഗ്ലീഷിൽ ഇതിനായുപയോഗിക്കുന്നത് *discriminant* എന്ന വാക്കാണല്ലോ. വ്യത്യാസങ്ങൾ തിരിച്ചറിയുക എന്നതാണ് *discrimination* എന്ന വാക്കിന്റെ അർത്ഥം.

ശരിയല്ലാത്ത രീതിയിൽ മനുഷ്യരെ വേർതിരിക്കുന്ന രീതിയ്ക്കും ഇംഗ്ലീഷിൽ *discrimination* എന്നുതന്നെയാണ് പറയുന്നത്.

അപ്പോൾ സമവാക്യത്തിനു പരിഹാരമുണ്ട്. അത്

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64}}{4} = 4 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } 0$$

$x$ ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളമായതിനാൽ $x \neq 0$. ഇനി, $x = 4$ എന്നെടുത്താലോ, ചതുരത്തിന്റെ മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളം $x - 4 = 0$ ആയിപ്പോകും. അപ്പോൾ ഏതായാലും, ഇത്തരമൊരു ചതുരം സാധ്യമല്ല.

ഇവിടെ കണ്ടതെന്താണ്? ഒരു ഭൗതികപ്രശ്നം പരിഹരിക്കാനുണ്ടാക്കുന്ന ഗണിതസമവാക്യത്തിന് പരിഹാരമുണ്ടായാലും, ചിലപ്പോൾ ആ ഭൗതികപ്രശ്നത്തിന് പരിഹാരമില്ലെന്നു വരാം.

ഇനി ഈ ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കാമോ എന്നു നോക്കൂ:

- 5, 7, 9, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ തുടർച്ചയായ കുറെ സംഖ്യകളുടെ തുക 140 ആകുമോ? ഇത്തരമൊരു തുക 240 ആകുമോ?
- $p(x) = x^2 + x + 1$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ $x$ ഏതെങ്കിലും സംഖ്യയായി എടുത്താൽ $p(x) = 0$ എന്നു കിട്ടുമോ? $p(x) = 1$, $p(x) = -1$ ഇവയിലേതെങ്കിലും കിട്ടുമോ?
- $x + \frac{1}{x}$ എന്ന ബീജഗണിതവാചകത്തിൽ, $x$ ഏതെങ്കിലും സംഖ്യയായെടുത്താൽ 0, 1, 2 ഇവയിലേതെങ്കിലും കിട്ടുമോ?
- $a, b, c$ എന്നിവ അധിസംഖ്യകളാണ്. $ax^2 + bx + c = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന് പരിഹാരമുണ്ടെങ്കിൽ അവ ന്യൂനസംഖ്യകളാണെന്നു തെളിയിക്കുക.


### ബഹുപദവും വിവേചകവും

ഒരു രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദത്തിന്റെ ചില ഗുണങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കാനും വിവേചകം ഉപയോഗിക്കാം.

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

എന്നതിനെ വർഗം തികച്ച്,

$$p(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right)$$

എന്നെഴുതാം. ഇതിൽ $x$ ഏതു സംഖ്യ ആയാലും, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ എന്നത്, ന്യൂനസംഖ്യ അല്ല. കൂടാതെ $b^2 - 4ac$ ന്യൂനസംഖ്യയാണെങ്കിൽ, $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$ എന്നത്, അധിസംഖ്യയാണ്. ഇനി, $a$ അധിസംഖ്യ ആയാലോ? $x$ ഏതു സംഖ്യയായാലും $p(x)$ അധിസംഖ്യയായിരിക്കും. $a$ ന്യൂനസംഖ്യയാണെങ്കിൽ, $p(x)$ ഉം അങ്ങനെതന്നെ.

ഇതിൽ നിന്ന് എന്തു മനസിലാക്കും?

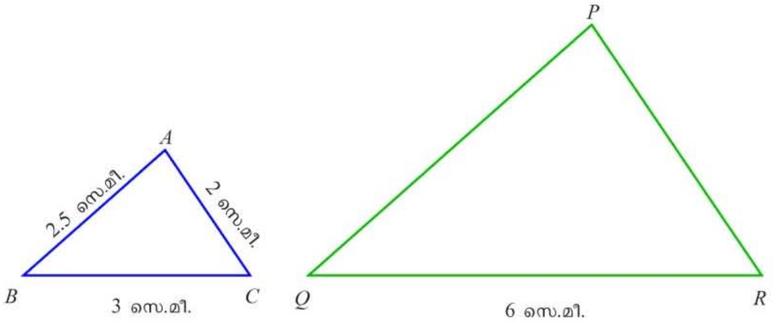
$b^2 - 4ac$ ന്യൂനസംഖ്യ ആണെങ്കിൽ, $a$ അധിസംഖ്യയാണോ അല്ലെങ്കിൽ ന്യൂനസംഖ്യയാണോ എന്നതിനനുസരിച്ച്, $ax^2 + bx + c$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ നിന്നു കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളെല്ലാം അധിസംഖ്യകളോ, ന്യൂനസംഖ്യകളോ ആയിരിക്കും.

$b^2 - 4ac$ അധിസംഖ്യയാണെങ്കിലോ? പൂജ്യമായാലോ?

# 4 ത്രികോണമിതി

## വശങ്ങളും കോണുകളും

ഈ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ നോക്കൂ:




$\Delta ABC$ യിലെ കോണുകൾ തന്നെയാണ് $\Delta XYZ$ ലേതും; വ്യക്തമായിപ്പറഞ്ഞാൽ,

$$\angle P = \angle A \qquad \angle Q = \angle B \qquad \angle R = \angle C$$

ഇവിടെ $BC$ യുടെ 2 മടങ്ങാണല്ലോ $QR$.

$\Delta PQR$ ലെ മറ്റു വശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാണ്?

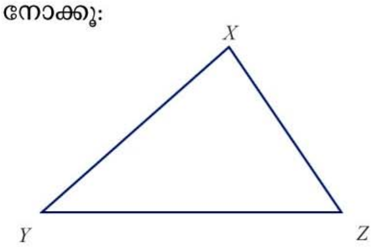
$\angle P$ യുടെ എതിർവശം, $\angle A$ യുടെ എതിർവശത്തിന്റെ രണ്ടുമടങ്ങായതിനാൽ, തുല്യമായ കോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള മറ്റു വശങ്ങളുടെ ജോടികളും ഇതേ അംശബന്ധം പാലിക്കണം. അല്ലേ?

അതായത്

$$PQ = 2 \times AB = 5 \text{ സെ.മീ.}$$

$$RP = 2 \times CA = 4 \text{ സെ.മീ.}$$

ഇനി ഈ ത്രികോണം നോക്കൂ:




ഇതിലും

$$\angle X = \angle A \qquad \angle Y = \angle B \qquad \angle Z = \angle C$$

ഇതിന്റെ വശങ്ങളെക്കുറിച്ചെന്തെങ്കിലും പറയാൻ കഴിയുമോ?

### ഭൂമിയും മാനവും

ത്രികോണങ്ങളിലെ കോണുകളുടെ അളവും, വശങ്ങളുടെ നീളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള പഠനമാണ് ത്രികോണമിതി (*trignometry*)

ചരിവിന്റെയും വിരിവിന്റെയും തിരിവിന്റെയുമെല്ലാം അളവായിട്ടാണ് കോണളവുകൾ ഉപയോഗിക്കപ്പെടുന്നതെന്നു കണ്ടല്ലോ (ഒമ്പതാംക്ലാസിലെ **വൃത്തങ്ങളുടെ അളവുകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ചരിവും വിരിവും തിരിവും** എന്ന ഭാഗം). ചരിത്രത്തിൽ ചരിവിന്റെ അളവുകൾ ആദ്യം വരുന്നത് ഭൂമിയിലെ പലതരം നിർമാണങ്ങളിലാണ്; തിരിവിന്റെ അളവുകൾ, ആകാശഗോളങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള പഠനത്തിലും.

ഭൂമിയിലെ ആവശ്യങ്ങൾക്കുവേണ്ടിത്തന്നെയാണ് ആദ്യകാല വാനശാസ്ത്ര പഠനങ്ങളും നടന്നത്. ഭക്ഷണമാണല്ലോ മനുഷ്യന്റെ പ്രധാന ആവശ്യം. ഭക്ഷണോല്പാദനം, അതായത് കൃഷി, കാലാവസ്ഥയെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു. കാലാവസ്ഥയെ നിയന്ത്രിക്കുന്ന ഒരു ഘടകം, സൂര്യനു ചുറ്റുമുള്ള ഭൂമിയുടെ കറക്കമാണ്. ഇത് ശരിയായി അറിയണമെങ്കിൽ, മറ്റു ഗ്രഹങ്ങളുടെയും, നക്ഷത്രങ്ങളുടെയുമെല്ലാം സ്ഥാനം നിശ്ചയിക്കാനറിയണം. പ്രാചീന കാർഷിക സംസ്കാരങ്ങളിലെല്ലാം വാനശാസ്ത്രം ഒരു പ്രധാന പഠനവിഷയമായത് ഇതുകൊണ്ടാണ്. അതിനാകട്ടെ ഗണിതം, വിശേഷിച്ചും ജ്യാമിതി, അത്യാവശ്യമാണുതാനും.

ഒരു വശത്തിന്റെ നീളമെങ്കിലും അറിയാതെ എന്തു പറയാൻ കഴിയും?

ചിലതെല്ലാം പറയാം:

$$\frac{XY}{2.5} = \frac{YZ}{3} = \frac{ZX}{2}$$

ആണല്ലോ. ദശാംശങ്ങൾ ഒഴിവാക്കി (അല്ലെങ്കിൽ $\Delta ABC$ യ്ക്ക് പകരം $\Delta PQR$ ഉപയോഗിച്ച്) ഇത് ഇങ്ങനെയാക്കാം

$$\frac{XY}{5} = \frac{YZ}{6} = \frac{ZX}{4}$$

ഇതിൽനിന്ന്

$$\frac{XY}{YZ} = \frac{5}{6}; \quad \frac{YZ}{ZX} = \frac{6}{4}$$

എന്നെല്ലാം പറയാം; അല്ലെങ്കിൽ, ഒറ്റ (സമ) വാക്യത്തിൽ

$$XY : YZ : ZX = 5 : 6 : 4$$

എന്നും പറയാം.

മറ്റു രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടേയും വശങ്ങളുടെ നീളത്തിന്റെ അംശബന്ധം ഇതുതന്നെയല്ലേ?

ഇത്തരം ചിന്തകളിലൂടെ എത്തിച്ചേരുന്ന സാമാന്യതത്വം എന്താണ്? ഒരേ കോണുകളുള്ള പലപല ത്രികോണങ്ങളുണ്ട്. അവയുടെ വശങ്ങളുടെ യഥാർത്ഥ നീളം, ത്രികോണത്തിനനുസരിച്ച് മാറും; പക്ഷേ ഈ നീളങ്ങളുടെ അംശബന്ധം മാറില്ല.

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ

*ഒരേ കോണുകളുള്ള ത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം വശങ്ങളുടെ നീളം ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ്.*

ഇതിൽ നിന്ന് മറ്റൊരു ചിന്ത വരും; ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകളെല്ലാം അറിയാമെങ്കിൽ; അവയുടെ വശങ്ങളുടെ നീളത്തിന്റെ അംശബന്ധം കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിയുമോ?

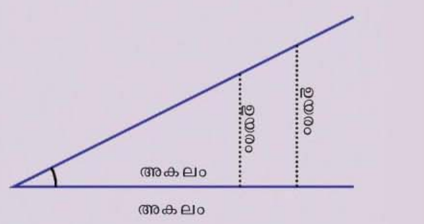
ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കാം:

- ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ത്രികോണം നോക്കുക:


### ചരിവിന്റെ അളവ്

വൃത്തത്തെ 360 സമഭാഗങ്ങളാക്കി കോണളക്കുന്ന ബാബിലോണിയക്കാരുടെ രീതിയും, അതിന് വാനശാസ്ത്രവുമായുള്ള ബന്ധവും നേരത്തെ കണ്ടിട്ടുണ്ട്. (ആറാം ക്ലാസിലെ **ചരിവും വിരിവും** എന്ന പാഠത്തിലെ **കോണളവിന്റെ ചരിത്രം** എന്ന ഭാഗം) ഏതാണ്ട് ബി.സി മൂന്നാം നൂറ്റാണ്ടുമുതൽ ബാബിലോണിൽ ഈ രീതി ഉപയോഗിച്ചിരുന്നതായി കാണാം. ഇതാണ് ഇന്നത്തെ ഡിഗ്രി അളവ്.

എന്നാൽ ഭൂമിയിലെ നിർമാണങ്ങളിൽ, ചരിവളക്കാൻ മറ്റൊരു രീതിയാണ് ഉപയോഗിച്ചിരുന്നത്. ഈ ചിത്രം നോക്കുക:




ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ, കോണിന്റെ വ്യത്യസ്ത സ്ഥാനങ്ങളിൽ "അകലവും ഉയരവും" മാറുമെങ്കിലും, ഉയരത്തെ അകലംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ, ഒരേ സംഖ്യതന്നെ കിട്ടുമല്ലോ. (കാരണം?) ഓരോ കോണിനും, അതിന്റെ വലിപ്പമനുസരിച്ച്, ഈ സംഖ്യ മാറുകയും ചെയ്യും. ഈ സംഖ്യയെയാണ്, ചരിവിന്റെ അളവായി എടുത്തിരുന്നത്.

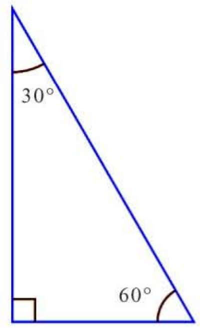
പുരാതന ഈജിപ്റ്റിലെ ആഹ്മോസ് പപ്പൈറസിൽ (എട്ടാംക്ലാസിലെ **സമവാക്യങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **പ്രാചീന ഗണിതം** എന്ന ഭാഗം നോക്കുക) ഇത്തരം ചില കണക്കുകൂട്ടലുകൾ കാണാം. സമചതുരസ്തൂപികകളിൽ, പാദവും ഒരു മുഖവും തമ്മിലുള്ള ചരിവാണ് ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കിയിരിക്കുന്നത്.

പുരാതന ബാബിലോണിയായിലെ ഒരു കളിമൺ പലകയിൽ, പലപല മട്ടത്രികോണങ്ങളിൽ, കർണത്തെ മറ്റൊരു വശം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽകിട്ടുന്ന സംഖ്യകൾ പട്ടികപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നതും കാണാം.

ഈ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങൾ തുല്യമാണ് (കാരണം?) ആ നീളം $x$ എന്നെടുത്താൽ, കർണത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{2}\,x$ ആകണമല്ലോ (എന്തുകൊണ്ട്?)

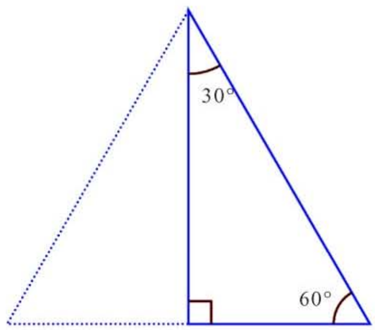
അതായത്, ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം $1 : 1 : \sqrt{2}$

- ഇനി മറ്റൊരു മട്ടത്രികോണം:

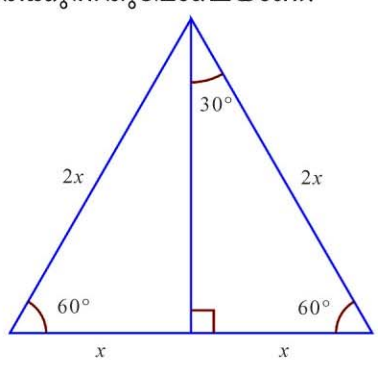



ഇതിലെ ഏറ്റവും ചെറിയ വശത്തിന്റെ നീളം $x$ എന്നെടുക്കാം. മറ്റു വശങ്ങളുടെ നീളം എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

ആദ്യം കണ്ട മട്ടത്രികോണം ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ പകുതിയാണെങ്കിൽ, ഈ ത്രികോണം ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ പകുതിയാണല്ലോ. (ഏഴാം ക്ലാസിലെ **വരകൾക്കിടയിൽ** എന്ന പാഠത്തിലെ **മട്ടഭംഗികൾ** എന്ന ഭാഗം നോക്കുക.)



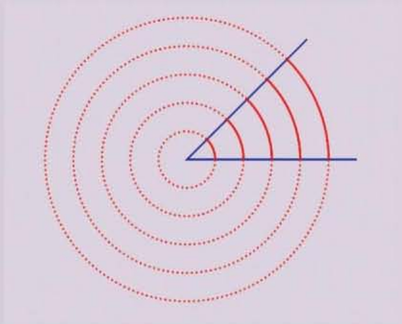

ഈ സമഭുജ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം ചുവടെ ക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെയാണ്:




### ഡിഗ്രി അളവ്

ഒരു കോണിന്റെ അളവ് $45°$ എന്നാൽ എന്താണർത്ഥം?

ഈ അളവുള്ള ഒരു കോണിന്റെ ശീർഷം കേന്ദ്രമായി പലപല വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കാം; അവയിലെല്ലാം ഈ കോണിനുള്ളിൽപ്പെടുന്ന ചാപങ്ങളുടെ നീളവും പലതാണ്;



പക്ഷേ ഈ ചാപങ്ങളോരോന്നും അതതു വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{8}$ ഭാഗമാണെന്നതിൽ മാറ്റമില്ല. ഈ $\frac{1}{8}$ നെ 360 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണ് 45.

കോണിന്റെ അളവ് $60°$ ആയാലോ? ശീർഷം കേന്ദ്രമായി വരയ്ക്കുന്ന ഏതു വൃത്തത്തിന്റെയും $\frac{1}{6}$ ഭാഗമാണ് കോണിനുള്ളിൽപ്പെടുക. അതിനെ 360 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണ് 60.

പൊതുവെ പറഞ്ഞാൽ, ഏതു കോണിന്റേയും ഡിഗ്രി അളവ് എന്നത് അതിന്റെ ശീർഷം കേന്ദ്രമായി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തത്തിൽ, കോണിനുള്ളിൽപ്പെടുന്ന ചാപത്തിന്റെ നീളത്തെ മൊത്തം വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവുകൊണ്ടു ഹരിച്ച്, 360 കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, കിട്ടുന്ന സംഖ്യയാണ്.

അപ്പോൾ നമ്മുടെ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണം $2x$ എന്നും, ഒരു ചെറിയ വശത്തിന്റെ നീളം $x$ എന്നും കിട്ടി. മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ നീളം എന്താണ്?

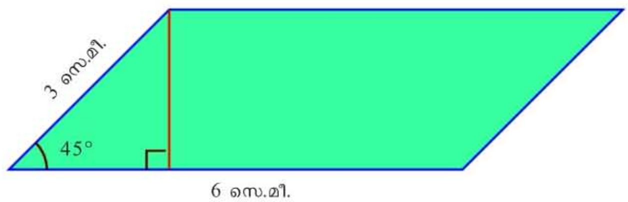
$$\sqrt{(2x)^2 - x^2} = \sqrt{3x^2} = \sqrt{3}x$$

അപ്പോൾ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം, വലിപ്പക്രമത്തിൽ, $1 : \sqrt{3} : 2$

ഇക്കാര്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ചില കണക്കുകൾ ചെയ്യാം:

- ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ സമീപവശങ്ങളുടെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്ററും 3 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. അവയ്ക്കിടയിലുള്ള കോൺ $45°$. ഇതിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

സാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കാൻ, ഒരു ജോടി സമാന്തരവശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം അറിയണമല്ലോ. ഒരു ചിത്രം വരയ്ക്കാം:

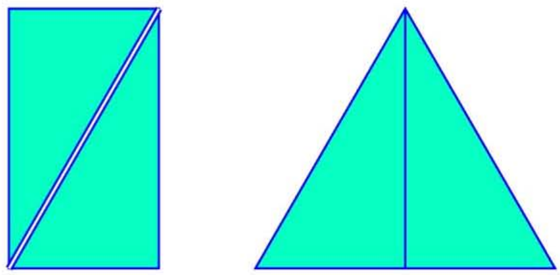



ഇതിലെ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ലംബം, കർണത്തിന്റെ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ഭാഗമാണല്ലോ (കാരണം?) അതിനാൽ, സാമാന്തരികത്തിന്റെ ഉയരം $\frac{3}{\sqrt{2}}$ സെന്റിമീറ്ററാണ്. അപ്പോൾ പരപ്പളവ് $\frac{18}{\sqrt{2}}$ ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ. അൽപംകൂടി കണക്കുകൂട്ടിയാൽ

$$\frac{18}{\sqrt{2}} = 18 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 9 \times 1.414 = 12.726$$

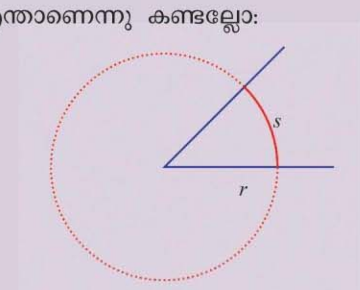
അതായത്, രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾക്കു കൃത്യമായി, പരപ്പളവ് 12.73 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററാണ്.

- ഒരു ചതുരപ്പലക വികർണത്തിലൂടെ മുറിച്ച്, ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ മാറ്റിയടുക്കി, ഒരു സമഭുജത്രികോണമുണ്ടാക്കണം:



### കോണിനു മറ്റൊരളവ്

ഒരു കോണിന്റെ ഡിഗ്രി അളവെന്നാൽ എന്താണെന്നു കണ്ടല്ലോ:




വിവിധ വലിപ്പത്തിലുള്ള വൃത്തങ്ങൾ വരച്ചാൽ, ചിത്രത്തിലെ $s$ ഉം $r$ ഉം മാറുമെങ്കിലും, $\frac{s}{2\pi r}$ മാറുന്നില്ലെന്നും, അതിനെ 360 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണ് ഡിഗ്രി അളവെന്നും പറഞ്ഞു. അതായത്,

കോണിന്റെ ഡിഗ്രി അളവ് $= \frac{s}{2\pi r} \times 360$.

ഇതിലെ $s$, $r$ ഇവ മാറിയാലും $2\pi$, 360 എന്നീ സംഖ്യകൾ മാറുന്നില്ലല്ലോ.

അപ്പോൾ കോണളക്കാൻ $\frac{s}{r}$ എടുത്താൽപ്പോരേ?

ശരിയാണ്. ഈ അളവിനെയാണ് കോണിന്റെ റേഡിയൻ (radian) അളവ് എന്നു പറയുന്നത്. അതായത്, മുകളിലെ ചിത്രത്തിൽ,

കോണിന്റെ റേഡിയൻ അളവ് $= \frac{s}{r}$.

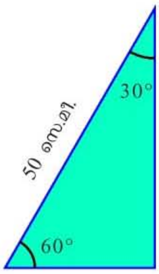
ഡിഗ്രി അളവിനെ സൂചിപ്പിക്കാൻ $°$ എന്ന ചിഹ്നമാണല്ലോ ഉപയോഗിക്കുന്നത്. റേഡിയൻ അളവിനെ സൂചിപ്പിക്കാൻ rad എന്നാണ് എഴുതുന്നത്.

ഈ ആശയം ആദ്യമായി അവതരിപ്പിച്ചത്, പതിനെട്ടാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഇംഗ്ലണ്ടിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന റോജർ കോട്സ് (Roger Cotes) എന്ന ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനാണ്. റേഡിയൻ എന്ന പേരു കൊടുത്തത്, പത്തൊമ്പതാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഇംഗ്ലണ്ടിലെ ജെയിംസ് തോംസൺ (James Thomson) എന്ന ഭൗതിക ശാസ്ത്രജ്ഞനും.

ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 50 സെന്റിമീറ്ററുമാകണം. ചതുരപ്പലകയുടെ നീളവും വീതിയും എത്രയായിരിക്കണം?

ഇങ്ങനെ ഒരു സമഭുജത്രികോണമുണ്ടാക്കണമെങ്കിൽ, ചതുരം മുറിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ത്രികോണങ്ങളുടെ കോണുകൾ 30°, 60°, 90° ആയിരിക്കണം. ഇത്തരമൊരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണമാണ്, ഉണ്ടാക്കുന്ന സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശമാകുന്നത്. അതിന്റെ നീളം 50 സെന്റിമീറ്ററാണെന്നു പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്.

അപ്പോൾ പ്രശ്നമെന്താണ്? ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കണം:




ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം (വലിപ്പക്രമത്തിൽ) $1 : \sqrt{3} : 2$ എന്ന അംശബന്ധത്തിലായതിനാൽ, ഏറ്റവും ചെറിയ വശത്തിന്റെ നീളം

$$50 \times \frac{1}{2} = 25$$

എന്നും, അടുത്തവശം

$$50 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$$

എന്നും കാണാം. അതായത്, ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം 25 സെന്റിമീറ്ററും, $25\sqrt{3}$ സെന്റിമീറ്ററും ആകണം. വേണമെങ്കിൽ, ഇവ മില്ലിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായി കണ്ടുപിടിക്കാം (ചെയ്തുനോക്കൂ).

കുറേ കണക്കുകൾ കൂടി ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു. ശ്രമിച്ചുനോക്കൂ:

- 30 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ പരപ്പളവുള്ള ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ ഒരു വശം 6 സെന്റിമീറ്ററും, ഒരു കോൺ 60° യും ആണ്. അതിന്റെ മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?
- ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം 4 സെന്റിമീറ്ററാണ്. അതിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്രയാണ്?
- ഒരു കോൺ 30° ആയ ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണം 6 സെന്റിമീറ്ററാണ്. അതിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

### ഡിഗ്രിയും റേഡിയനും

നീളമളക്കാൻ സെന്റിമീറ്റർ, ഇഞ്ച് മുതലായ പല ഏകകങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നതുപോലെ, കോൺ അളക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്ന രണ്ടു പ്രധാന ഏകകങ്ങളാണ് ഡിഗ്രിയും റേഡിയനും. SI എന്ന ചുരുക്കപ്പേരിലറിയപ്പെടുന്ന അന്താരാഷ്ട്ര ഏകക വ്യവസ്ഥയിൽ (International System of Units) കോണിന്റെ ഏകകമായി എടുത്തിരിക്കുന്നത്, റേഡിയനാണ്.

ഡിഗ്രിയും റേഡിയനും കണക്കാക്കാനുപയോഗിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്ന്

കോണിന്റെ റേഡിയൻ അളവ്

$$= \text{കോണിന്റെ ഡിഗ്രി അളവ്} \times \frac{180}{\pi}$$

എന്നു കാണാമല്ലോ. അതായത്

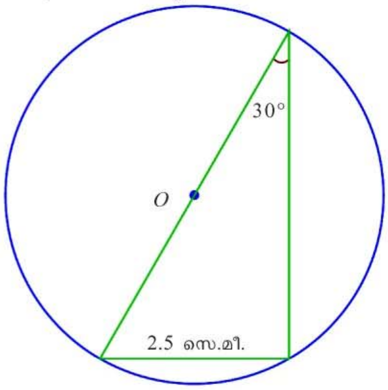
$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \approx 57.2958^{\circ}$$

ഓർക്കാൻ കൂടുതൽ എളുപ്പം

$$\pi \text{ rad} = 180^{\circ}$$

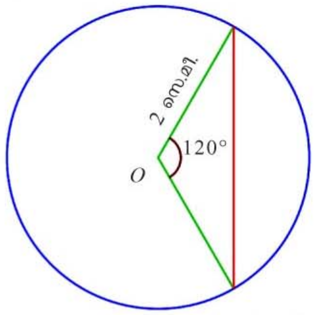
എന്ന സമവാക്യമാണ്.

- ചിത്രത്തിൽ $O$ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രമാണ്

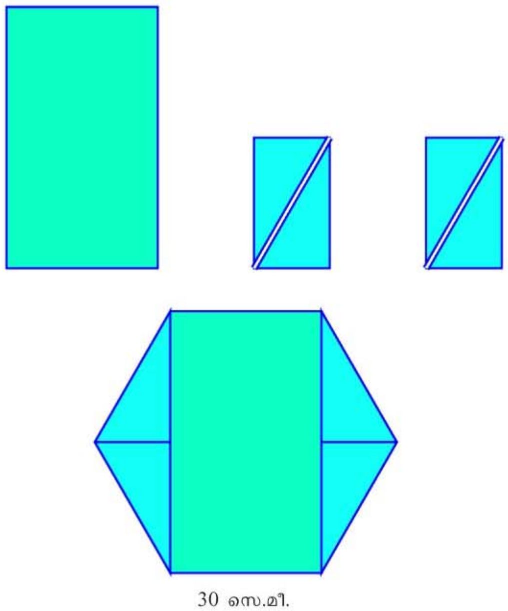



വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസമെത്രയാണ്?

- ചിത്രത്തിലെ $O$ കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിൽ വരച്ചിരിക്കുന്ന ഞാണിന്റെ നീളമെന്താണ്?



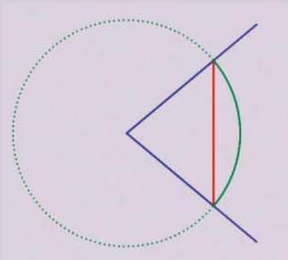

- ഒരേ വലിപ്പമുള്ള രണ്ടു ചതുരങ്ങൾ വികർണത്തിലൂടെ മുറിച്ചു ത്രികോണങ്ങളാക്കി, മറ്റൊരു ചതുരത്തോടു ചേർത്തുവച്ച്, ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ഒരു സമഷഡ്ഭുജമുണ്ടാക്കണം:




ചതുരങ്ങളുടെ നീളവും വീതിയും എത്രയായിരിക്കണം?

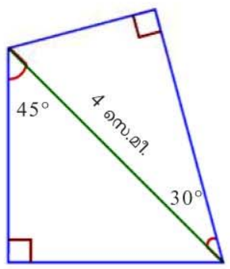
### നേർവഴി?

ഡിഗ്രി അളവായാലും, റേഡിയൻ അളവായാലും, കോണിന്റെ വലിപ്പം സൂചിപ്പിക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്നത് ഒരു ചാപത്തിന്റെ നീളത്തെയാണല്ലോ. അതിനു പകരം ഞാണിന്റെ നീളം ഉപയോഗിച്ചുള്ള കണക്കുകൂട്ടലുകളാണ്, ബി.സി. രണ്ടാം നൂറ്റാണ്ടിൽ, ഗ്രീസിലെ ഹിപ്പാർക്കസ് (Hipparchus) എന്ന വാനശാസ്ത്രജ്ഞൻ നടത്തിയത്.

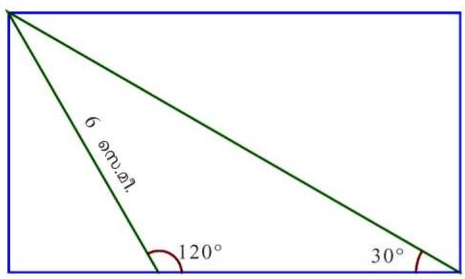


വ്യത്യസ്ത കേന്ദ്രകോണുകളുള്ള ഞാണുകളുടെ നീളങ്ങൾ കാണിക്കുന്ന ഒരു വലിയ പട്ടിക ഇദ്ദേഹം എഴുതിയിട്ടുള്ളതായി പിൽക്കാലത്തെ പല ഗണിതകാരന്മാരും പറയുന്നുണ്ടെങ്കിലും, അതു കണ്ടു കിട്ടിയിട്ടില്ല. എ.ഡി. രണ്ടാം നൂറ്റാണ്ടിൽ, ഈജിപ്റ്റിലെ ക്ലോഡിയസ് ടോളമി (Claudius Ptolemy) ഇത്തരത്തിൽ ഒരു പട്ടിക ഉണ്ടാക്കിയത് കിട്ടിയിട്ടുണ്ട്. ഇതിൽ, ആരം 60 ആയ ഒരു വൃത്തത്തിൽ $\frac{1}{2}^\circ$ ഇടവിട്ട്, 180° വരെയുള്ള കേന്ദ്രകോൺ ഉണ്ടാക്കുന്ന ഞാണുകളുടെ നീളം വളരെ കൃത്യമായി അദ്ദേഹം കണക്കുകൂട്ടിയിട്ടുണ്ട്.

- ചിത്രത്തിലെ ചതുർഭുജത്തിന്റെ എല്ലാ വശങ്ങളുടേയും നീളം കണക്കാക്കുക.




- ചിത്രത്തിലെ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

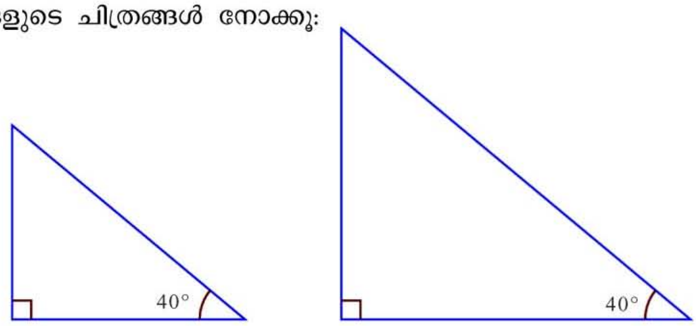



## പുതിയ കോണളവുകൾ

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകളിൽ നിന്ന് അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം കണ്ടുപിടിക്കുക എന്നതാണല്ലോ നമ്മുടെ ലക്ഷ്യം. ചിലതരം മട്ടത്രികോണങ്ങളിൽ ഇതു സാധിക്കുകയും ചെയ്തു. മറ്റു ത്രികോണങ്ങളിൽ ഇതത്ര എളുപ്പമല്ല. ഇതു കണ്ടുപിടിക്കാൻ സഹായിക്കുന്ന ചില പട്ടികകൾ വളരെക്കാലം മുമ്പു തന്നെ ഗണിതകാരന്മാർ ഉണ്ടാക്കിയിട്ടുണ്ട്. അവ എന്താണെന്നും, ഉപയോഗിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്നും നോക്കാം.

ആദ്യമായി, മട്ടകോണിനേക്കാൾ ചെറുതായ ഏതു കോൺ എടുത്താലും അതുൾക്കൊള്ളുന്ന അനേകം മട്ടത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കാമെന്നും, അവയിലെയെല്ലാം കോണുകൾ തുല്യമാണെന്നും കാണണം.

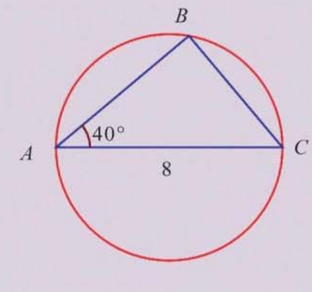
ഉദാഹരണമായി, $40^\circ$ കോൺ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന കുറേ മട്ടത്രികോണങ്ങളുടെ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:



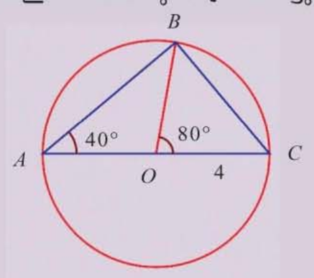

### പഴയ രീതി

ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണവും, ഒരു കോണും അറിയാമെങ്കിൽ, ടോളമിയുടെ ഞാൺപട്ടിക ഉപയോഗിച്ച്, ലംബവശങ്ങളുടെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കാം.

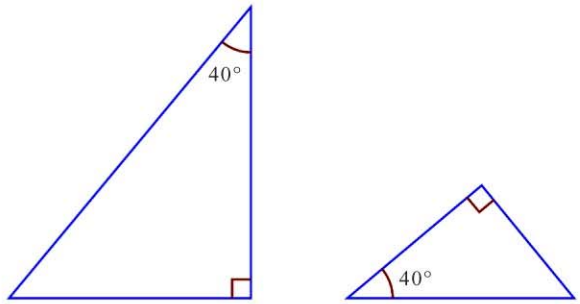
ഉദാഹരണമായി, കർണം 8 ഉം ഒരു കോൺ $40^\circ$ ഉം ആയ ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കണമെന്നു കരുതുക. ഹിപ്പാർക്കസും, ടോളമിയും ചെയ്യുന്നത്, ഇത്തരം ഒരു ത്രികോണം ഒരു വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ സങ്കൽപിക്കുകയാണ്:




ഇതിന്റെ മട്ടമൂലയിലേക്ക് ആരം വരച്ചാൽ ഇങ്ങനെ ഒരു ചിത്രം കിട്ടും.



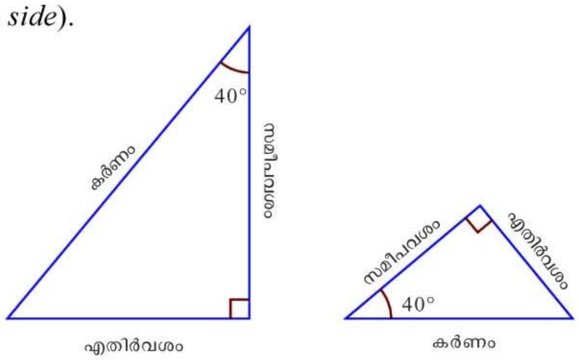

ഇനി പട്ടിക ഉപയോഗിച്ച്, ആരം 1 ആയ വൃത്തത്തിലെ $80^\circ$ കേന്ദ്രകോൺ ഉണ്ടാക്കുന്ന ഞാണിന്റെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കണം. ഇതിനെ 4 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ, ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളമായി; മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളം പൈഥഗോറസ് സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കാം.




ഇവ പല വലിപ്പത്തിലുള്ളവയാണെങ്കിലും, ഇവയിലെയെല്ലാം കോണുകൾ 40°, 50°, 90° തന്നെയാണ്. അതിനാൽ ഈ ത്രികോണങ്ങളിലെല്ലാം, വശങ്ങളുടെ നീളം ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ്.

മറ്റൊരു വിധത്തിൽപ്പറഞ്ഞാൽ, ഇക്കൂട്ടത്തിലെ ഒരു ത്രികോണത്തിലെ രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം, മറ്റെല്ലാ ത്രികോണത്തിന്റേയും അതേ സ്ഥാനത്തുള്ള വശങ്ങളുടെ നീളം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം തന്നെയാണ്.

ഇതു കുറേക്കൂടി ചുരുക്കിയെഴുതാൻ, 40° കോൺ ഉൾപ്പെടുന്ന വശങ്ങളിൽ ചെറുതിനെ, അതിന്റെ സമീപവശം (*adjacent side*) എന്നു വിളിക്കാം. വലിയ വശം കർണം (*hypotenuse*) ആണല്ലോ. ഈ കോണിന് എതിരെയുള്ളത്, അതിന്റെ എതിർവശവും (*opposite side*).

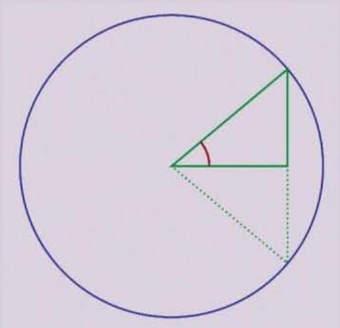



അപ്പോൾ ഈ വരച്ച ത്രികോണങ്ങളിലെല്ലാം 40° കോണിന്റെ എതിർവശത്തെ കർണംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് ഒരേ സംഖ്യയാണ്. ഇത് ഏകദേശം 0.6428 എന്നു കണക്കാക്കിയിട്ടുണ്ട്. അതുപോലെ ഈ ത്രികോണങ്ങളിലെല്ലാം, 40° കോണിന്റെ സമീപവശത്തെ കർണംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്നതും ഒരേ സംഖ്യയാണ്. ഇത് ഏകദേശം 0.7660 എന്നും കണക്കാക്കിയിട്ടുണ്ട്.

ഈ സംഖ്യകൾക്കു പ്രത്യേക പേരുകളുമുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി, 40° കോൺ ഉൾപ്പെടുന്ന ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിൽ, ഈ കോണിന്റെ എതിർവശത്തെ കർണംകൊണ്ടു ഹരിച്ചുകിട്ടുന്ന സംഖ്യയ്ക്ക് 40° കോണിന്റെ സൈൻ (sine of 40°) എന്നാണ് പറയുന്നത്; സമീപവശത്തെ കർണംകൊണ്ടു ഹരിച്ചുകിട്ടുന്ന സംഖ്യയ്ക്ക് 40° കോണിന്റെ കോസൈൻ (cosine of 40°) എന്നും. ഇവ ചുരുക്കി sin 40°, cos 40° എന്നാണ് എഴുതുന്നത്.

### അര ഞാൺ

ടോളമിയുടെ പട്ടികയുപയോഗിച്ച്, ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ കർണത്തെ പകുതിയാക്കുകയും, കോണിനെ ഇരട്ടിപ്പിക്കുകയും വേണം. ഇതൊഴിവാക്കാൻ, ഓരോ കോണും, അതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങായ കോണിന്റെ പകുതി ഞാണും, ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന പട്ടിക ഉണ്ടാക്കിയാൽ മതി.



എ.ഡി. അഞ്ചാംനൂറ്റാണ്ടിൽ ഭാരതത്തിൽ രചിക്കപ്പെട്ട *സൂര്യസിദ്ധാന്തം* എന്ന ജ്യോതിശ്ശാസ്ത്ര ഗ്രന്ഥത്തിൽ ഇത്തരം ഒരു പട്ടിക കാണാം. ഇക്കാലത്തുതന്നെ ഭാരതത്തിലെ പ്രസിദ്ധ ജ്യോതിശ്ശാസ്ത്രജ്ഞനായ ആര്യഭടൻ രചിച്ച *ആര്യഭടീയം* എന്ന ഗ്രന്ഥത്തിലും ഇത്തരം പട്ടികകൾ ഉപയോഗിച്ചുള്ള ക്രിയകൾ കാണാം. ഈ കോണളവിനെ അദ്ദേഹം *അർധജ്യാ* എന്നാണ് വിളിക്കുന്നത്. (ഞാണിന്, സംസ്കൃതത്തിൽ *ജ്യാ* എന്നാണ് പറയുന്നതെന്ന്, ഒമ്പതാംക്ലാസിലെ **വൃത്തങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ഞാണും ചരടും** എന്ന ഭാഗത്തു പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലോ.)

അപ്പോൾ മുമ്പേ പറഞ്ഞതനുസരിച്ച്

$$\sin 40° \approx 0.6428$$

$$\cos 40° \approx 0.7660$$

ഇതുപോലെ 90° യിൽക്കുറവായ കോണുകളുടെയെല്ലാം sin ന്റേയും cos ന്റേയും ഏകദേശവിലകൾ പട്ടികപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്. അതിന്റെ ഒരു ഭാഗം ഇങ്ങനെയാണ് (മുഴുവൻ പട്ടിക, പാഠത്തിന്റെ അവസാനം കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്):

| കോൺ | sin | cos |
|---|---|---|
| 35° | 0.5736 | 0.8192 |
| 36° | 0.5878 | 0.8090 |
| 37° | 0.6018 | 0.7986 |
| 38° | 0.6157 | 0.7880 |
| 39° | 0.6293 | 0.7771 |
| 40° | 0.6428 | 0.7660 |

ഈ പട്ടികയിൽ നിന്ന്

$$\sin 35° \approx 0.5736$$

$$\cos 35° \approx 0.8192$$

എന്നു കാണാമല്ലോ. എന്താണിതിന്റെ അർത്ഥം? ഒരു കോൺ 35° ആയി ഏതു മട്ടത്രികോണം വരച്ചാലും, ഈ കോണിന്റെ എതിർവശത്തെ കർണംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ, ഏകദേശം 0.5736 കിട്ടും. സമീപവശത്തെ കർണംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 0.8192 ഉം കിട്ടും.

ഈ പേരുകളുപയോഗിച്ച്, നേരത്തെ കണ്ട മട്ടത്രികോണങ്ങളുടെ കാര്യം ഇങ്ങനെ പറയാം:

$$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{1}{2}$$

ഇതുപോല sin 30°, cos 30° എഴുതാമോ?

ഇനി ഈ പട്ടികകൾ ഉപയോഗിക്കുന്ന ചില സന്ദർഭങ്ങൾ നോക്കാം:

- ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണം 6 സെന്റിമീറ്ററും, ഒരു കോൺ 40° യും ആണ്. ഇതിന്റെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാണ്?

### പേരു വന്ന വഴി

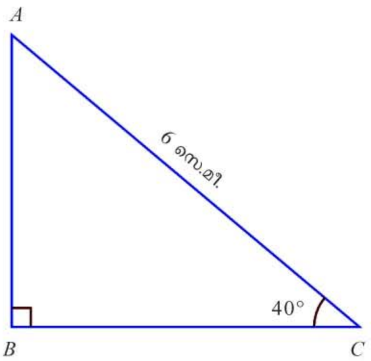
ആര്യഭടൻ, കോണിന്റെ *അർധജ്യാ* എന്നു വിളിച്ചിരുന്ന അളവു തന്നെയാണ് ഇന്നു sin എന്ന പേരിൽ ഉപയോഗിക്കപ്പെടുന്നത്. ഈ പേരു വന്നതിന്റെ കഥ ഇങ്ങനെയാണ്.

ആര്യഭടൻ തന്നെ പിൽക്കാലത്ത്, *അർധ* എന്ന വിശേഷണം ഉപേക്ഷിച്ച്, *ജ്യാ* എന്നു മാത്രമാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത്. എ.ഡി ഏഴാം നൂറ്റാണ്ടുമുതലുള്ള കാലത്ത്, അറബ് രാജ്യങ്ങളിലെ ഭരണാധികാരികൾ, ഗ്രീസിലേയും ഭാരതത്തിലേയും പ്രധാന ശാസ്ത്രഗ്രന്ഥങ്ങളെല്ലാം അറബിഭാഷയിലേക്ക് പരിഭാഷപ്പെടുത്തുന്നത് പ്രോത്സാഹിപ്പിച്ചിരുന്നു. *ആര്യഭടീയം* വിവർത്തനം ചെയ്തവർ, *ജ്യാ* എന്ന പദം വലിയ മാറ്റമൊന്നും വരുത്താതെ *ജിബ* എന്നുപയോഗിച്ചു. അറബ് ഭാഷ എഴുതുമ്പോൾ പൊതുവേ സ്വരാക്ഷരങ്ങൾ എഴുതാറില്ലാത്തതിനാൽ, ഇത് എഴുതുന്നത് *ജ്ബ്* എന്നു മാത്രമായിരുന്നു.

പിൽക്കാലത്ത്, എ.ഡി. പതിമൂന്നാം നൂറ്റാണ്ടോടെ, ഈ അറബ് ഗ്രന്ഥങ്ങളെല്ലാം യൂറോപ്പിലെത്തുകയും, ലാറ്റിനിലേക്ക് വിവർത്തനം ചെയ്യപ്പെടുകയുമുണ്ടായി. *ജ്ബ്* എന്ന് അറബിയിൽ എഴുതിയിരുന്നത്, *ജൈബ്* എന്ന വാക്കാണെന്ന് അവർ തെറ്റിദ്ധരിച്ചു. ഈ വാക്കിന് അറബിയിൽ, വളവ്, മടക്ക് എന്നെല്ലാമാണ് അർത്ഥം. ഈ അർത്ഥം വരുന്ന ലാറ്റിൻ വാക്കായ sinus എന്നു പരിഭാഷപ്പെടുത്തി. കാലക്രമത്തിൽ, ഇതു ലോപിച്ച് sine എന്നു മാത്രമായി.

*കോടിജ്യാ* എന്നു ആര്യഭടൻ വിളിച്ചിരുന്ന അളവ് cosine എന്നുമായി.

ഒരു ചിത്രം വരയ്ക്കാം:




ചിത്രത്തിൽനിന്ന്,

$$\frac{AB}{AC} = \sin 40° \qquad \frac{BC}{AC} = \cos 40°$$

എന്നു കാണാം. ഇതിൽനിന്ന്

$$AB = AC \times \sin 40°$$

$$BC = AC \times \cos 40°$$

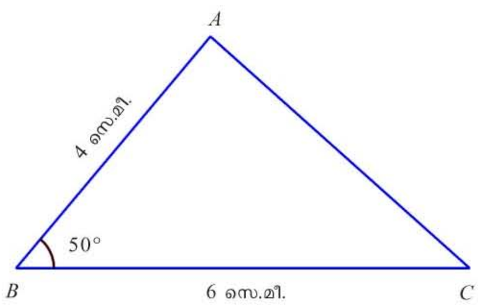
എന്നും എഴുതാം. ഇനി $AC = 6$ എന്നു പറഞ്ഞതും, പട്ടികയിൽനിന്നു കിട്ടുന്ന $\sin 40°$, $\cos 40°$ ഇവയും ഉപയോഗിച്ചാൽ

$$AB \approx 6 \times 0.6428 = 3.8568$$

$$BC \approx 6 \times 0.7660 = 4.596$$

എന്നു കിട്ടും. അതായത്, ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങളുടെ നീളം ഏകദേശം 3.9 സെന്റിമീറ്ററും, 4.6 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്.

- ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്ററും, 4 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്; അവയുടെ ഇടയിലുള്ള കോൺ 50°. ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവെത്രയാണ്?




പരപ്പളവു കണ്ടുപിടിക്കാൻ, ഏതെങ്കിലും വശത്തുനിന്നുള്ള ഉയരവും കൂടി വേണമല്ലോ. ചിത്രത്തിൽ, മുകളിലെ മൂലയിൽ നിന്നു ലംബം വരയ്ക്കാം :

### കേരളഗണിതം

കേരളത്തിൽ പതിനാലാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന മാധവൻ എന്ന ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനെക്കുറിച്ച് കേട്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ (ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ **വൃത്തങ്ങളുടെ അളവുകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **π കേരളത്തിൽ** എന്ന ഭാഗം). വൃത്തത്തിലെ ചാപത്തിന്റെ നീളത്തിൽനിന്ന് അതിന്റെ ഞാണിന്റെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ഒരു ശ്രേണി അദ്ദേഹം കണ്ടുപിടിച്ചിട്ടുണ്ട്. സംസ്കൃത ശ്ലോകമായി അദ്ദേഹം എഴുതിയത് ഇന്നത്തെ ഗണിതഭാഷയിലെഴുതിയാൽ ഇങ്ങനെയാകും:

$$x,$$

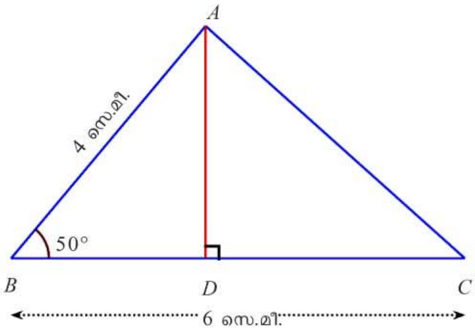
$$x - \frac{x^3}{1\times2\times3},$$

$$x - \frac{x^3}{1\times2\times3} + \frac{x^5}{1\times2\times3\times4\times5}$$

എന്നു തുടരുന്ന ശ്രേണിയിലെ സംഖ്യകൾ, $x$ റേഡിയൻ അളവുള്ള കോണിന്റെ sin അളവിനോട് അടുത്തടുത്തുവരും. കുറേക്കൂടി ചുരുക്കി എഴുതിയാൽ,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1\times2\times3} + \frac{x^5}{1\times2\times3\times4\times5} - \cdots$$

പതിനേഴാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഇംഗ്ലണ്ടിലെ ന്യൂട്ടൻ, ജർമനിയിലെ ലിബ്നീസ് *(Lebinitz)* എന്നിവർ ഈ വസ്തുത തന്നെ വീണ്ടും കണ്ടുപിടിക്കുകയുണ്ടായി.




ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്

$$\frac{1}{2} \times BC \times AD = \frac{1}{2} \times 6 \times AD = 3 \times AD$$

ആണല്ലോ. ഇതിൽ $AD$ എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

ചിത്രത്തിലെ $ABD$ എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽനിന്ന്

$$\frac{AD}{AB} = \sin 50°$$

എന്നു കാണാം. ഇതിൽ നിന്ന്

$$AD = AB \times \sin 50° = 4 \sin 50°$$

ഇനി പട്ടികയിൽ നിന്ന്

$$\sin 50° \approx 0.7660$$

എന്നു കണ്ടുപിടിക്കാം. അപ്പോൾ

$$AD \approx 4 \times 0.7660 = 3.064$$

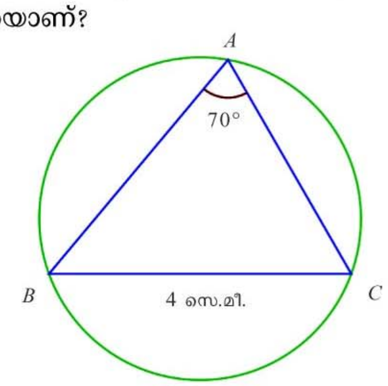
ഇനി പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ

$$3 \times AD \approx 3 \times 3.064 \approx 9.19$$

അതായത്, പരപ്പളവ് ഏകദേശം 9.19 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററാണ്.

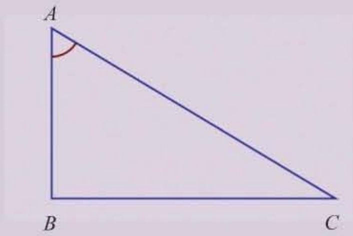
$B$ യിലെ കോൺ $50°$ യ്ക്കു പകരം $130°$ എന്നെടുത്ത് പരപ്പളവ് കണക്കാക്കി നോക്കൂ.

- ഒരു ത്രികോണത്തിലെ ഒരു കോൺ $70°$ യും അതിന്റെ എതിർവശം 4 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. അതിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം എത്രയാണ്?




### പൈഥഗോറസ് ബന്ധം

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:




ഈ മട്ടത്രികോണത്തിൽ, പൈഥഗോറസ് സിദ്ധാന്തമുപയോഗിച്ചാൽ

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

എന്നു കാണാമല്ലോ. ഈ സമവാക്യത്തെ $AC^2$ കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ

$$\frac{AB^2}{AC^2} + \frac{BC^2}{AC^2} = 1$$

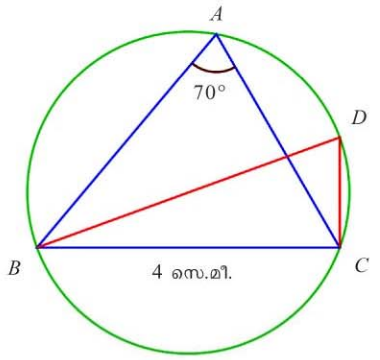
എന്നു കിട്ടും. ഇനി $\angle A$ യെ അടിസ്ഥാനമാക്കി നോക്കിയാൽ, ഇത്

$$\cos^2 A + \sin^2 A = 1$$

എന്നാകും. ഇത് ഏതു കോണിനും ശരിയാണല്ലോ. ($\cos A$, $\sin A$ എന്നിവയുടെ വർഗങ്ങൾ $\cos^2 A$, $\sin^2 A$ എന്നാണ് എഴുതുന്നത്.)

ഇതുപോലെ വ്യാസം കണ്ടുപിടിക്കേണ്ട ഒരു കണക്ക് അടുത്തിടെ ചെയ്തിട്ടുണ്ടോ? ഈ പാഠത്തിൽ മുമ്പു ചെയ്ത ചോദ്യങ്ങളെല്ലാം മറിച്ചുനോക്കൂ.

ഈ ചിത്രത്തിൽ, $B$ യിൽക്കൂടിയുള്ള വ്യാസം വരച്ച്, അതിന്റെ മറ്റേ അറ്റം $C$ യുമായി യോജിപ്പിച്ചുനോക്കാം:




$BCD$ ഒരു മട്ടത്രികോണമാണല്ലോ (എന്തുകൊണ്ട്?) കൂടാതെ $D$ യിലും $A$ യിലും ഉള്ള കോണുകൾ തുല്യവുമാണ് (കാരണം?) അതായത്, $\angle BDC = 70°$. ഇനി $BDC$ എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽനിന്ന്

$$\frac{BC}{BD} = \sin 70°$$

എന്നും അതിൽനിന്ന്

$$BD = \frac{BC}{\sin 70°} = \frac{4}{\sin 70°}$$

എന്നും കാണാമല്ലോ. ഇനി പട്ടിക നോക്കി $\sin 70° \approx 0.9397$ എന്നു കണ്ടുപിടിച്ചു കഴിഞ്ഞാൽ

$$BD = \frac{4}{0.9397} \approx 4.3$$

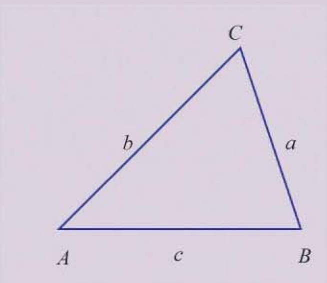
എന്നു (കാൽക്കുലേറ്റർ ഉപയോഗിച്ച്) കിട്ടും. അതായത്, വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം ഏകദേശം 4.3 സെന്റിമീറ്ററാണ്.

$A$ യിലെ കോൺ $110°$ ആണെങ്കിൽ വ്യാസം എത്രയായിരിക്കും?

- ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടുവശങ്ങൾ 7 സെന്റിമീറ്ററും 6 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്; അവയുടെ ഇടയിലുള്ള കോൺ $40°$. ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?

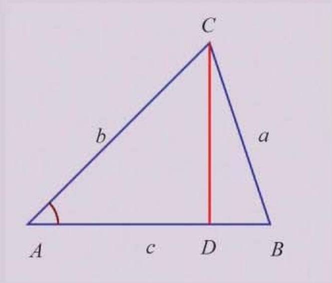
### പരപ്പളവ്

ഈ ത്രികോണം നോക്കൂ:




ഇതിന്റെ പരപ്പളവു കണ്ടുപിടിക്കണം.

അതിന് $C$ യിൽ നിന്ന് $AB$ യിലേക്കു ലംബം വരയ്ക്കാം




$$\text{പരപ്പളവ്} = \frac{1}{2} \times AB \times CD$$

ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്

$$CD = AC \sin A = b \sin A$$

എന്നു കാണാമല്ലോ. അപ്പോൾ

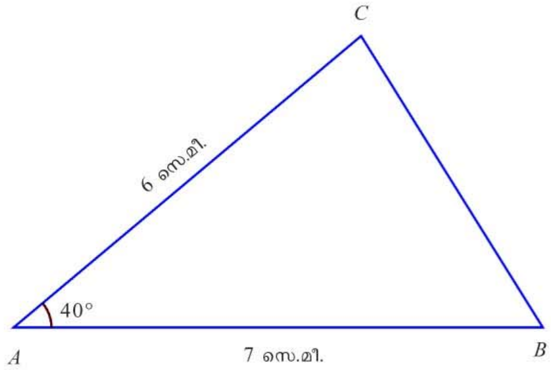
$$\text{പരപ്പളവ്} = \frac{1}{2}\, bc \sin A$$

എന്നാകും. മറ്റു മൂലകളിൽ നിന്നു ലംബം വരച്ചാൽ

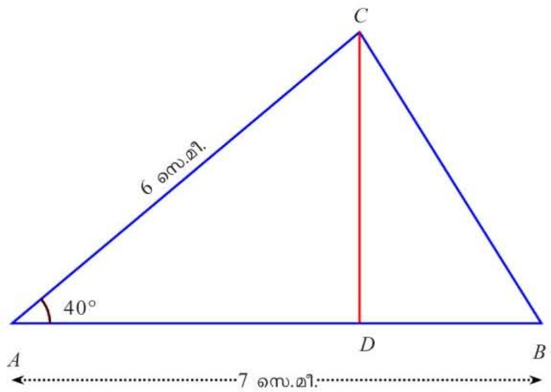
$$\text{പരപ്പളവ്} = \frac{1}{2}\, ca \sin B = \frac{1}{2}\, ab \sin C$$

എന്നും കിട്ടും.

ഇതെല്ലാം ഒരേ സംഖ്യയാണല്ലോ. ഇക്കാര്യം ഉപയോഗിച്ച് വശങ്ങളും കോണുകളും തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധം കണ്ടുപിടിക്കാമോ?




$BC$ യുടെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കാൻ, $C$ യിൽനിന്ന് $AB$ യിലേക്കു ലംബം വരയ്ക്കുക എന്നതാണ് സൂത്രം.




ഇപ്പോൾ $BCD$ എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽ നിന്ന്

$$BC^2 = BD^2 + DC^2$$

ഇനി $BD$ യും $DC$ യും കണ്ടുപിടിക്കാം.

$ACD$ എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽനിന്ന്

$$DC = AC \sin 40° \approx 6 \times 0.6428 \approx 3.86$$

എന്നു കണ്ടുപിടിക്കാം. കൂടാതെ ഇതേ ത്രികോണത്തിൽനിന്നു തന്നെ

$$AD = AC \cos 40° \approx 6 \times 0.7660 \approx 4.60$$

എന്നു കാണാം. അപ്പോൾ

$$BD = AB - AD \approx 7 - 4.6 = 2.4$$

ഇനി

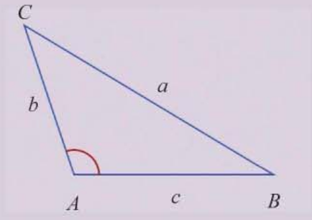
$$BC = \sqrt{BD^2 + DC^2} \approx \sqrt{3.86^2 + 2.4^2} = 4.54$$

എന്നു കാണാമല്ലോ. അതായത്, $BC$ യുടെ നീളം ഏകദേശം 4.5 സെന്റിമീറ്ററാണ്.

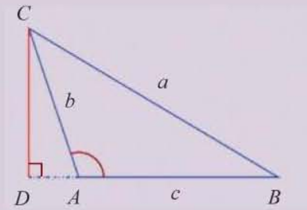
$A$ യിലെ കോൺ 110° ആണെങ്കിൽ, $BC$ യുടെ നീളം എത്രയായിരിക്കും?

### വലിയ കോണുകൾ

ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?




ഇതിൽ $C$ യിൽ നിന്ന് ലംബം വരച്ചാൽ ഇങ്ങനെയാണ് കിട്ടുക




ഇവിടെയും

$$\text{പരപ്പളവ്} = \frac{1}{2} \times AB \times CD$$

എന്നു കിട്ടും. പക്ഷേ, $CD$ യെ $b \sin A$ എന്നെഴുതാൻ കഴിയില്ലല്ലോ. (എന്തുകൊണ്ട്?)

എന്നാൽ $ADC$ എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽ

$$\angle CAD = 180° - \angle CAB$$

എന്നെഴുതാം. അപ്പോൾ,

$$CD = b \sin (180° - \angle CAB)$$

ഇനി $\angle CAB$ യെ $\angle A$ എന്നെഴുതിയാൽ (ഇതാണല്ലോ നമ്മുടെ ത്രികോണത്തിനകത്തെ കോൺ)

$$\text{പരപ്പളവ്} = \frac{1}{2}\, bc \sin (180 - A)$$

എന്നു കിട്ടും

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ $\Delta ABC$ യിൽ $\angle A < 90°$ ആണെങ്കിൽ, പരപ്പളവ് $\frac{1}{2}\, bc \sin A$; അതല്ല, $\angle A > 90°$ ആണെങ്കിൽ, പരപ്പളവ് $\frac{1}{2}\, bc \sin (180 - A)$

ഇനി $\angle A = 90°$ ആണെങ്കിലോ?

ഇനിയുള്ള കണക്കുകൾ നിങ്ങൾക്കുള്ളതാണ്.

- പടം വരയ്ക്കാതെ, പട്ടിക നോക്കാതെ

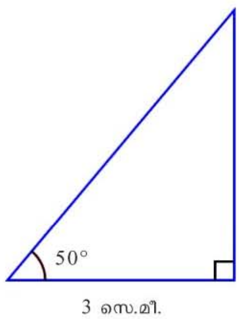
$$\sin 1°, \cos 1°, \sin 2°, \cos 2°$$

എന്നീ സംഖ്യകളെ വലിപ്പക്രമത്തിൽ എഴുതാമോ?

- ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്ററും, 4 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്; അവയുടെ ഇടയിലുള്ള കോൺ 130°. ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവെത്രയാണ്?
- ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു കോൺ 110° യും അതിന്റെ എതിർവശം 4 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. അതിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം എത്രയാണ്?
- ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടുവശങ്ങൾ 7 സെന്റിമീറ്ററും 6 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. അവയുടെ ഇടയിലുള്ള കോൺ 140°. ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?
- ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങൾ 6 സെന്റിമീറ്ററും, 4 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്; അവ തമ്മിലുള്ള കോൺ 35° യും ആണ്. ഈ സാമാന്തരികത്തിന്റെ വികർണങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാണ്?

## മറ്റൊരളവ്

ഒരു മട്ടത്രികോണം വരയ്ക്കണം. ചെറുവശങ്ങളിലൊന്നിന്റെ നീളം 3 സെന്റിമീറ്റർ. അതിന്മേലുള്ള ഒരു കോൺ 50°



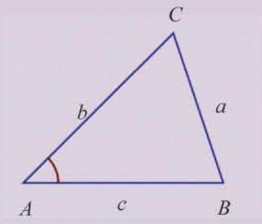

വരയ്ക്കാൻ വിഷമമില്ല, അല്ലേ? ഇതിന്റെ രണ്ടാം ചെറുവശത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?

പട്ടികനോക്കി $\cos 50°$ കണ്ടുപിടിച്ചാൽ, കർണം കണ്ടുപിടിക്കാം; തുടർന്ന് പൈഥഗോറസ് സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ചു മൂന്നാംവശവും കണ്ടുപിടിക്കാം.

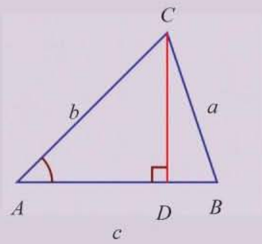
കുറച്ചുകൂടി എളുപ്പത്തിൽ ഇതു ചെയ്യാൻ മറ്റൊരു പട്ടിക ഉപയോഗിക്കാം. മട്ടത്രികോണങ്ങളിൽ, ഒരു കോണിന്റെ എതിർവശത്തെ സമീപവശം കൊണ്ടു ഹരിച്ചുകിട്ടുന്ന സംഖ്യകളും പട്ടികപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്.

### മൂന്നാം വശം

ഈ ത്രികോണത്തിൽ $b$, $c$ എന്നീ നീളങ്ങളും, $A$ എന്ന കോണും അറിയാമെങ്കിൽ $a$ എന്ന വശം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതെങ്ങനെ?




അതിനും, $C$ യിൽനിന്നുള്ള ലംബം വരച്ചാൽ മതി.




$ADC$ എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽനിന്ന്

$AD = b \cos A$ ,  $CD = b \sin A$

എന്നു കാണാം. ഇനി $BDC$ എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽനിന്ന്

$$a^2 = b^2 \sin^2 A + (c - b \cos A)^2$$

എന്നു കിട്ടും. ഇതിൽ

$$(c - b \cos A)^2 = c^2 + b^2 \cos^2 A - 2bc \cos A$$

എന്നെഴുതി,

$$b^2 \sin^2 A + b^2 \cos^2 A = b^2 (\sin^2 A + \cos^2 A) = b^2$$

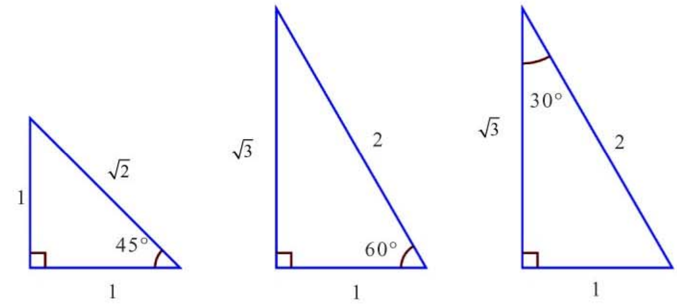
എന്നും കണ്ടാൽ

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

എന്നു കിട്ടും.

ഈ സംഖ്യയെ കോണിന്റെ ടാൻജെന്റ് (tangent) എന്നാണ് പറയുന്നത്. ചുരുക്കി tan എന്ന് എഴുതാം.

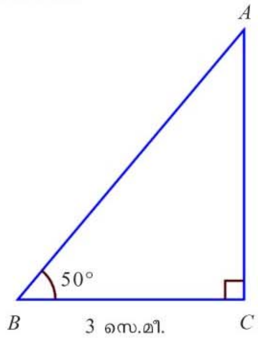
ഉദാഹരണമായി,നാം നേരത്തെ കണ്ട ചില ത്രികോണങ്ങൾ നോക്കാം:




tan 45° = 1 $\qquad$ $\tan 60° = \sqrt{3}$ $\qquad$ $\tan 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

എന്നെല്ലാം കാണാമല്ലോ.

നമ്മുടെ പ്രശ്നത്തിലേക്കു മടങ്ങാം:




ഇപ്പോൾ പറഞ്ഞതനുസരിച്ച്,

$$\frac{AC}{BC} = \tan 50°$$

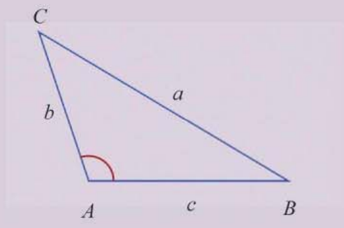
എന്നു കാണാം. ഇതിൽനിന്ന്

$$AC = BC \times \tan 50° \approx 3 \times 1.1918 = 3.5754 \approx 3.6$$

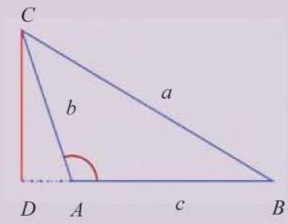
എന്ന് പടവും പട്ടികയും ഉപയോഗിച്ചു കണ്ടുപിടിക്കാം. അതായത്, നമുക്കാവശ്യമായ വശത്തിന്റെ നീളം 3.6 സെന്റിമീറ്റർ.

കോണിന്റെ tan അളവുപയോഗിക്കുന്ന ഒരു സന്ദർഭംകൂടി നോക്കൂ:

### കോൺ വലുതായാൽ




$b$, $c$ എന്നീ വശങ്ങളും $\angle A$ യും അറിയാമെങ്കിൽ, മൂന്നാംവശം $a$ കണ്ടുപിടിക്കാൻ നേരത്തെ ഉപയോഗിച്ച മാർഗം, ഈ ചിത്രത്തിലും ശരിയാകുമോ?




എന്തൊക്കെ മാറ്റങ്ങളുണ്ടാകും? $ADC$ എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽ നിന്ന്

$$AD = b\cos\,(180 - A)$$

$$CD = b\sin\,(180 - A)$$

എന്നാകും; കൂടാതെ $BDC$ എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽ

$$BD = c + b\cos(180 - A)$$

എന്നാകും, ഈ മാറ്റങ്ങൾ വരുത്തിയാൽ, നേരത്തെ കണ്ട സമവാക്യം

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos(180 - A)$$

എന്നാകും.

$\angle A > 90°$ ആയ ത്രികോണമാണ് ഇവിടെ കണ്ടത്. $\angle A = 90°$ ആയാലോ?

## പുതിയ അർത്ഥങ്ങൾ

ഒരു കോണിന്റെ sin, cos, tan എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കാൻ, ആദ്യം ആ കോൺ ഉൾപ്പെടുന്ന മട്ടത്രികോണം വരയ്ക്കണം. കോൺ $90°$ യേക്കാൾ ചെറുതാണെങ്കിലേ ഇതു സാധിക്കൂ. അതിനാൽ, ഇത്തരം കോണുകൾക്കു മാത്രമാണ് തൽക്കാലം ത്രികോണമിതി അളവുകളുള്ളത്.

അതുകൊണ്ടു തന്നെ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവു കണ്ടുപിടിക്കാനും, വശങ്ങളുടെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കാനുമെല്ലാം കോണിന്റെ വലിപ്പമനുസരിച്ച്, വ്യത്യസ്ത സൂത്രവാക്യങ്ങൾ വേണ്ടിവരുന്നു. ഇതൊഴിവാക്കാൻ, $90°$ യേക്കാൾ വലിയ കോണുകൾക്കും ത്രികോണമിതി അളവുകൾ പുതുതായി നിർവചിക്കണം. അത് ഇങ്ങനെയാണ്.

$$\sin (180° - x) = \sin x$$

$$\cos (180° - x) = -\cos x$$

കൂടാതെ

$$\sin 90° = 1$$

$$\cos 90° = 0$$

എന്നും നിർവചനം നീട്ടും. (കോൺ $90°$ യോട് അടുക്കുന്തോറും, അതിന്റെ എതിർവശത്തിനും സമീപവശത്തിനും എന്തു സംഭവിക്കുന്നു എന്നു നോക്കുക)

അപ്പോൾ കോണുകൾ $A, B, C$ യും, വശങ്ങൾ $a$, $b$, $c$ യും ആയ ഏതുതരം ത്രികോണത്തിനും

$$\text{പരപ്പളവ്} = \frac{1}{2}\, bc \sin A$$

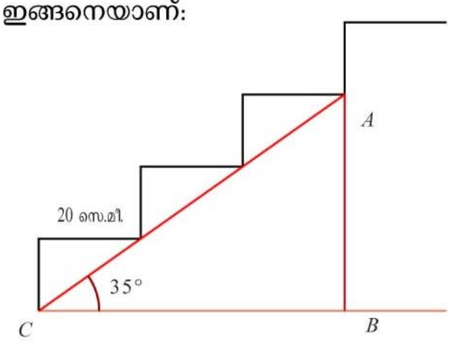
എന്നും

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

എന്നുമെല്ലാം ഒറ്റ സൂത്രവാക്യത്തിൽ കാര്യങ്ങൾ ഒതുക്കാം.

ചിത്രത്തിലെ ആൾ നിൽക്കുന്നത്, എത്ര ഉയരത്തിലാണെന്നു കണ്ടുപിടിക്കണം.

പടിക്കെട്ടിന്റെ അളവുകൾ ഇങ്ങനെയാണ്:




കണ്ടുപിടിക്കേണ്ട ഉയരം $AB$ യാണല്ലോ.

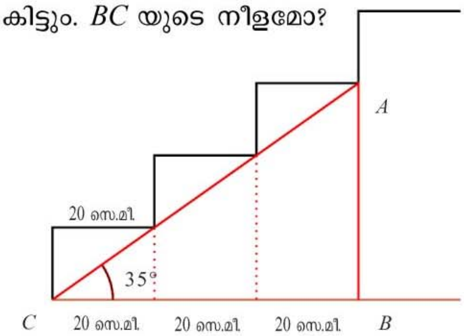
ചിത്രത്തിൽനിന്ന്

$$AB = BC \times \tan 35°$$

ഇതിൽ

$$\tan 35° \approx 0.7002$$

എന്നു പട്ടികയിൽ നിന്നു കിട്ടും. $BC$ യുടെ നീളമോ?



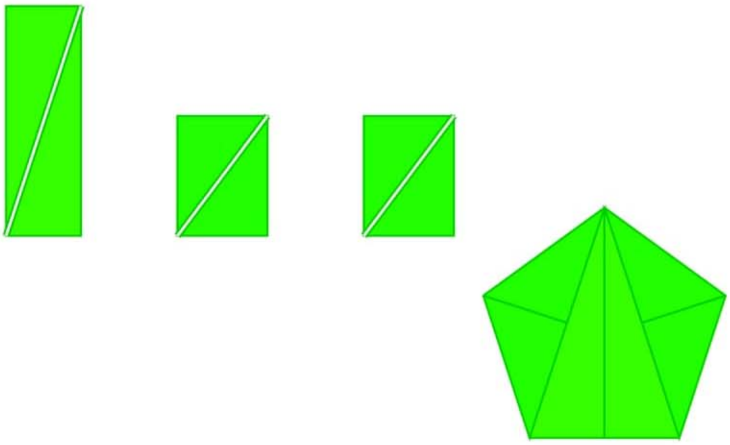

ഈ ചിത്രത്തിൽനിന്നു $BC$ യുടെ നീളം 60 സെന്റിമീറ്ററാണെന്നു കാണാം. അപ്പോൾ

$$AB = BC \times \tan 35° \approx 60 \times 0.7002 = 42.012$$

അതായത്, ഉയരം ഏകദേശം 42 സെന്റിമീറ്ററാണ്.

സ്വയം ചെയ്തുനോക്കാനായി ചില കണക്കുകളിതാ :

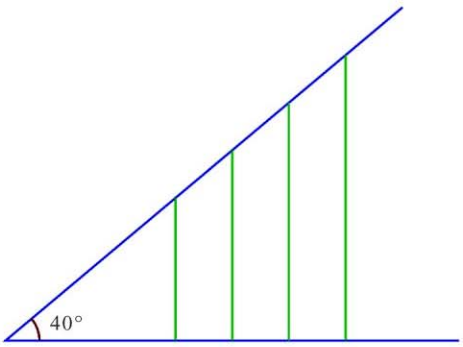
- ഒരു കോൺ $50°$ യും ഒരു വികർണം 5 സെന്റിമീറ്ററുമായി എത്ര സമഭുജസാമാന്തരികം ഉണ്ട്? അവയുടെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?
- മതിലിന്മേൽ ഒരു കമ്പ് ചാരി വച്ചിരിക്കുന്നു. കമ്പിന്റെ ചുവട് മതിലിൽ നിന്ന് 2 മീറ്റർ അകലെയാണ്; കമ്പും തറയുമായുള്ള കോൺ $40°$ ആണ്. കമ്പിന്റെ മുകളറ്റം, തറയിൽനിന്ന് എത്ര ഉയരത്തിലാണ്?
- മൂന്നു ചതുരങ്ങൾ വികർണത്തിലൂടെ മുറിച്ചു ത്രികോണങ്ങളാക്കി, ചുവടെക്കാണുന്നതുപോലെ ചേർത്തു വച്ച്, ഒരു സമപഞ്ചഭുജമുണ്ടാക്കണം:



30 സെ.മീ.

ചതുരങ്ങളുടെ നീളവും വീതിയും എത്രയായിരിക്കണം?

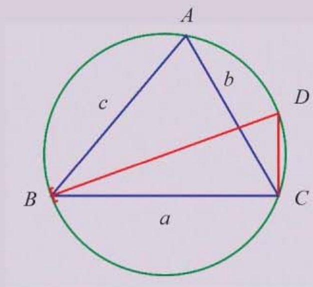
- ചിത്രത്തിലെ കുത്തനെയുള്ള വരകൾ 1 സെന്റിമീറ്റർ ഇടവിട്ടാണ് വരച്ചിരിക്കുന്നത്:




അവയുടെ ഉയരങ്ങൾ സമാന്തരശ്രേണിയിലാണെന്നു തെളിയിക്കുക. പൊതുവ്യത്യാസം എത്രയാണ്?

### ത്രികോണവും വൃത്തവും

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



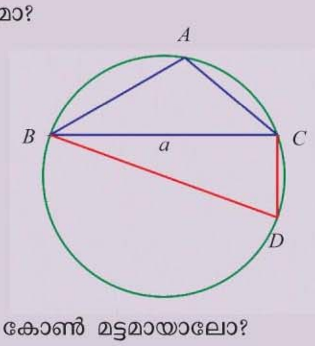

$BD$ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസമാണ്. അപ്പോൾ $\angle BCD = 90°$ യും $\angle D = \angle A$ യും ആണല്ലോ. വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം $d$ എന്നെടുത്താൽ, $BCD$ എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽനിന്ന്

$$a = d \sin D \ = d \sin A$$

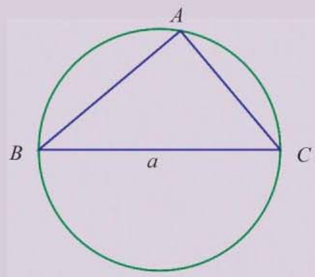
ഇതുപോലെ $b = d \sin B$, $c = d \sin C$ എന്നു കാണാം. അപ്പോൾ എന്തു കിട്ടി?

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = d$$

ത്രികോണത്തിലെ ഒരു കോൺ $90°$യിൽ കൂടുതലായാൽ ഇതു ശരിയാകുമോ?

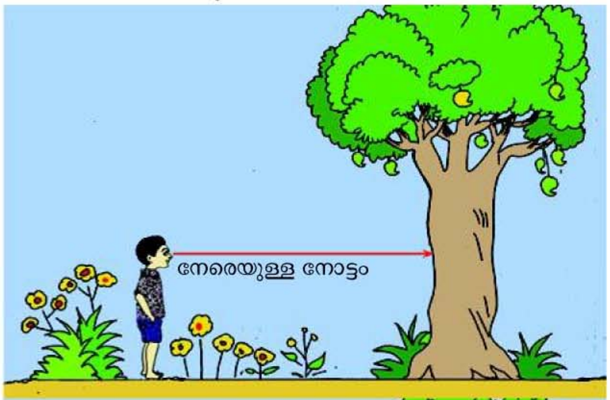


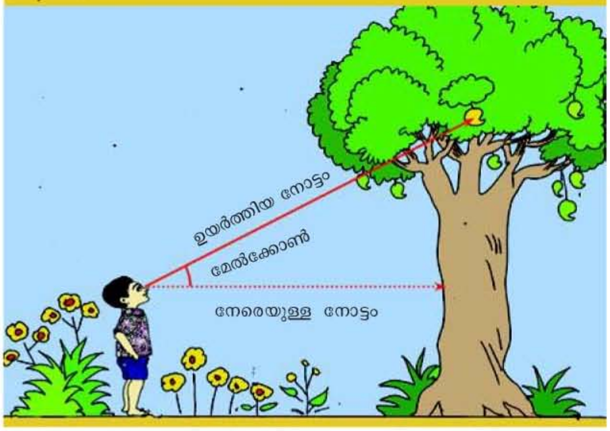

ഒരു കോൺ മട്ടമായാലോ?



## അകലങ്ങളും ഉയരങ്ങളും

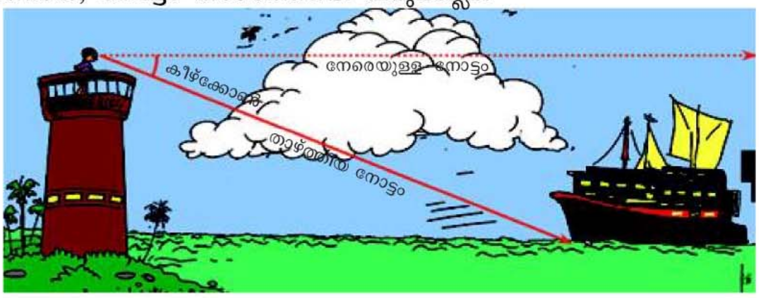
നമ്മേക്കാൾ ഉയരത്തിലുള്ളവ കാണാൻ, തല അൽപം ഉയർത്തണമല്ലോ; ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:




സാധാരണയായി നമ്മുടെ നോട്ടത്തിന്റെ പാത നിലത്തിനു സമാന്തരമാണ്; ഉയരത്തിലുള്ളവയെ നോക്കുമ്പോൾ, ഇത് മേൽപ്പോട്ടുയരും. ഈ രണ്ടു വരകൾ തമ്മിലുള്ള കോണിനെ മേൽക്കോൺ (*angle of elevation*) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഇതുപോലെ ഉയരത്തിൽ നിൽക്കുമ്പോൾ താഴെയുള്ളവയെ കാണാൻ, നോട്ടം താഴ്ത്തേണ്ടി വരുമല്ലോ.




ഇങ്ങനെയുണ്ടാകുന്ന കോണിനെ കീഴ്ക്കോൺ (*angle of depression*) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഇത്തരം കോണുകൾ അളക്കുന്നത് ക്ലൈനോമീറ്റർ (*clinometer*) എന്ന ഉപകരണം ഉപയോഗിച്ചാണ്. നേരിട്ടളക്കാൻ കഴിയാത്ത അകലങ്ങളും ഉയരങ്ങളുമെല്ലാം ക്ലൈനോമീറ്ററുപയോഗിച്ചു കോണളന്നും, sin ഉം cos ഉം എല്ലാം ഉപയോഗിച്ചു കണക്കുകൂട്ടിയുമാണ് കണ്ടുപിടിക്കുന്നത്.

### പ്രശ്നപരിഹാരം

കോണുകളുടെ അളവുകൾ $A$, $B$, $C$ യും വശങ്ങളുടെ നീളം $a$, $b$, $c$ യും ആയ ത്രികോണത്തിൽ (അത് ഏതു തരത്തിൽപ്പെട്ടതായാലും)

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

ആണെന്നു കണ്ടല്ലോ. മറ്റൊരു തരത്തിൽപ്പറഞ്ഞാൽ

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$$

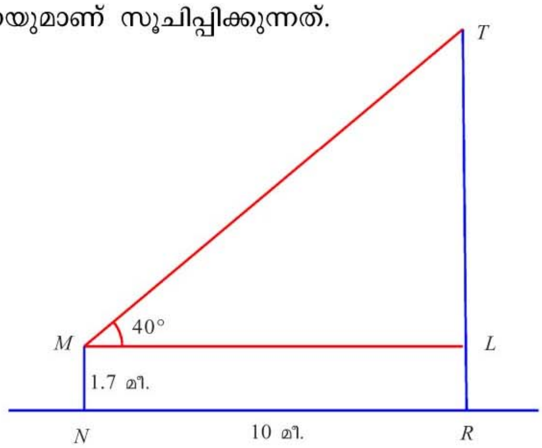
അതായത്, ഏതു ത്രികോണത്തിന്റെയും വശങ്ങളുടെ നീളത്തിന്റെ അംശബന്ധം, കോണുകളുടെ sin അളവുകളുടെ അംശബന്ധത്തിനു തുല്യമാണ്.

ഒരേ കോണുകളുള്ള പല പല ത്രികോണങ്ങളിൽ, വശങ്ങളുടെ നീളം തമ്മിലുള്ള (മാറാത്ത) അംശബന്ധം എന്താണ് എന്ന അന്വേഷണത്തിലാണല്ലോ തുടങ്ങിയത്. ഇപ്പോൾ അതിന് ഉത്തരം കിട്ടിയില്ലേ?

ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കാം:

- ഒരു മരത്തിന്റെ ചുവട്ടിൽനിന്ന് 10 മീറ്റർ അകലെ നിൽക്കുന്ന ഒരാൾ, മരത്തിന്റെ മുകളറ്റം 40° മേൽക്കോണിൽ കാണുന്നു, അയാളുടെ ഉയരം 1.7 മീറ്ററാണ്. മരത്തിന് എന്തുയരമുണ്ട്?

  ചിത്രത്തിൽ $MN$ എന്ന വര നോക്കുന്ന ആളിനെയും $TR$ മരത്തിനെയുമാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.




ചിത്രത്തിൽനിന്ന് (പട്ടികയും ഉപയോഗിച്ച്),

$$TL = ML \tan 40° \approx 10 \times 0.8390 = 8.39$$

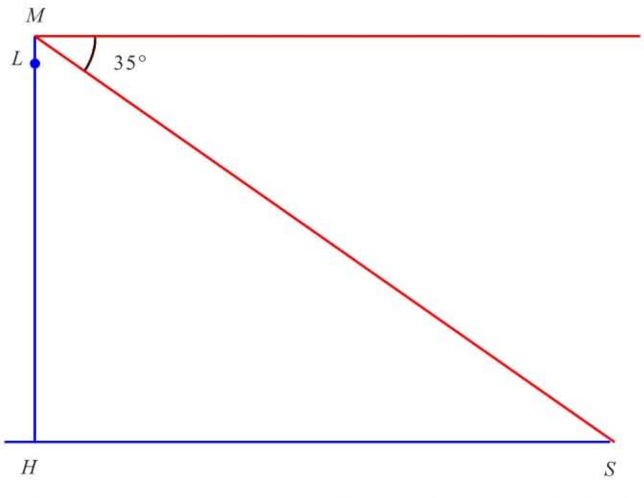
എന്നു കാണാം. അപ്പോൾ

$$TR = TL + LR = TL + MN \approx 8.39 + 1.7 = 10.09$$

അതായത്, മരത്തിന്റെ ഉയരം ഏകദേശം 10.09 മീറ്ററാണ്.

- 1.8 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരാൾ 25 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരു ലൈറ്റ്ഹൗസിന്റെ മുകളിൽനിന്ന് നോക്കിയപ്പോൾ, 35° കീഴ്ക്കോണിൽ ഒരു കപ്പൽ കണ്ടു. അത് ലൈറ്റ്ഹൗസിന്റെ ചുവട്ടിൽനിന്ന് എത്ര അകലെയാണ്?

  ഒരു ചിത്രം വരയ്ക്കാം:




ഇതിൽ $LH$ ലൈറ്റ്ഹൗസും, $ML$ അതിനു മുകളിൽ നിൽക്കുന്ന ആളുമാണ്. $S$ ആണു കപ്പൽ. കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത് $HS$

### സർവസമത

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു വശങ്ങളോ, രണ്ടു വശങ്ങളും ഒരു ഉൾക്കോണുമോ, ഒരു വശവും അതിലെ രണ്ട് കോണുകളുമോ പറഞ്ഞു കഴിഞ്ഞാൽ, മറ്റെല്ലാ അളവുകളും നിശ്ചയിക്കപ്പെട്ടു കഴിഞ്ഞു എന്ന് എട്ടാംക്ലാസിലെ **സർവസമത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടല്ലോ?

ഇവ എങ്ങനെ കണക്കാക്കും?

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നുവശങ്ങൾ $a, b, c$ അറിയാമെങ്കിൽ

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

തുടങ്ങിയ ബന്ധങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് $A, B, C$ എന്നീ കോണുകൾ കണക്കാക്കാം.

രണ്ട് വശങ്ങൾ $a, b$ യും, ഉൾക്കോൺ $C$ യും അറിയാമെങ്കിൽ

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

എന്ന സമവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് $c$ യും തുടർന്ന് ആദ്യം പറഞ്ഞത് പോലെ മറ്റു കോണുകളും കണക്കാക്കാം.

$a$ എന്ന വശവും അതിലെ $B, C$ എന്നീ കോണുകളുമാണ് അറിയുന്നതെങ്കിൽ ആദ്യം $A = 180 - (B + C)$ എന്നും തുടർന്ന്

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

തുടങ്ങിയ ബന്ധങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് $b$ യും $c$ യും കണ്ടുപിടിക്കാം. അങ്ങനെ ത്രികോണമിതിയുടെ സഹായത്തോടെ ത്രികോണനിശ്ചയം പൂർണമാക്കാം.

പറഞ്ഞിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളനുസരിച്ച്

$$MH = ML + LH = 25 + 1.8 = 26.8$$

കൂടാതെ $\angle HMS = 55°$

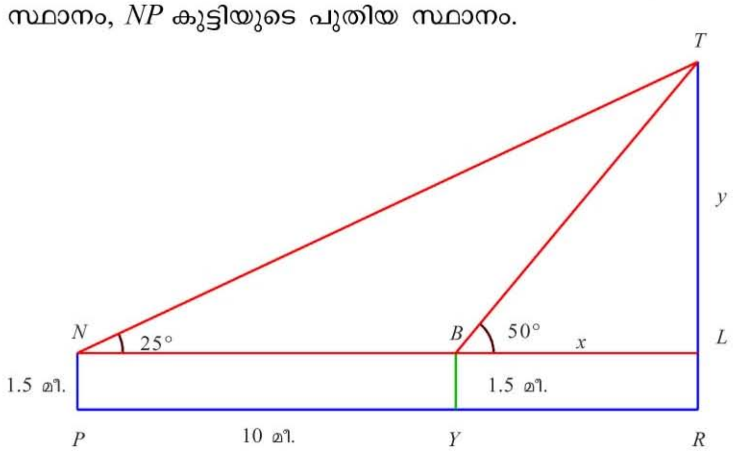
അപ്പോൾ $MHS$ എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽ നിന്ന്

$$HS = MH \tan 55° \approx 26.8 \times 1.4281 \approx 38.27$$

അതായത്, ലൈറ്റ് ഹൗസിന്റെ ചുവട്ടിൽനിന്ന് ഏകദേശം 38.27 മീറ്റർ അകലെയാണ് കപ്പൽ.

- പുഴയോരത്തു നിൽക്കുന്ന ഒരു കുട്ടി, അക്കരയോടു ചേർന്നു നിൽക്കുന്ന ഒരു മരത്തിന്റെ മുകളറ്റം 50° മേൽക്കോണിൽ കണ്ടു. 10 മീറ്റർ പുറകോട്ടു മാറി നോക്കിയപ്പോൾ അത് 25° മേൽക്കോണിലാണ് കണ്ടത്. കുട്ടിയുടെ ഉയരം 1.5 മീറ്റർ. പുഴയുടെ വീതിയും, മരത്തിന്റെ ഉയരവും കണക്കാക്കുക.

ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ $TR$ മരം, $BY$ കുട്ടി ആദ്യം നിന്ന സ്ഥാനം, $NP$ കുട്ടിയുടെ പുതിയ സ്ഥാനം.




കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത്, $YR$ ഉം $TR$ ഉം ആണ്. ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്

### ചരിവും വിരിവും

കോണുകളെ വിരിവിന്റെ അളവുകളായി കാണുന്ന ആവശ്യങ്ങളിൽ നിന്നാണ് sin, cos എന്നീ അളവുകളുണ്ടായതെന്ന് കണ്ടല്ലോ. ചരിവിന്റെ അളവായി കോണിനെ കാണുന്ന രീതിയെ ഇതുമായി ബന്ധപ്പെടുത്തുമ്പോഴാണ് tan ഉണ്ടാകുന്നത്. (ഉയരത്തെ അകലം കൊണ്ടു ഹരിച്ചു ചരിവളക്കുന്ന പഴയ രീതി തന്നെയാണല്ലോ അതിന്റെ നിർവചനം)

ഏ.ഡി. ഒമ്പതാം നൂറ്റാണ്ടിലെ അഹമ്മദ് ഇബിൻ അബ്ദുള്ള അൽ മൊർവാസി എന്ന അറബ് ഗണിതകാരനാണ് ഇത്തരമൊരു ബന്ധം അവതരിപ്പിച്ചതും, tan ന്റെ ഒരു പട്ടിക ഉണ്ടാക്കിയതും.

ഇതിന് tangent എന്ന പേരു വന്നത് പതിനാറാം നൂറ്റാണ്ടിലാണ്.

$YR = BL \qquad TR = TL + LR = TL + 1.5$

ആയതിനാൽ, $BL$ ഉം $TL$ ഉം കണ്ടുപിടിച്ചാൽ മതി.

$$BL = x \qquad TL = y$$

എന്നെടുത്താൽ $BTL$ എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽനിന്ന്

$$y = x \tan 50° \approx 1.1918x$$

എന്നും, $NTL$ എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽനിന്ന്

$$y = (x + 10) \tan 25° \approx 0.4663\ (x + 10) = 0.4663x + 4.663$$

എന്നും കിട്ടും.

അപ്പോൾ

$$1.1918x \approx 0.4663x + 4.663$$

എന്നാകുമല്ലോ.

ഇതിൽനിന്ന്

$$x \approx \frac{4.663}{0.7255} \approx 6.427$$

എന്ന് (കാൽക്കുലേറ്റർ ഉപയോഗിച്ച്) കണ്ടുപിടിക്കാം. ഇതുപയോഗിച്ച്

$$y \approx 1.1918 \times 6.427 \approx 7.659$$

എന്നും കാണാം. അതായത്, പുഴയുടെ വീതി ഏകദേശം 6.43 മീറ്ററും, മരത്തിന്റെ ഉയരം ഏകദേശം 7.66 മീറ്ററുമാണ്.

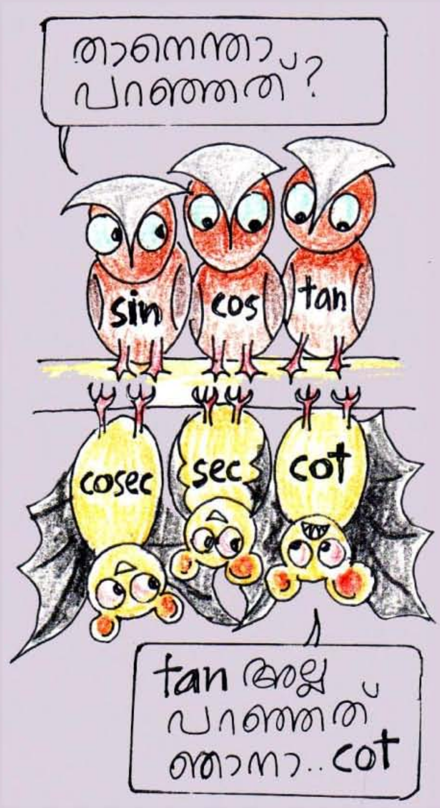
ഇനി ചില കണക്കുകൾ സ്വയം ചെയ്തുനോക്കാമല്ലോ:

- സൂര്യൻ 40° മേൽക്കോണിൽ കാണപ്പെടുമ്പോൾ, ഒരു മരത്തിന്റെ നിഴലിന്റെ നീളം 18 മീറ്ററാണ്. മരത്തിന്റെ ഉയരം എത്രയാണ്?
- ഒരു ഗോപുരത്തിന്റെ ചുവട്ടിൽ നിൽക്കുന്ന 1.75 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരാൾ, 40 മീറ്റർ അകലെയുള്ള ഒരു കുന്നിന്റെ മുകളറ്റം 60° മേൽക്കോണിൽ കാണുന്നു. ഗോപുരത്തിന്റെ മുകളിൽ നിന്നു നോക്കിയപ്പോൾ, അത് 50° മേൽക്കോണിലാണ് കണ്ടത്. കുന്നിന്റെയും, ഗോപുരത്തിന്റെയും ഉയരം കണക്കാക്കുക.
- പണിതുകൊണ്ടിരിക്കുന്ന ഒരു കെട്ടിടത്തിന്റെ മുകൾഭാഗം, 1.5 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരു കുട്ടി 30° മേൽക്കോണിൽ കണ്ടു. 10 മീറ്റർകൂടി ഉയർത്തി, കെട്ടിടം പണിതീർത്തപ്പോൾ, അയാൾ അതേ സ്ഥാനത്തുനിന്ന് 60° മേൽക്കോണിലാണ് മുകൾഭാഗം കണ്ടത്. കെട്ടിടത്തിന്റെ ഉയരം എത്രയാണ്?
- 1.8 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരാൾ, ഒരു ടെലിഫോൺ ടവറിന്റെ മുകളിൽനിന്നു നോക്കുമ്പോൾ, 10 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരു കെട്ടിടത്തിന്റെ മുകളറ്റം 40° കീഴ്ക്കോണിലും. അതിന്റെ ചുവട് 60° കീഴ്ക്കോണിലും കണ്ടു. ടവറിന്റെ ഉയരം എത്രയാണ്? അത് കെട്ടിടത്തിൽനിന്ന് എത്ര അകലെയാണ്?

### മറ്റളവുകൾ

ഒരു കോൺ ഉൾപ്പെടുന്ന മട്ടത്രികോണം വരച്ച്, അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം തമ്മിൽ പല രീതികളിൽ ഹരിച്ചു sin, cos, tan എന്നീ അളവുകൾ ഉണ്ടാക്കുന്നതു കണ്ടു. വശങ്ങൾ തമ്മിൽ വേറെയും ഹരണം ബാക്കിയുണ്ടല്ലോ. അവയ്ക്കും ത്രികോണമിതിയിൽ പേരുകളുണ്ട്.

ഒരു കോണിന്റെ sin, cos എന്നിവയുടെ വ്യുൽക്രമങ്ങൾക്ക്, കൊസീക്കന്റ് (cosecant), സീക്കന്റ് (secant) എന്നിങ്ങനെയാണ് പേരുകൾ; tan ന്റെ വ്യുൽക്രമത്തിന്, കോടാൻജെന്റ് (cotangent) എന്നും. ഇവയെ ചുരുക്കി, cosec, sec, cot എന്നിങ്ങനെയാണ് എഴുതുന്നത്.



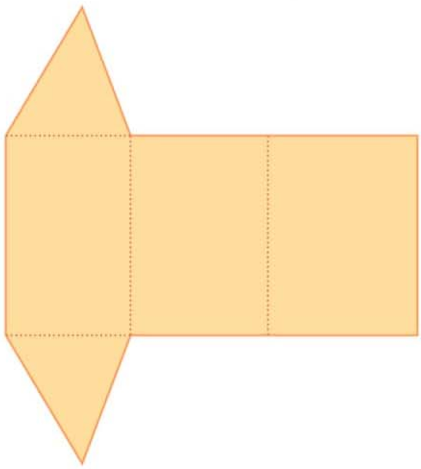
# ത്രികോണമിതി അളവുകൾ

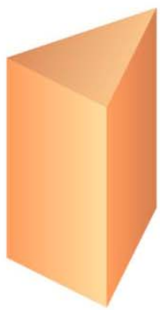
| കോൺ | sin | cos | tan | കോൺ | sin | cos | tan |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0°** | 0.0000 | 1.0000 | 0.0000 | **46°** | 0.7193 | 0.6947 | 1.0355 |
| **1°** | 0.0175 | 0.9998 | 0.0175 | **47°** | 0.7314 | 0.6820 | 1.0724 |
| **2°** | 0.0349 | 0.9994 | 0.0349 | **48°** | 0.7431 | 0.6891 | 1.1106 |
| **3°** | 0.0523 | 0.9986 | 0.0524 | **49°** | 0.7547 | 0.6561 | 1.1504 |
| **4°** | 0.0698 | 0.9976 | 0.0699 | **50°** | 0.7660 | 0.6428 | 1.1918 |
| **5°** | 0.0872 | 0.9962 | 0.0875 | **51°** | 0.7771 | 0.6293 | 1.2349 |
| **6°** | 0.1045 | 0.9945 | 0.1051 | **52°** | 0.7880 | 0.6157 | 1.2799 |
| **7°** | 0.1219 | 0.9925 | 0.1228 | **53°** | 0.7986 | 0.6018 | 1.3270 |
| **8°** | 0.1392 | 0.9903 | 0.1405 | **54°** | 0.8090 | 0.5878 | 1.3764 |
| **9°** | 0.1564 | 0.9877 | 0.1584 | **55°** | 0.8192 | 0.5736 | 1.4281 |
| **10°** | 0.1736 | 0.9848 | 0.1763 | **56°** | 0.8290 | 0.5592 | 1.4826 |
| **11°** | 0.1908 | 0.9816 | 0.1944 | **57°** | 0.8387 | 0.5446 | 1.5399 |
| **12°** | 0.2079 | 0.9781 | 0.2126 | **58°** | 0.8480 | 0.5299 | 1.6003 |
| **13°** | 0.2250 | 0.9744 | 0.2309 | **59°** | 0.8572 | 0.5150 | 1.6643 |
| **14°** | 0.2419 | 0.9703 | 0.2493 | **60°** | 0.8660 | 0.5000 | 1.7321 |
| **15°** | 0.2588 | 0.9659 | 0.2679 | **61°** | 0.8746 | 0.4848 | 1.8040 |
| **16°** | 0.2756 | 0.9613 | 0.2867 | **62°** | 0.8829 | 0.4695 | 1.8807 |
| **17°** | 0.2924 | 0.9563 | 0.3057 | **63°** | 0.8910 | 0.4540 | 1.9626 |
| **18°** | 0.3090 | 0.9511 | 0.3249 | **64°** | 0.8988 | 0.4384 | 2.0503 |
| **19°** | 0.3256 | 0.9455 | 0.3443 | **65°** | 0.9063 | 0.4226 | 2.1445 |
| **20°** | 0.3420 | 0.9397 | 0.3640 | **66°** | 0.9135 | 0.4067 | 2.2460 |
| **21°** | 0.3584 | 0.9336 | 0.3839 | **67°** | 0.9205 | 0.3907 | 2.3559 |
| **22°** | 0.3746 | 0.9272 | 0.4040 | **68°** | 0.9272 | 0.3746 | 2.4751 |
| **23°** | 0.3907 | 0.9205 | 0.4245 | **69°** | 0.9336 | 0.3584 | 2.6051 |
| **24°** | 0.4067 | 0.9135 | 0.4452 | **70°** | 0.9397 | 0.3420 | 2.7475 |
| **25°** | 0.4226 | 0.9063 | 0.4663 | **71°** | 0.9455 | 0.3256 | 2.9042 |
| **26°** | 0.4384 | 0.8988 | 0.4877 | **72°** | 0.9511 | 0.3090 | 3.0777 |
| **27°** | 0.4540 | 0.8910 | 0.5095 | **73°** | 0.9563 | 0.2924 | 3.2709 |
| **28°** | 0.4695 | 0.8829 | 0.5317 | **74°** | 0.9613 | 0.2756 | 3.4874 |
| **29°** | 0.4848 | 0.8746 | 0.5543 | **75°** | 0.9659 | 0.2588 | 3.7321 |
| **30°** | 0.5000 | 0.8660 | 0.5774 | **76°** | 0.9703 | 0.2419 | 4.0108 |
| **31°** | 0.5150 | 0.8572 | 0.6009 | **77°** | 0.9744 | 0.2250 | 4.3315 |
| **32°** | 0.5299 | 0.8480 | 0.6249 | **78°** | 0.9781 | 0.2079 | 4.7046 |
| **33°** | 0.5446 | 0.8387 | 0.6494 | **79°** | 0.9816 | 0.1908 | 5.1446 |
| **34°** | 0.5592 | 0.8290 | 0.6745 | **80°** | 0.9848 | 0.1736 | 5.6713 |
| **35°** | 0.5736 | 0.8192 | 0.7002 | **81°** | 0.9877 | 0.1564 | 6.3138 |
| **36°** | 0.5878 | 0.8090 | 0.7265 | **82°** | 0.9903 | 0.1392 | 7.1154 |
| **37°** | 0.6018 | 0.7986 | 0.7536 | **83°** | 0.9925 | 0.1219 | 8.1443 |
| **38°** | 0.6157 | 0.7880 | 0.7813 | **84°** | 0.9945 | 0.1045 | 9.5144 |
| **39°** | 0.6293 | 0.7771 | 0.8098 | **85°** | 0.9962 | 0.0872 | 11.4301 |
| **40°** | 0.6428 | 0.7660 | 0.8391 | **86°** | 0.9976 | 0.0698 | 14.3007 |
| **41°** | 0.6561 | 0.7547 | 0.8693 | **87°** | 0.9986 | 0.0523 | 19.0811 |
| **42°** | 0.6691 | 0.7431 | 0.9004 | **88°** | 0.9994 | 0.0349 | 28.6363 |
| **43°** | 0.6820 | 0.7314 | 0.9325 | **89°** | 0.9998 | 0.0175 | 57.2900 |
| **44°** | 0.6947 | 0.7193 | 0.9657 | **90°** | 1.0000 | 0.0000 | ............ |
| **45°** | 0.7071 | 0.7071 | 1.0000 | | | | |

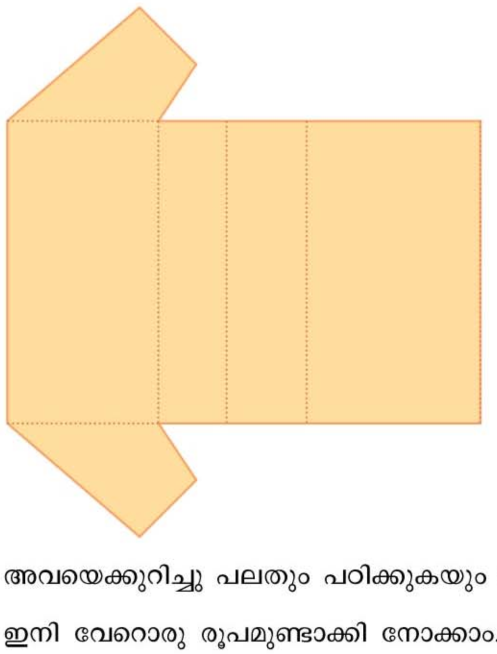
# 5 ഘനരൂപങ്ങൾ

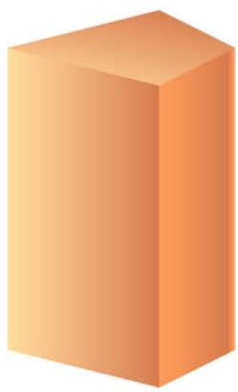
## സ്തൂപികകൾ

പല രീതിയിൽ കടലാസ് വെട്ടിയെടുത്ത്, മടക്കി ഒട്ടിച്ച്, സ്തംഭങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കി നോക്കിയല്ലോ:









അവയെക്കുറിച്ചു പലതും പഠിക്കുകയും ചെയ്തു.

ഇനി വേറൊരു രൂപമുണ്ടാക്കി നോക്കാം. ആദ്യം ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ഒരു ചിത്രം കടലാസിൽ വെട്ടിയെടുക്കുക:

### രൂപങ്ങൾ

ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങളിൽ, ത്രികോണം, ചതുരം, വൃത്തം തുടങ്ങിയ ഒരു തലത്തിലൊതുങ്ങുന്ന പരന്ന രൂപങ്ങളുണ്ട്; ചതുരസ്തംഭം, വൃത്തസ്തംഭം എന്നിങ്ങനെയുള്ള, ഒരു തലത്തിലുമൊതുങ്ങാതെ ഉയർന്നു നിൽക്കുന്ന ഘനരൂപങ്ങളുമുണ്ട്.

പെട്ടികളായും, കട്ടകളായും, തൂണുകളായുമെല്ലാം സ്തംഭങ്ങൾ പ്രത്യക്ഷപ്പെടുന്നു:

സ്തംഭങ്ങളല്ലാത്ത ഘനരൂപങ്ങളുമുണ്ടല്ലോ.

## ഈജിപ്റ്റിലെ പിരമിഡുകൾ

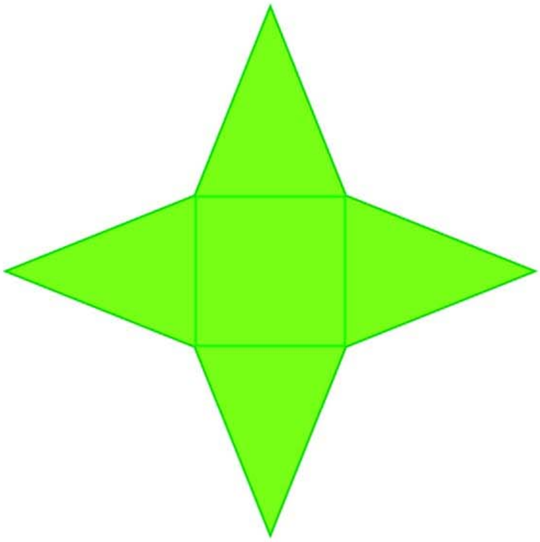
പിരമിഡ് എന്നു പറയുമ്പോൾത്തന്നെ മനസിലെത്തുന്ന ചിത്രം, ഈജിപ്റ്റിലെ പിരമിഡുകളാണ്.

ഈജിപ്റ്റിലെ പലഭാഗങ്ങളിലായി 138 പിരമിഡുകളാണ് കണ്ടെത്തിയിട്ടുള്ളത്. ബി.സി. രണ്ടായിരത്തോടടുപ്പിച്ചാണ് ഇവയിൽ പലതും നിർമിച്ചത്.

ഇവയിൽ ഏറ്റവും വലുത്, ഗിസയിലെ മഹാസ്തൂപിക *(Great Pyramid of Giza)* എന്ന പേരിലാണ് അറിയപ്പെടുന്നത്.

ഇതിന്റെ പാദമായ സമചതുരത്തിന് ഏതാണ്ട് അര ലക്ഷത്തോളം ചതുരശ്രമീറ്റർ പരപ്പുണ്ട്; ഉയരം ഏതാണ്ട് 140 മീറ്ററും. ഇതു നിർമിക്കാൻ ഇരുപതു കൊല്ലത്തോളം വേണ്ടിവന്നിട്ടുണ്ടാകും എന്നാണ് കണക്കുകൂട്ടിയിരിക്കുന്നത്.

കൃത്യമായ സമചതുരത്തിൽ നിന്നു തുടങ്ങി, ഭീമാകാരമായ കല്ലുകൾ മേൽപ്പോട്ട് പടുത്തുയർത്തി, ഒരു ബിന്ദുവിൽ അവസാനിക്കുന്ന ഈ രാജകീയ ശവക്കല്ലറകൾ, മനുഷ്യാധ്വാനത്തിന്റേയും, നിർമാണ വൈദഗ്ധ്യത്തിന്റേയും, ഗണിതവിജ്ഞാനത്തിന്റേയും ജീവിക്കുന്ന പ്രതീകങ്ങളായി ഉയർന്നു നിൽക്കുന്നു.

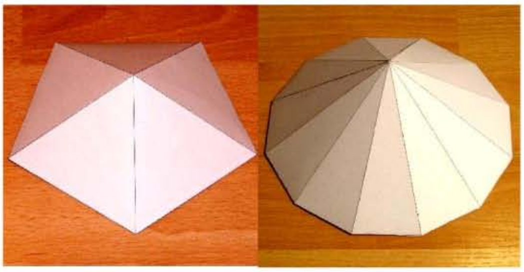


നടുക്കു സമചതുരം. ചുറ്റും നാലു ത്രികോണങ്ങൾ; ഇവ നാലും ഒരേപോലെയുള്ള (സർവസമമായ) സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളായിരിക്കണം.

ഇനി ഇത് ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ മടക്കി ഒട്ടിക്കുക:

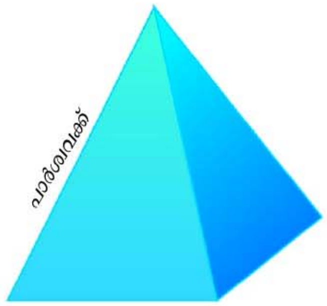
എന്തു രൂപമാണിത്? സ്തംഭമെന്നു വിളിക്കാൻ വയ്യ; സ്തംഭങ്ങൾക്ക് ഒരേ പോലെയുള്ള രണ്ടു പാദങ്ങളും, വശങ്ങളിൽ ചതുരങ്ങളുമാണ്. ഇപ്പോഴുണ്ടാക്കിയ രൂപത്തിലാണെങ്കിൽ, ചുവടെ സമചതുരം, മുകളിലൊരു മുന, ചുറ്റും ത്രികോണങ്ങൾ.

ചുവടെയുള്ള സമചതുരത്തിനു പകരം, മറ്റേതെങ്കിലും ചതുരമാവാം; അതുമല്ലെങ്കിൽ ത്രികോണമോ, മറ്റേതെങ്കിലും ബഹുഭുജമോ ആവാം. പരീക്ഷിച്ചുനോക്കൂ. (പാദം സമബഹുഭുജമാകുമ്പോഴാണ് ഭംഗി)

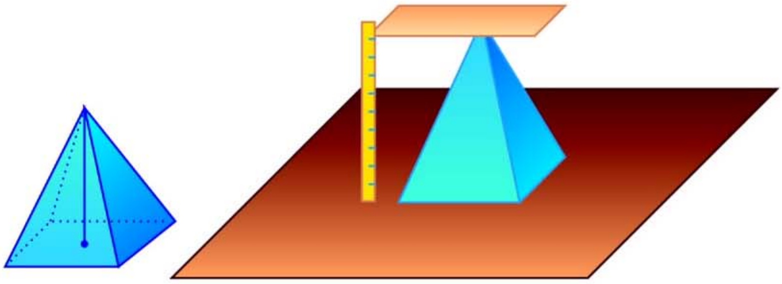


ഇത്തരം രൂപങ്ങൾക്കെല്ലാം പൊതുവായ പേരാണ് സ്തൂപികകൾ. *(pyramids)*

സ്തൂപികയുടെ പാദമായ ബഹുഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളെ, സ്തൂപികയുടെ പാദവക്കുകൾ (*base edges*) എന്നും, ത്രികോണങ്ങളുടെ മറ്റു വശങ്ങളെ പാർശ്വവക്കുകൾ (*lateral edges*) എന്നുമാണ് പറയുന്നത്. സ്തൂപികയുടെ മുകളറ്റത്തെ അതിന്റെ ശീർഷം (*apex*) എന്നാണ് പറയുന്നത്.



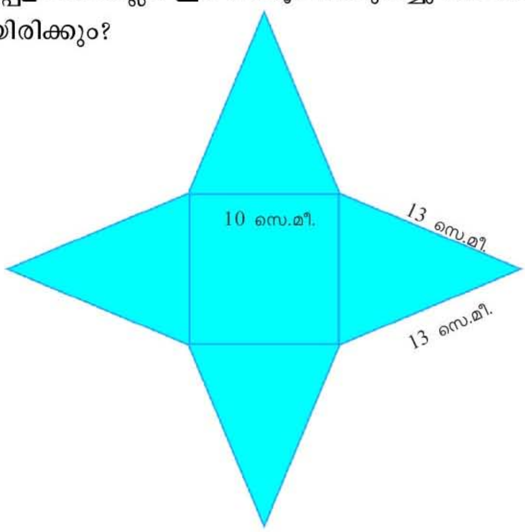

ഒരു സ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരമെന്നത്, അതിന്റെ പാദങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലമാണല്ലോ. ഒരു സ്തൂപികയുടെ ഉയരമെന്നാൽ, ശീർഷത്തിൽനിന്ന് പാദത്തിലേക്കുള്ള ലംബദൂരമാണ്.



### പരപ്പളവ്

പാദവക്കുകൾ 10 സെന്റിമീറ്ററും, പാർശ്വവക്കുകൾ 13 സെന്റിമീറ്ററുമായ സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

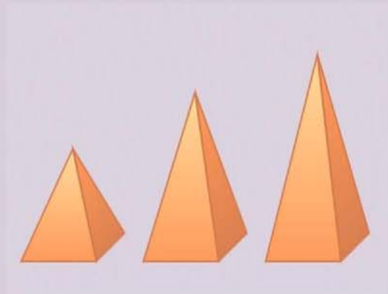
ഉപരിതലപരപ്പളവെന്നാൽ, ഇതുണ്ടാക്കാൻ ആവശ്യമായ കടലാസ്സിന്റെ പരപ്പളവാണല്ലോ. ഈ സ്തൂപിക മുറിച്ചു നിവർത്തി വച്ചാൽ എങ്ങനെയിരിക്കും?



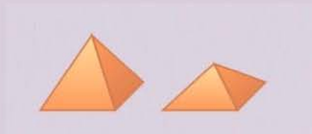

### കോണും ഉയരവും

സമചതുരസ്തൂപികയുണ്ടാക്കാൻ, ആദ്യം പാദം നിശ്ചയിക്കണം. അതോടെ വശങ്ങളിൽ വരുന്ന സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളുടെ പാദവും നിശ്ചയിക്കപ്പെട്ടു. ഈ ത്രികോണങ്ങളുടെ മുകളിലത്തെ മൂലയിലെ കോണും തീരുമാനിച്ചാൽ, ത്രികോണം മുഴുവനായി.

ഈ കോൺ ചെറുതാകുന്തോറും. ത്രികോണങ്ങൾ നേർത്തുവരും; മെലിഞ്ഞുനീണ്ട സ്തൂപികകൾ കിട്ടും:



കോൺ വലുതാകുമ്പോഴോ? പരന്നു തടിച്ച സ്തൂപികകളാണ് കിട്ടുക:



ഈ കോൺ പരമാവധി എത്ര വരെയാകാം? 90° ആകാമോ?

ഷഡ്ഭുജസ്തൂപികയ്ക്ക് ഈ കോൺ എത്ര വരെയാകാം? മറ്റു സ്തൂപികകൾക്കോ?

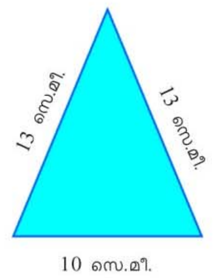
ഇതിലെ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 100 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററെന്ന് പെട്ടെന്നു പറയാം; ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവോ?

ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 10, 13, 13 സെന്റിമീറ്ററാണ്. ഇതിൽ നിന്ന് പരപ്പളവു കണ്ടുപിടിക്കാൻ, ഹെറോണിന്റെ സഹായമുണ്ടല്ലോ. ചുറ്റളവിന്റെ പകുതിയിൽ നിന്ന് വശങ്ങളോരോന്നും കുറച്ച്,

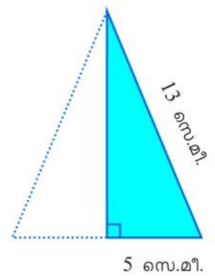
$$\sqrt{18 \times 8 \times 5 \times 5} = \sqrt{9 \times 16 \times 5 \times 5} = 60$$

അതായത്, ഓരോ ത്രികോണത്തിന്റെയും പരപ്പളവ്, 60 ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്ററാണ്. അപ്പോൾ സ്തൂപികയുടെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് $100 + (4 \times 60) = 340$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

ഇതിൽ, ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് മറ്റൊരു രീതിയിലും കണ്ടുപിടിക്കാം.




ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ ഉയരം കൂടി കിട്ടിയാൽ മതിയല്ലോ. സമപാർശ്വത്രികോണമായതിനാൽ, ഈ ലംബം താഴത്തെ വശത്തെ സമഭാഗം ചെയ്യും.




പൈഥഗോറസ് സിദ്ധാന്തമുപയോഗിച്ച്, ലംബത്തിന്റെ നീളം

$$\sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ സെ.മീ.}$$

എന്നു കണ്ടുപിടിക്കുകയും ചെയ്യാം. അപ്പോൾ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, $5 \times 12 = 60$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

കടലാസ് സ്തൂപികയായിക്കഴിയുമ്പോൾ, ഇപ്പോൾ കണ്ടുപിടിച്ച ഉയരം എന്താകും?

### സ്തൂപികാസംഖ്യകൾ

ത്രികോണാകൃതിയിൽ പൊട്ടുകളിട്ട്, ത്രികോണസംഖ്യകളുണ്ടാക്കിയത് ഓർമയില്ലേ? (ഏഴാംക്ലാസിലെ **സമചതുരസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ത്രികോണസംഖ്യകൾ** എന്ന ഭാഗം)

ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന 1, 3, 6, 10, ... എന്ന ശ്രേണിയിലെ $n$-ാം പദം,

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2} n(n+1)$$

ആണെന്ന് സമാന്തരശ്രേണികൾ എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടല്ലോ.

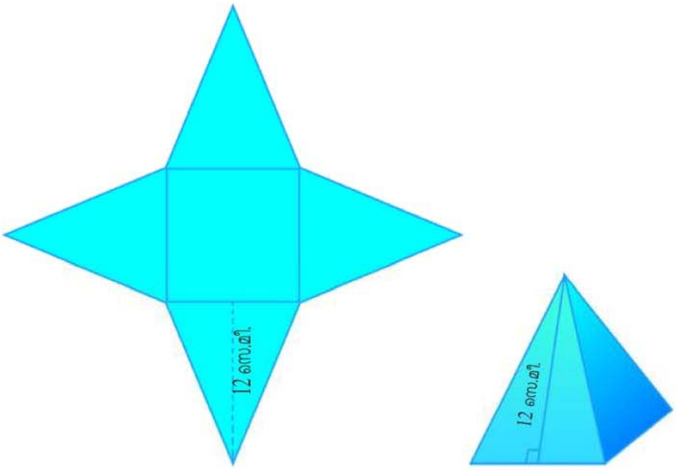
ഇതുപോലെ ചെറുഗോളങ്ങൾ സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ആകൃതിയിൽ കൂട്ടിവച്ച് സംഖ്യകളുണ്ടാക്കാം:

1, 5, 14, ... എന്നു തുടരുന്ന ഈ ശ്രേണിയിലെ സംഖ്യകൾക്ക്, സ്തൂപികാസംഖ്യകൾ *(pyramidal numbers)* എന്നാണ് പേര്. ഇതിലെ $n$-ാം പദം

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$$

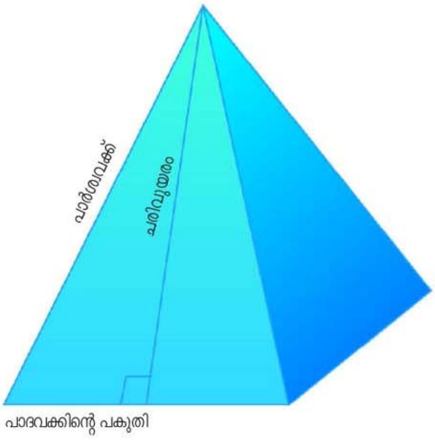
$$= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

എന്ന് കാണാൻ വിഷമമില്ലല്ലോ (**സമാന്തരശ്രേണി** എന്ന പാഠത്തിലെ **വർഗങ്ങളുടെ തുക** എന്ന ഭാഗം നോക്കുക)



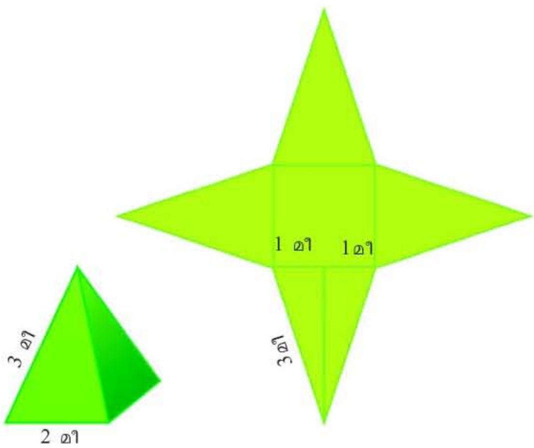

ഈ നീളത്തെ സ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരം, അല്ലെങ്കിൽ, പാർശ്വോന്നതി (*slant height*) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഇപ്പോൾ ചെയ്ത കണക്കിൽ സ്തൂപികയുടെ പാദവക്കും, പാർശ്വവക്കും, ചരിവുയരവും തമ്മിലുള്ള ഒരു ബന്ധം കണ്ടല്ലോ; ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെയുള്ള ഒരു മട്ടത്രികോണം, സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ഓരോ വശത്തുമുണ്ട്. ലംബവശങ്ങൾ ചരിവുയരവും പാദത്തിന്റെ പകുതിയും; കർണം പാർശ്വവക്കും.



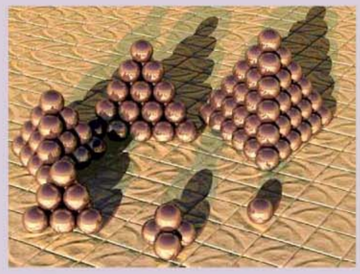

ഇനി ഈ കണക്ക് ചെയ്തുകൂടേ?

പാദവക്കുകൾ 2 മീറ്ററും, പാർശ്വവക്കുകൾ 3 മീറ്ററുമായ സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ഉപരിതലപരപ്പളവെത്രയാണ്?




**ചതുർമുഖസംഖ്യകൾ**

ചെറുഗോളങ്ങളടുക്കി സമഭുജത്രികോണസ്തൂപികകളുമുണ്ടാക്കാം:



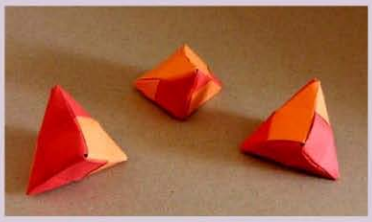
ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന സംഖ്യാശ്രേണി 1, 4, 10, ... എന്നാണല്ലോ; അതായത്, തുടർച്ചയായ ത്രികോണസംഖ്യകളുടെ തുകയാണ്, ഈ ശ്രേണിയിലെ ഓരോ പദവും. ഇതിലെ $n$-ാം പദം

$$1+3+6+...+\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

ആണെന്നു തെളിയിക്കാം. (ശ്രമിച്ചുനോക്കൂ) ഈ സംഖ്യകളെ ചതുർമുഖസംഖ്യകൾ (*tetrahedral numbers*) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

നാലു ത്രികോണമുഖങ്ങൾ ചേർന്ന ഘനരൂപങ്ങൾക്കെല്ലാം പൊതുവായി പറയുന്ന പേരാണ് ചതുർമുഖം (*tetrahedron*).



ഇവയിലെ ഒരു സവിശേഷ രൂപമാണ് സമഭുജത്രികോണസ്തൂപിക.

പാദത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, 4 ചതുരശ്രമീറ്റർ. പാർശ്വവശങ്ങളുടെ പരപ്പളവു കാണാൻ ചരിവുയരംവേണം. നേരത്തെ പറഞ്ഞ മട്ടത്രികോണത്തിൽ പാദത്തിന്റെ പകുതി 1 മീറ്ററും, കർണമായ പാർശ്വവക്ക് 3 മീറ്ററും; അതിനാൽ ചരിവുയരം

$$\sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2} \text{ മീറ്റർ}$$

ഇതുപയോഗിച്ച് ഓരോ ത്രികോണവശത്തിന്റെയും പരപ്പളവ്,

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ ചതുരശ്രമീറ്റർ}$$

എന്നു കാണാം. അപ്പോൾ സ്തൂപികയുടെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്,

$4 + (4 \times 2\sqrt{2}) = 4 + 8\sqrt{2}$ ചതുരശ്രമീറ്റർ.

ഇതുകൊണ്ടു തൃപ്തിയായില്ലെങ്കിൽ, കാൽക്കുലേറ്റർ ഉപയോഗിച്ച് (അല്ലെങ്കിൽ $\sqrt{2}$ ന്റെ ഏകദേശവില ഓർത്തെടുത്ത്), ഇത് ഏകദേശം 15.31 ചതുരശ്രമീറ്ററാണെന്നു കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഈ കണക്കുകൾ സ്വയം ചെയ്തുനോക്കൂ:

- വശങ്ങൾക്കെല്ലാം 5 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു സമചതുരം; ഒരു വശം 5 സെന്റിമീറ്ററും അതിൽനിന്നു എതിർമൂലയിലേക്കുള്ള ഉയരം 8 സെന്റിമീറ്ററും ആയ നാലു സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങൾ; ഇവ ചേർത്തുവച്ച് ഒരു സമചതുരസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കണം. അതിന് എത്ര ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ കടലാസു വേണം?
- സമചതുരസ്തൂപികയിലുള്ള ഒരു കളിപ്പാട്ടത്തിന്റെ പാദവക്ക് 16 സെന്റിമീറ്ററും ചരിവുയരം 10 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. ഇത്തരം 500 കളിപ്പാട്ടങ്ങൾ ചായം പൂശുന്നതിന് ചതുരശ്രമീറ്ററിന് 80 രൂപ നിരക്കിൽ എത്ര രൂപ ചെലവാകും?
- ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയുടെ പാർശ്വമുഖങ്ങൾ സമഭുജത്രികോണങ്ങളാണ്. പാദവക്കിന്റെ നീളം 30 സെന്റിമീറ്റർ. അതിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

## ഉയരവും ചരിവുയരവും

സ്തൂപികകളുടെ അളവുകളിൽ പലപ്പോഴും ഉയരം പ്രധാനമാണ്. ഈ കണക്കുനോക്കൂ.

സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ആകൃതിയിൽ ഒരു കൂടാരം ഉണ്ടാക്കണം. പാദത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 6 മീറ്റർ വേണം; കൂടാരത്തിന്റെ ഉയരം 4 മീറ്ററും. ഇതിന് എത്ര ചതുരശ്രമീറ്റർ കാൻവാസ് വേണം?

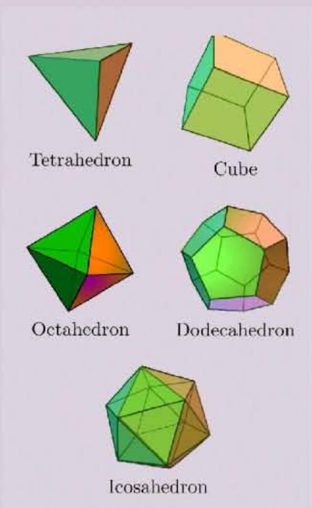
കൂടാരത്തിന്റെ വശങ്ങളായ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാൻ, ചരിവുയരം വേണ്ടേ? തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങൾ വച്ച്, അതെങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

### ബഹുമുഖങ്ങൾ

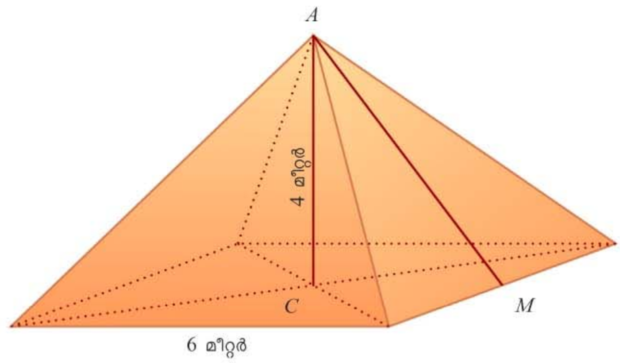
നാലു ത്രികോണങ്ങൾ മുഖങ്ങളായ ഘനരൂപങ്ങളുടെ പേര് ചതുർമുഖം എന്നു പറഞ്ഞല്ലോ. മുഖങ്ങളെല്ലാം ബഹുഭുജങ്ങളായ ഘനരൂപങ്ങളുടെ പൊതുവായ പേര് ബഹുമുഖം *(polyhedron)* എന്നാണ്.

ബഹുഭുജസ്തംഭങ്ങളും, ബഹുഭുജസ്തൂപികകളുമെല്ലാം ബഹുമുഖങ്ങളാണ്; വൃത്തസ്തംഭവും, വൃത്തസ്തൂപികയും ബഹുമുഖങ്ങളല്ല.

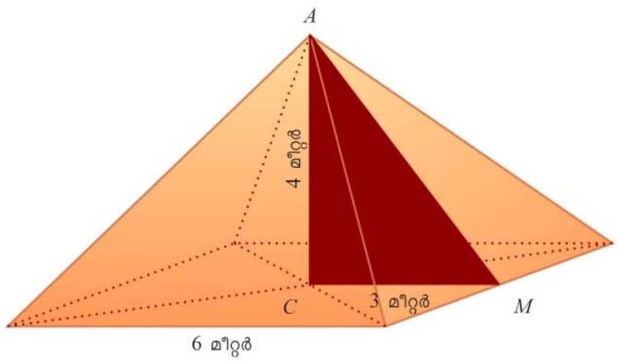
ഒരു ബഹുമുഖത്തിലെ മുഖങ്ങൾ സർവസമമായ സമബഹുഭുജങ്ങളായിരിക്കുകയും, ഓരോ മൂലയിലും കൂടിച്ചേരുന്ന മുഖങ്ങളുടെ എണ്ണം തുല്യമായിരിക്കുകയും ചെയ്താൽ, അതിനെ സമബഹുമുഖം *(regular polyhedron)* എന്നു വിളിക്കും. ഇത്തരം അഞ്ചെണ്ണമേയുള്ളുവെന്ന് യൂക്ലിഡ് തെളിയിച്ചിട്ടുണ്ട്.



ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:




നമുക്കുവേണ്ട ചരിവുയരം $AM$ ആണ്. $CM$ യോജിപ്പിച്ചാൽ, $AM$ കർണമായ ഒരു മട്ടത്രികോണം കിട്ടില്ലേ? അതിൽ $CM$ന്റെ നീളം എത്രയാണ്?




ചിത്രത്തിൽനിന്ന് $AM = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ മീറ്റർ എന്നു കണക്കാക്കാം.

അപ്പോൾ കൂടാരമുണ്ടാക്കാൻ, ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 6 മീറ്ററും, അതിൽനിന്നുള്ള ഉയരം 5 മീറ്ററുമായ നാലു ത്രികോണങ്ങളാണ് വേണ്ടത്. ഇവയുടെ മൊത്തം പരപ്പളവ്,

$$4 \times \frac{1}{2} \times 6 \times 5 = 60$$

ചതുരശ്രമീറ്ററാണല്ലോ. കൂടാരമുണ്ടാക്കാൻ ഇത്രയും കാൻവാസ് വേണം.

ഈ കണക്കിൽ കണ്ട കാര്യം എല്ലാ സമചതുരസ്തൂപികയിലും ശരിയാണല്ലോ. ഏതു സമചതുരസ്തൂപികയ്ക്കുള്ളിലും, ചരിവുയരം കർണമായ ഒരു മട്ടത്രികോണം സങ്കൽപ്പിക്കാം; അതിന്റെ ലംബവശങ്ങൾ, സ്തൂപികയുടെ ഉയരവും പാദവക്കിന്റെ പകുതിയും.

### പാർശ്വതലപരപ്പളവ്

സ്തംഭങ്ങളിലെന്നപോലെ സ്തൂപികകളിലും, വശങ്ങളുടെ മാത്രം പരപ്പളവുകളുടെ തുകയെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ് എന്നാണ് പറയുന്നത്.

സ്തൂപികയുടെ പാദം സമബഹുഭുജമാണെങ്കിൽ, വശങ്ങളിലെ ത്രികോണങ്ങൾ സർവസമമാണ്. അതിനാൽ, പാർശ്വതലപരപ്പളവു കണക്കാക്കാൻ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവിനെ, പാദത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ മതി.

ഇതു ബീജഗണിതത്തിലാക്കാം. പാദം $n$ വശങ്ങളുള്ള സമബഹുഭുജമാണെന്നും, അതിന്റെ ഓരോ വശത്തിന്റേയും നീളം $a$ ആണെന്നും എടുക്കാം. സ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരം $l$ എന്നുമെടുത്താൽ, പാർശ്വതലപരപ്പളവ്

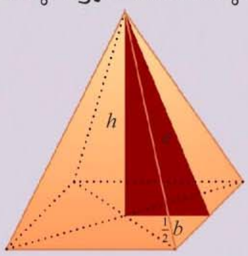
$$n \times \frac{1}{2} \times a \times l$$

ആണല്ലോ. ഇതിൽ $n \times a$ എന്നത്, പാദത്തിന്റെ ചുറ്റളവാണ്. അപ്പോൾ സ്തൂപികയുടെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ്, പാദപരപ്പളവിന്റേയും ചരിവുയരത്തിന്റേയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണ്.

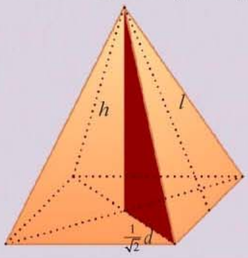
### ത്രികോണബന്ധങ്ങൾ

ഒരു ത്രികോണസ്തൂപികയുടെ ഓരോ ത്രികോണമുഖത്തിലും, ചുവടെക്കാണുന്നപോലെ ഒരു മട്ടത്രികോണമുണ്ടെന്നു കണ്ടല്ലോ:

കൂടാതെ സ്തൂപികയ്ക്കുള്ളിൽ ഇങ്ങനെയൊരു മട്ടത്രികോണവും കണ്ടു:




മൂന്നാമതൊരു മട്ടത്രികോണവും, ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ കിട്ടും.



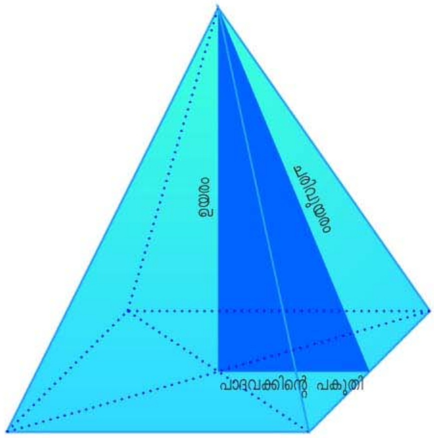

ഇവയിൽ നിന്ന് സ്തൂപികയുടെ പാദവക്കിന്റെ നീളം $b$, പാർശ്വവക്കിന്റെ നീളം $e$, ചരിവുയരം $l$, ഉയരം $h$, പാദവികർണം $d$ ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധങ്ങൾ കിട്ടും:

$$e^2 = l^2 + \frac{1}{4}b^2$$

$$l^2 = h^2 + \frac{1}{4}b^2$$

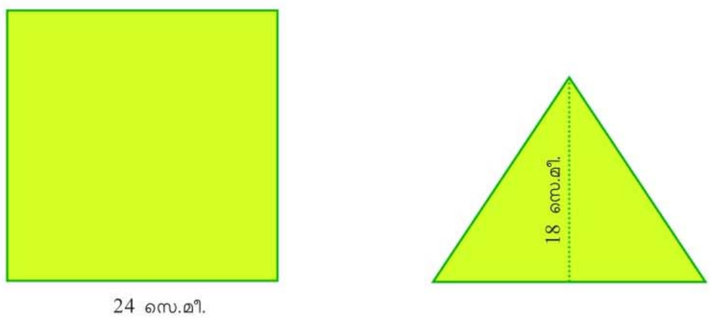
$$e^2 = h^2 + \frac{1}{2}d^2$$

ഈ സമവാക്യങ്ങളിൽ ഏതെങ്കിലും രണ്ടെണ്ണത്തിൽ നിന്ന്, ബീജഗണിതരീതിയിൽ മൂന്നാമത്തേത് കിട്ടുമെന്നു കാണാം.

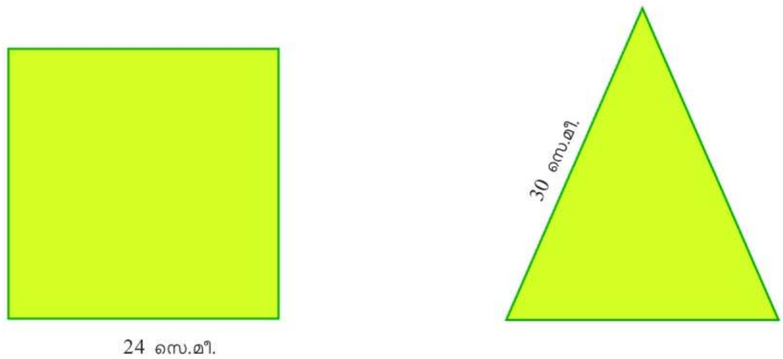



ഇനി ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്യാമല്ലോ:

- ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന അളവുകളിൽ ഒരു സമചതുരവും, നാലു ത്രികോണങ്ങളും ഉപയോഗിച്ചു സമചതുരസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കി.




സ്തൂപികയുടെ ഉയരം എത്രയാണ്? സമചതുരവും ത്രികോണങ്ങളും ഇങ്ങനെ ആയാലോ?

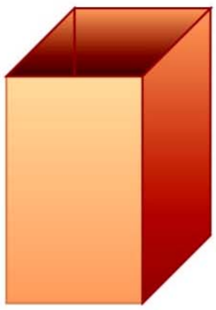



- കടലാസ് മുറിച്ച് ഒരു സമചതുരസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കണം. പാദവക്ക് 10 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 12 സെന്റിമീറ്ററും വേണം. ത്രികോണങ്ങളുടെ അളവുകൾ എത്ര ആയിരിക്കണം?
- ഏതു സമചതുരസ്തൂപികയിലും ഉയരം, ചരിവുയരം, പാർശ്വവക്ക് എന്നിവയുടെ വർഗങ്ങൾ സമാന്തരശ്രേണിയിലാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

## സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം

ഏതു സ്തംഭത്തിന്റെയും വ്യാപ്തം പാദപരപ്പളവിന്റെയും, ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണെന്ന് കണ്ടല്ലോ. ഒരു സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തമോ?

സമചതുരസ്തൂപിക തന്നെ എടുക്കാം. ആദ്യം ഒരു പരീക്ഷണമാവാം. നല്ല കട്ടിയുള്ള കടലാസുകൊണ്ട്, ഒരു തുറന്ന സമചതുരസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കുക. ഇനി, അതേ പാദവും ഉയരവുമുള്ള ഒരു തുറന്ന സമചതുരസ്തംഭവും ഉണ്ടാക്കുക.



സ്തൂപികയിൽ മണൽ നിറച്ച്, സ്തംഭത്തിലേക്കു പകരുക; സ്തംഭം നിറയാൻ ഇതു മൂന്നു തവണ ചെയ്യേണ്ടി വരും. അപ്പോൾ സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം, സ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ മൂന്നിലൊന്നാണെന്നു കാണാം. (ഇതിന്റെ ഗണിതപരമായ തെളിവ് പാഠത്തിന്റെ അവസാനഭാഗത്ത് കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്).

സ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം, പാദപരപ്പളവിനെ ഉയരംകൊണ്ട് ഗുണിച്ചതാണല്ലോ.

അപ്പോൾ സമചതുരസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തത്തെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം?

*സമചതുരസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം, പാദപരപ്പളവിന്റെയും, ഉയരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ മൂന്നിലൊന്നാണ്.*

ഉദാഹരണമായി, പാദവക്കുകൾ 10 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 8 സെന്റിമീറ്ററുമായ സമചതുരസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം $\frac{1}{3} \times 10^2 \times 8 = 266\frac{2}{3}$ ഘനസെന്റിമീറ്ററാണ്.

ലോഹം കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ ഒരു സമചതുരക്കട്ടയുടെ ഒരു വക്കിന്റെ നീളം 15 സെന്റിമീറ്ററാണ്. ഇത് ഉരുക്കി 25 സെന്റിമീറ്റർ പാദവക്കുള്ള ഒരു സമചതുരസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കി. അതിന്റെ ഉയരം എന്താണ്?

സമചതുരക്കട്ടയുടെ വ്യാപ്തം $15^3$ ഘനസെന്റിമീറ്ററാണല്ലോ.

### സ്തൂപികാപീഠം

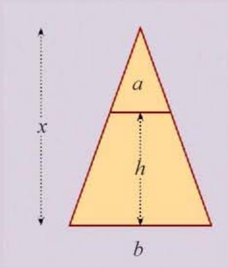
ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയെ പാദത്തിനു സമാന്തരമായി മുറിച്ചാൽ, മുകളിൽ നിന്നൊരു കൊച്ചു സമചതുരസ്തൂപിക കിട്ടും.

താഴെയോ?

ഇത്തരമൊരു രൂപത്തിന് സമചതുരസ്തൂപികാപീഠം (frustum of a square pyramid) എന്നാണ് പേര്.

ഇങ്ങനെയൊരു പീഠത്തിന്റെ മുകളിലും താഴെയുമുള്ള സമചതുരങ്ങളുടെ വശങ്ങളും, പീഠത്തിന്റെ ഉയരവും അറിയാമെങ്കിൽ, അതു മുറിച്ചെടുത്ത വലിയ സ്തൂപികയുടെ ഉയരം കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിയുമോ?

സ്തൂപികയുടെ ശീർഷത്തിലൂടെ കുത്തനെ മുറിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ത്രികോണം നോക്കുക:




ചിത്രത്തിലെ രണ്ടു സദൃശത്രികോണങ്ങളിൽ നിന്ന്

$$\frac{a}{b} = \frac{x-h}{x}$$

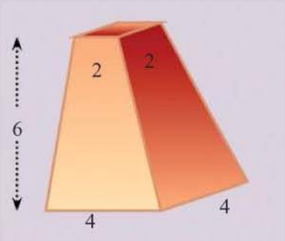
എന്നു കാണാം. ഇതിൽ നിന്ന്

$$x = \frac{bh}{b-a}$$

എന്നു കിട്ടും (ചെയ്തുനോക്കൂ).

## സ്തൂപികാപീഠത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

ഏതാണ്ട് ബി.സി. 1850 ലേതെന്ന് കണക്കാക്കിയിരിക്കുന്ന, ഈജിപ്റ്റിലെ ഒരു പപ്പൈറസ് മോസ്കോയിലെ പുഷ്കിൻ മ്യൂസിയത്തിലുണ്ട്. അതിലെ പതിനാലാമത്തെ ചോദ്യം, ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം കണ്ടുപിടിക്കാനാണ്. സ്തൂപികയുടെ രണ്ടു സമചതുരമുഖങ്ങളുടെ വശങ്ങൾ 2 ഉം 4ഉം; ഉയരം 6.




വ്യാപ്തം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള രീതി പറഞ്ഞിരിക്കുന്നത് ഇങ്ങനെയാണ്:

*4 ന്റെ വർഗം, 4 ന്റെ രണ്ടുമടങ്ങ്, 2 ന്റെ വർഗം ഇവ കൂട്ടിയാൽ, 28. ഇതിനെ 6 ന്റെ $\frac{1}{3}$ കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ 56. ഇതാണ് പീഠത്തിന്റെ വ്യാപ്തം.*

ഇതിന്റെ ബീജഗണിതം ആലോചിച്ചു നോക്കാം: പീഠത്തിന്റെ മുകളിലേയും, ചുവട്ടിലേയും സമചതുരങ്ങളുടെ വശത്തിന്റെ നീളം $a$, $b$ എന്നും, പീഠത്തിന്റെ ഉയരം $h$ എന്നും എടുക്കാം. പീഠം മുറിച്ചെടുത്ത വലിയ സ്തൂപികയുടെ ഉയരം $x$ എന്നെടുത്താൽ , പീഠത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

$$\frac{1}{3}((b^2x - a^2(x-h))$$

എന്നു കിട്ടും. $x = \frac{bh}{b-a}$ ഇതിൽ എന്നു നേരത്തെ കണ്ടതുപയോഗിച്ചു ലഘൂകരിച്ചാൽ,

$$\frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2)$$

എന്നും കാണാം. ഇതു തന്നെയല്ലേ. പപ്പൈറസിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നതും?

ഉരുക്കി ഉണ്ടാക്കുന്ന സമചതുരസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തവും ഇതു തന്നെ. പാദപരപ്പളവിനെ ഉയരത്തിന്റെ മൂന്നിലൊന്നുകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണല്ലോ സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം.

തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളിൽ നിന്ന്, പാദപരപ്പളവ് $25^2$ ചതുരശ്രമീറ്റർ ആയതിനാൽ, ഉയരത്തിന്റെ മൂന്നിലൊന്ന് $\frac{15^3}{25^2}$ എന്നും, അതിൽ നിന്ന് ഉയരം

$$3 \times \frac{15^3}{25^2} = 16.2 \text{ സെ.മീ.}$$

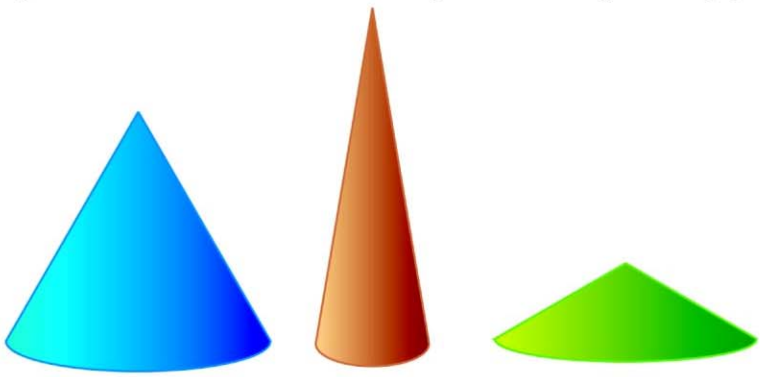
എന്നും കാണാം.

ഇതുപോലെ ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ:

- പാദവക്ക് 10 സെന്റിമീറ്ററും, ചരിവുയരം 15 സെന്റിമീറ്ററുമായ സമചതുരസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം എത്രയാണ്?
- രണ്ടു സമചതുരസ്തൂപികകളുടെ വ്യാപ്തം തുല്യമാണ്. ഒന്നാമത്തെ സ്തൂപികയുടെ പാദവക്കിന്റെ പകുതിയാണ് രണ്ടാമത്തെ സ്തൂപികയുടെ പാദവക്കിന്റെ നീളം. ഒന്നാമത്തെ സ്തൂപികയുടെ ഉയരത്തിന്റെ എത്ര മടങ്ങാണ് രണ്ടാമത്തെ സ്തൂപികയുടെ ഉയരം?
- രണ്ടു സമചതുരസ്തൂപികകളുടെ പാദവക്കുകൾ $1 : 2$ എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. അവയുടെ ഉയരങ്ങൾ $1 : 3$ എന്ന അംശബന്ധത്തിലും. ഒന്നാമത്തെ സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം 180 ഘന സെന്റിമീറ്ററാണ്. രണ്ടാമത്തെ സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം എത്രയാണ്?

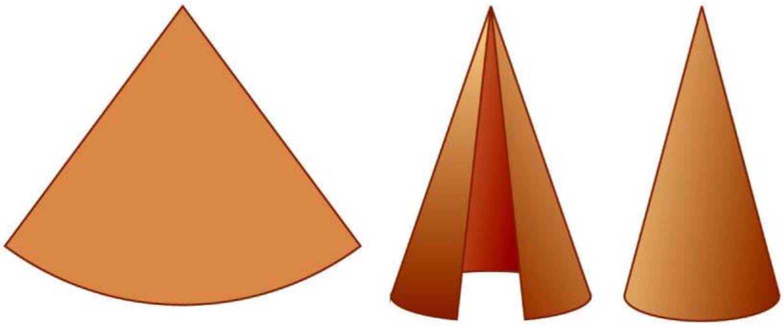
## വൃത്തസ്തൂപിക

വൃത്തസ്തംഭങ്ങൾ പോലെ, പാദം വൃത്തമായ സ്തൂപികകളുമുണ്ട്:

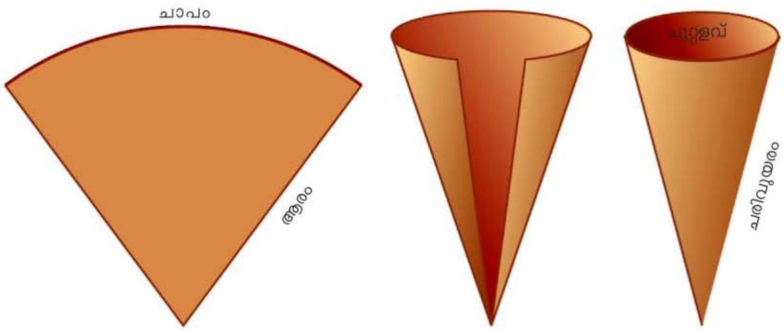


ഇവയെ വൃത്തസ്തൂപികകൾ (*cones*) എന്നാണ് വിളിക്കുന്നത്.

ചതുരം വളച്ച് വൃത്തസ്തംഭമുണ്ടാക്കിയതുപോലെ, ഒരു വൃത്താംശം വളച്ച് വൃത്തസ്തൂപികയുമുണ്ടാക്കാം. (അടഞ്ഞ സ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കണമെങ്കിൽ, ഒരു കൊച്ചു വൃത്തം വേറെയും വേണം.)



ഇതിൽ വളയ്ക്കുന്ന വൃത്താംശത്തിന്റെ അളവുകളും, ഉണ്ടാക്കിയ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ അളവുകളും തമ്മിലെന്താണ് ബന്ധം?




വൃത്താംശത്തിന്റെ ആരം, സ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരമാകും; വൃത്താംശത്തിന്റെ ചാപനീളം, സ്തൂപികയുടെ പാദ ചുറ്റളവുമാകും.

വൃത്താംശത്തിന്റെ വലിപ്പം കേന്ദ്രകോണിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിലാണ് പലപ്പോഴും പറയുന്നത്. ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

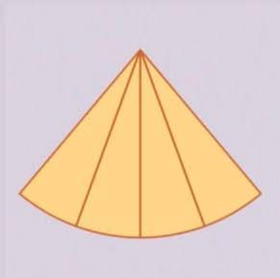
ആരം 12 സെന്റിമീറ്ററായ ഒരു വൃത്തത്തിൽനിന്ന് $45°$ കേന്ദ്രകോണുള്ള വൃത്താംശം വെട്ടിയെടുത്തു. ഇതു വളച്ചുണ്ടാക്കുന്ന വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരവും പാദത്തിന്റെ ആരവും എത്രയാണ്?

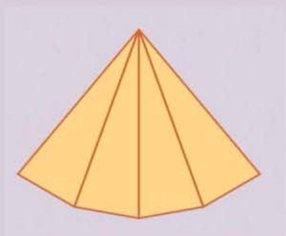
സ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരം, വൃത്തത്തിന്റെ ആരമായ 12 സെന്റിമീറ്റർ തന്നെ. പാദത്തിന്റെ ആരമോ?

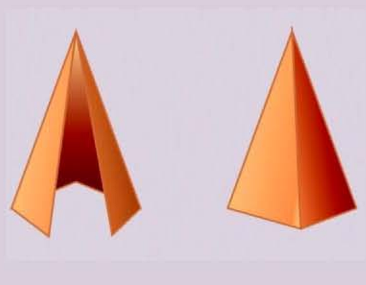
$45°$ എന്നത്, $360°$ യുടെ $\frac{1}{8}$ ഭാഗമാണല്ലോ. വൃത്താംശത്തിന്റെ ചാപത്തിന്റെ നീളം, കേന്ദ്രകോണിന് ആനുപാതികവുമാണ്. അപ്പോൾ ഈ വൃത്താംശത്തിന്റെ ചാപത്തിന്റെ നീളം, മൊത്തം വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ $\frac{1}{8}$ ഭാഗമാണ്. ഈ ചാപമാണ് സ്തൂപികയുടെ പാദവൃത്തം. അതായത്, സ്തൂപികയുടെ പാദവൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, വൃത്താംശം വെട്ടിയെടുത്ത വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{8}$ ഭാഗമാണ്. ആരങ്ങൾ, ചുറ്റളവുകൾക്ക് ആനുപാതികമായതിനാൽ,

### വൃത്താംശവും സ്തൂപികകളും

സമചതുരസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കുന്നതുപോലെ, വൃത്തത്തിനു ചുറ്റും ത്രികോണങ്ങൾ ഒട്ടിച്ച് വൃത്തസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കാൻ കഴിയില്ലല്ലോ. എന്നാൽ, വൃത്തസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കുന്നപോലെ വൃത്താംശം വളച്ച് സമചതുരസ്തൂപികയുണ്ടക്കാം. ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:







വൃത്താംശത്തിനെ കൂടുതൽ സമഭാഗങ്ങളാക്കി, മറ്റു ബഹുഭുജസ്തൂപികകളും ഉണ്ടാക്കാമല്ലോ.

ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം, വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിന്റെ $\frac{1}{8}$ ഭാഗംതന്നെയാണ്. അതായത്, സ്തൂപികയുടെ പാദത്തിന്റെ ആരം $12 \times \frac{1}{8} = 1.5$ സെന്റിമീറ്റർ.

മറിച്ചൊരു ചോദ്യമായാലോ?

പാദത്തിന്റെ ആരം 5 സെന്റിമീറ്ററും, ചരിവുയരം 15 സെന്റിമീറ്ററുമായ ഒരു വൃത്തസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കുന്നതെങ്ങനെ?

വൃത്തസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കാൻ, വൃത്താംശം വേണം. ചരിവുയരം 15 സെന്റിമീറ്റർ വേണമെന്നുള്ളതിനാൽ, 15 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള വൃത്തത്തിൽ നിന്നു തന്നെ വൃത്താംശം വെട്ടിയെടുക്കണം. അതിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ എത്രയായിരിക്കണം?

സ്തൂപികയുടെ പാദമായ ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം, വൃത്താംശം വെട്ടിയെടുക്കുന്ന വലിയവൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിന്റെ $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ ഭാഗമാണല്ലോ (അതെങ്ങനെ?). അപ്പോൾ ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവും, വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗമാണ്. ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, വൃത്താംശത്തിന്റെ ചാപനീളമാണല്ലോ. അപ്പോൾ വൃത്താംശത്തിന്റെ ചാപം, അതു വെട്ടിയെടുത്ത വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗമാണ്. അതിനാൽ, അതിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ $360 \times \frac{1}{3} = 120°$.

ഈ കണക്കുകൾ സ്വയം ചെയ്തു നോക്കൂ:

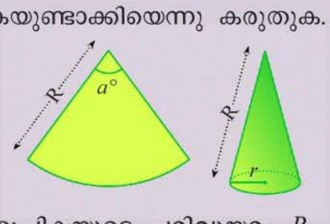
- ആരം 10 സെന്റിമീറ്ററും കേന്ദ്രകോൺ 60° ഉം ആയ വൃത്താംശം വളച്ചുണ്ടാക്കുന്ന വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആരവും ചരിവുയരവും എത്രയാണ്?
- പാദത്തിന്റെ ആരം 10 സെന്റിമീറ്ററും, ചരിവുയരം 25 സെന്റിമീറ്ററുമായ വൃത്തസ്തൂപിക നിർമിക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്ന വൃത്താംശത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ എത്രയാണ്?
- ഒരു അർധവൃത്തം വളച്ചുണ്ടാക്കുന്ന വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആരവും ചരിവുയരവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

## വക്രതലപരപ്പളവ്

വൃത്തസ്തംഭത്തിലെന്നപോലെ, വൃത്തസ്തൂപികയ്ക്കും ഒരു വക്രതലമുണ്ട്; അതിന്റെ ചരിഞ്ഞുയരുന്ന ഭാഗം. വൃത്തസ്തൂപിക വളച്ചുണ്ടാക്കാൻ ഉപയോഗിച്ച വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവാണ്

### ആരവും ചരിവുയരവും

ആരം $R$ ഉം, കേന്ദ്രകോൺ $a°$ യുമായ ഒരു വൃത്താംശം വളച്ച് വൃത്തസ്തൂപികയുണ്ടാക്കിയെന്നു കരുതുക.




സ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരം $R$. പാദത്തിന്റെ ആരം കണ്ടുപിടിക്കാൻ, ആദ്യം വൃത്താംശത്തിന്റെ ചാപത്തിന്റെ നീളം $\frac{a}{360} \times 2\pi R$ ആണെന്ന് കാണാം; ഇതാണ് സ്തൂപികയുടെ പാദചുറ്റളവ്. അപ്പോൾ സ്തൂപികയുടെ പാദത്തിന്റെ ആരം $r$ എന്നെടുത്താൽ

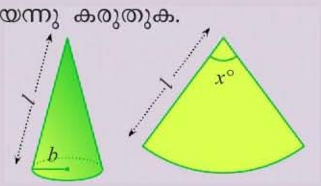
$$2\pi r = \frac{a}{360} \times 2\pi R$$

ഇതിൽനിന്ന്

$$r = \frac{a}{360} \times R$$

എന്നു കിട്ടും.

മറിച്ച്, പാദത്തിന്റെ ആരം $b$ യും, ചരിവുയരം $l$ ഉം ആയ ഒരു വൃത്തസ്തൂപിക മുറിച്ചു നിവർത്തി വൃത്താംശമാക്കിയെന്നു കരുതുക.




വൃത്താംശത്തിന്റെ ആരം $l$. കേന്ദ്രകോൺ $x°$ എന്നെടുത്താൽ

$$\frac{x}{360} \times 2\pi l = 2\pi b$$

എന്നുകാണാം. ഇതിൽ നിന്ന്

$$x = \frac{b}{l} \times 360$$

എന്നും കിട്ടും.

ഈ വക്രതലത്തിന്റെ പരപ്പളവ്. (വൃത്തസ്തംഭത്തിലും, അതിന്റെ വക്രതലം ചുരുട്ടിയുണ്ടാക്കാൻ ഉപയോഗിച്ച ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പ ളവാണല്ലോ, വക്രതലപരപ്പളവ്.)

ഈ കണക്കു നോക്കുക.

ആരം 8 സെന്റിമീറ്ററും ചരിവുയരം 30 സെന്റിമീറ്ററുമായ വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ ആകൃതിയിലുള്ള ഒരു തൊപ്പി ഉണ്ടാക്കാൻ എത്ര ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ കടലാസ് വേണം?

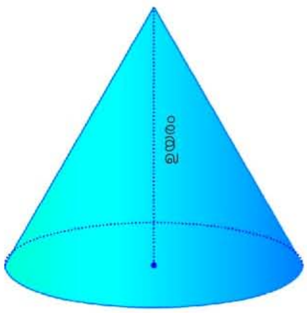
ഇത്തരമൊരു തൊപ്പിയുണ്ടാക്കാൻ വേണ്ട വൃത്താംശത്തിന്റെ പര പ്പളവാണ് കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത്. ചരിവുയരം 30 സെന്റിമീറ്റർ വേണ്ട തിനാൽ, ഇത്രയും ആരമുള്ള വൃത്തത്തിൽ നിന്നു വേണം, വൃത്താംശം മുറിച്ചെടുക്കാൻ.

കൂടാതെ, സ്തൂപികയുടെ പാദമായ കൊച്ചുവൃത്തത്തിന്റെ ആരം 8 സെന്റിമീറ്ററായിരിക്കണം. അതായത്, വെട്ടിയുണ്ടാക്കുന്ന വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിന്റെ $\frac{8}{30} = \frac{4}{15}$ ഭാഗം. അപ്പോൾ, ചെറുവൃ ത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവും, വൻവൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവിന്റെ ഇതേ ഭാഗ മാണ്. ചെറുവൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവാണ്, വെട്ടിയെടുക്കേണ്ട വൃത്താം ശത്തിന്റെ ചാപത്തിന്റെ നീളം. ഇങ്ങനെ നോക്കുമ്പോൾ, വെട്ടി യെടുക്കേണ്ട വൃത്താംശം, വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{4}{15}$ ഭാഗമാണെന്നു കാണാം. അതിനാൽ, അതിന്റെ പരപ്പളവ്, ഈ വൃത്തത്തിന്റെ ഇതേ ഭാഗമാണ്. അതായത്

$$\pi \times 30^2 \times \frac{4}{15} = \pi \times 2 \times 30 \times 4 = 240\pi$$

അപ്പോൾ തൊപ്പിയുണ്ടാക്കാൻ $240\pi$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ കട ലാസു വേണം. (ക്രിയചെയ്ത്, ഇത് ഏതാണ്ട് 754 ചതുരശ്രസെന്റി മീറ്ററാണെന്നു കാണാം.)

സമചതുരസ്തൂപികയിലെന്നപോലെ വൃത്തസ്തൂപികയിലും, പാദ ത്തിൽ നിന്ന് ശീർഷത്തിലേക്കുള്ള ലംബദൂരമാണ് ഉയരം. വൃത്ത സ്തൂപികയിൽ, ഇത്, പാദമായ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും, ശീർഷവും തമ്മിലുള്ള അകലമാണ്.




### വക്രതലപരപ്പളവ്

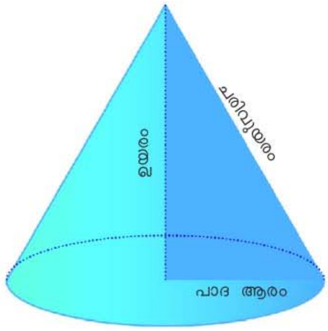
ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രതല പരപ്പളവ്, അതുണ്ടാക്കാനുപയോഗിച്ച വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവുതന്നെയാണല്ലോ. സ്തൂപികയുടെ പാദ ആരം $r$ എന്നും, ചരിവുയരം $l$ എന്നുമെടുത്താൽ, വൃത്താംശത്തിന്റെ ആരം $l$ എന്നും, കേന്ദ്രകോൺ $\frac{r}{l} \times 360$ എന്നും കിട്ടും. അപ്പോൾ അതിന്റെ പരപ്പളവ്,

$$\frac{1}{360} \times \left(\frac{r}{l} \times 360\right) \times \pi l^2 = \pi r l$$

എന്നു കണക്കാക്കാം. (ഒമ്പതാം ക്ലാസിൽ വൃത്താംശത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിച്ചത് ഓർക്കുക.)

അതായത്, വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രതലപരപ്പളവ്, പാദചുറ്റളവിന്റേയും ചരിവുയരത്തിന്റേയും ഗുണനഫല ത്തിന്റെ പകുതിയാണ്.

സമചതുരസ്തൂപികയിലെന്നപോലെ വൃത്തസ്തൂപികയിലും, ഉയരവും ചരിവുയരവും തമ്മിലൊരു മട്ടത്രികോണബന്ധമുണ്ട്:




ഉദാഹരണമായി പാദത്തിന്റെ ആരം 5 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 10 സെന്റിമീറ്ററും ആയ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ചരിവുയരം $\sqrt{5^2+10^2}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$ സെന്റിമീറ്ററാണ്.

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്യാമല്ലോ.

- പാദത്തിന്റെ ആരം 12 സെന്റിമീറ്ററും, ചരിവുയരം 25 സെന്റിമീറ്ററും ആയ ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രതല പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?
- പാദത്തിന്റെ വ്യാസം 30 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 40 സെന്റിമീറ്ററുമായ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് എത്രയാണ്?
- വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ആകൃതിയിലുള്ള ഒരു പൂക്കുറ്റിയുടെ പാദവ്യാസം 10 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 12 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. ഇത്തരം 10000 പൂക്കുറ്റികളുടെ പുറംഭാഗം മുഴുവൻ വർണക്കടലാസ് ഒട്ടിക്കണം. ഒരു ചതുരശ്രമീറ്റർ വർണക്കടലാസിന് 2 രൂപയാണ് വില. ഇതിന് ആകെ എത്ര രൂപ ചെലവാകും?
- ഒരു അർധവൃത്തം വളച്ചുണ്ടാക്കുന്ന വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വക്രതലപരപ്പളവ് അതിന്റെ പാദപരപ്പളവിന്റെ രണ്ടുമടങ്ങാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

## വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം

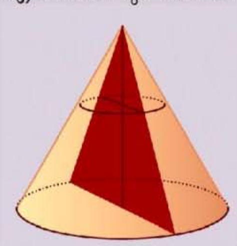
സമചതുര സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം കാണാൻ ചെയ്തതുപോലെ ഒരു പരീക്ഷണം ഇവിടെയുമാകാം. ഒരു വൃത്തസ്തൂപിക ഉണ്ടാക്കുക. അതേ പാദവും ഉയരവുമുള്ള ഒരു വൃത്തസ്തംഭവും. സ്തൂപികയിൽ മണൽ നിറച്ച് വൃത്തസ്തംഭത്തിലേക്ക് പകർന്നുനോക്കൂ. ഇവിടെയും സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം, വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ മൂന്നിലൊന്നാണെന്ന് കാണാം. അതായത്

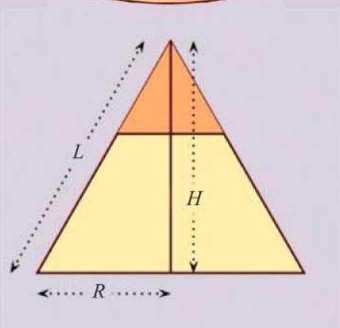
*വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം, പാദപരപ്പളവിന്റേയും ഉയരത്തിന്റേയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ മൂന്നിലൊന്നാണ്.*

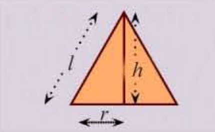
### ചെറുതും വലുതും

ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയെ പാദത്തിനു സമാന്തരമായി മുറിച്ചാൽ, മുകളിലൊരു കൊച്ചു വൃത്തസ്തൂപിക കിട്ടും.

ചെറിയ സ്തൂപികയുടെ അളവുകളും വലിയ സ്തൂപികയുടെ അളവുകളും തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?






പാദത്തിന്റെ ആരം, ഉയരം, ചരിവുയരമിവയെല്ലാം വലിയ സ്തൂപികയ്ക്ക് $R$, $H$, $L$ എന്നും ചെറുതിന് $r$, $h$, $l$ എന്നുമെടുത്താൽ, ചിത്രങ്ങളിൽ നിന്ന്

$$\frac{r}{R}=\frac{h}{H}=\frac{l}{L}$$

എന്നു കാണുന്നില്ലേ?

(ഇതിന്റെയും ഗണിതപരമായ തെളിവ്, പാഠത്തിന്റെ അവസാനം കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്). ഉദാഹരണമായി, പാദത്തിന്റെ ആരം 4 സെന്റി മീറ്ററും, ഉയരം 6 സെന്റിമീറ്ററുമായ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം

$$\frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 6 = 32\pi$$

ഘനസെന്റിമീറ്ററാണ്.

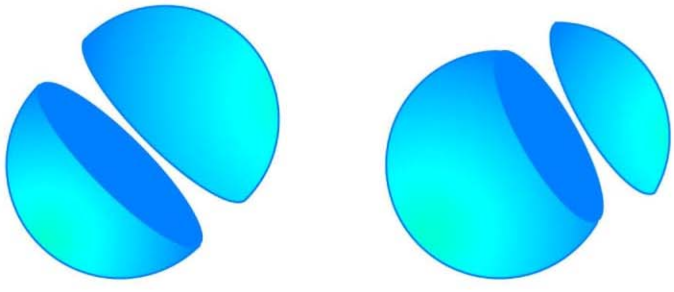
ഈ കണക്കുകൾ നിങ്ങൾക്കാണ്:

- വൃത്തസ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ഒരു തടിക്കഷണത്തിന്റെ പാദ ത്തിന്റെ ആരം 15 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 40 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. ഇതിൽ നിന്ന് ചെത്തിയെടുക്കാവുന്ന ഏറ്റവും വലിയ വൃത്ത സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം എത്രയാണ്?
- പാദത്തിന്റെ ആരം 12 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 20 സെന്റിമീറ്ററു മായ കട്ടിയായ ഒരു വൃത്തസ്തംഭം ഉരുക്കി, പാദത്തിന്റെ ആരം 4 സെന്റിമീറ്ററും ഉയരം 5 സെന്റിമീറ്ററുമായ എത്ര വൃത്തസ്തൂ പികകൾ ഉണ്ടാക്കാം?
- $216^{\circ}$ കേന്ദ്രകോണും 25 സെന്റിമീറ്റർ ആരവുമുള്ള ഒരു വൃത്താംശം വളച്ച് വൃത്തസ്തൂപിക ആക്കിയാൽ അതിന്റെ ആരവും ഉയരവും എത്രയായിരിക്കും? വ്യാപ്തമോ?
- രണ്ടു വൃത്തസ്തൂപികകളുടെ ആരങ്ങളുടെ അംശബന്ധം 3 : 5 അവയുടെ ഉയരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 2 : 3 അവയുടെ വ്യാപ്തങ്ങളുടെ അംശബന്ധം എത്രയാണ്?
- തുല്യവ്യാപ്തമുള്ള രണ്ടു വൃത്തസ്തൂപികകളുടെ ആരങ്ങൾ 4 : 5 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ്. അവയുടെ ഉയരങ്ങളുടെ അംശബന്ധം കണ്ടുപിടിക്കുക.

### ഗോളം

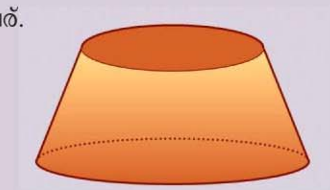
പന്തുകളിയുടെ ഹരമായും, ലഡ്ഡുവിന്റെ മധുരമായുമൊക്കെ ഗോള ങ്ങൾ ആസ്വദിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഇനി ഗോളത്തിന്റെ ഗണിതമാവാം. (ഇംഗ്ലീഷിൽ ഗോളത്തിന് *sphere* എന്നാണു പേര്.)

വൃത്തസ്തംഭത്തിനെയോ, വൃത്തസ്തൂപികയെയോ പാദത്തിനു സമാന്തരമായി മുറിച്ചാൽ, വൃത്തം കിട്ടും. ഗോളത്തെ എങ്ങനെ മുറിച്ചാലും വൃത്തം കിട്ടും:

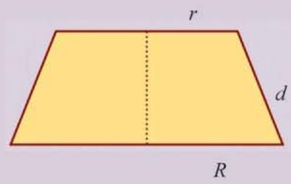


#### വൃത്തസ്തൂപികാ പീഠം

ഒരു വൃത്തസ്തൂപികയുടെ മുക ളിൽനിന്ന് ഒരു കൊച്ചു വൃത്തസ്തൂ പിക വെട്ടിയെടുത്താൽ താഴെ മിച്ചം വരുന്ന ഭാഗത്തിന് വൃത്തസ്തൂപികാ പീഠം (*frustum of a cone*) എന്നാണ് പേര്.



ഒരു വൃത്തസ്തൂപികാപീഠത്തിന്റെ മുകളിലെത്തെയും താഴത്തെയും വൃത്തങ്ങളുടെ ആരവും, ചരിവുയരവും അറിയാമെങ്കിൽ പാർശ്വതലപരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കുന്നതെങ്ങനെ?




വലിയ സ്തൂപികയുടെയും, ചെറിയ സ്തൂപികയുടെയും ചരിവുയരങ്ങൾ $L$, $l$ എന്നെടുത്താൽ, ചിത്രത്തിലെ $d = L - l$. അപ്പോൾ പീഠത്തിന്റെ പാർശ്വ തലപരപ്പളവ്,

$$\begin{aligned}\pi RL - \pi rl &= \pi(RL - rl)\\ &= \pi\big(R(l+d) - rl\big)\\ &= \pi(Rl + Rd - rl)\end{aligned}$$

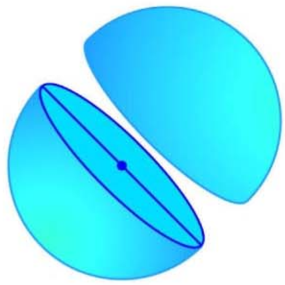
ഇതിൽ നേരത്തെ കണ്ടതനുസരിച്ച്,

$\frac{r}{R} = \frac{l}{L}$ ആയതിനാൽ, $Rl = rL$ എന്നു കിട്ടും. അപ്പോൾ പീഠത്തിന്റെ പാർശ്വ തലപരപ്പളവ്.

$$\begin{aligned}\pi(rL + Rd - rl) &= \pi\big(r(L-l) + Rd\big)\\ &= \pi(rd + Rd)\\ &= \pi(r + R)d\end{aligned}$$

ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് അതിലെ ഏതു ബിന്ദുവിലേക്കുമുള്ള അകലം തുല്യമാണല്ലോ. ഗോളത്തിനുമുണ്ടൊരു കേന്ദ്രം; അതിൽ നിന്ന് ഗോളോപരിതലത്തിലുള്ള ബിന്ദുക്കൾക്കെല്ലാം ഒരേ അകലമാണ്. ഈ അകലത്തെ ഗോളത്തിന്റെ ആരം എന്നു പറയുന്നു; അതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങിനെ വ്യാസമെന്നും.

ഒരു ഗോളത്തെ കൃത്യം പകുതിയായി മുറിച്ചാൽ ഉണ്ടാകുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും ആരവും വ്യാസവുമൊക്കെയാണ്, ഗോളത്തിന്റെയും കേന്ദ്രവും ആരവും വ്യാസവും.



ഇതുവരെക്കണ്ട രൂപങ്ങളിൽ ചെയ്തപോലെ, ഗോളത്തെ മുറിച്ചു നിവർത്തി ഉപരിതലപരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കാൻ കഴിയില്ല. അൽപം ചുളിവോ, വലിച്ചുനീട്ടലോ ഇല്ലാതെ, ഗോളത്തെ മുറിച്ചു നിരപ്പാക്കാൻ കഴിയില്ല എന്നതാണു കാര്യം.

എന്നാൽ ഒരു ഗോളത്തിന്റെ ആരം $r$ എന്നെടുത്താൽ, ഉപരിതലപരപ്പളവ് $4\pi r^2$ ആണെന്നു തെളിയിക്കാം. (തെളിവ് പാഠത്തിന്റെ അവസാനം നൽകിയിരിക്കുന്നു).

മറ്റൊരുരീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ

*ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്, അതിന്റെ ആരത്തിന്റെ വർഗത്തിനെ $4\pi$ കൊണ്ട് ഗുണിച്ചതാണ്.*

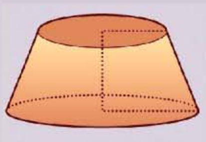
കൂടാതെ ആരം $r$ ആയ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $\frac{4}{3}\pi r^3$ എന്ന് തെളിയിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്. (ഇതിന്റെയും തെളിവ് പാഠത്തിന്റെ അവസാനം കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്).

ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കൂ:

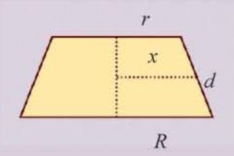
- വക്കുകളുടെയെല്ലാം നീളം 8 സെന്റിമീറ്ററായ ഒരു സമചതുരക്കട്ടയിൽ നിന്ന് ചെത്തിയെടുക്കാവുന്ന ഏറ്റവും വലിയ ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

### പീഠവും സ്തംഭവും

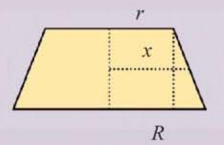
ചിത്രത്തിലെ വൃത്തസ്തൂപികാപീഠത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ് $\pi(r+R)d$ എന്നു കണ്ടല്ലോ.



ഇതിന്റെ മധ്യത്തുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ ആരം $x$ എന്നെടുത്താൽ ഇങ്ങനെയൊരു ചിത്രം കിട്ടും:




ഇങ്ങനെ ഒരു വരകൂടി വരച്ചാലോ?




വലതുവശത്തെ രണ്ടു സദൃശമട്ടത്രികോണങ്ങളിൽനിന്ന്,

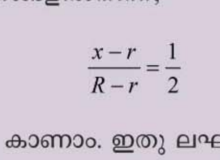
$$\frac{x-r}{R-r}=\frac{1}{2}$$

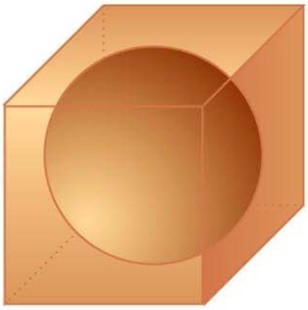
എന്നു കാണാം. ഇതു ലഘൂകരിച്ചാൽ

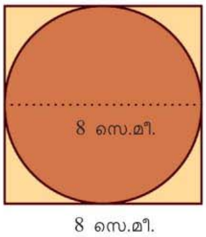
$$x=\frac{1}{2}(R+r)$$

എന്നു കിട്ടും. അതായത്, പീഠത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ്, $2\pi xd$

ഇത്, പാദത്തിന്റെ ആരം $x$ ഉം, ഉയരം $d$ യും ആയ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവല്ലേ?







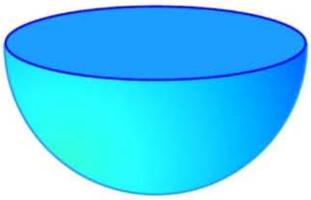

ഗോളത്തിന്റെ വ്യാസം, സമചതുരക്കട്ടയുടെ വക്കിന്റെ നീളമാണെന്ന് ചിത്രത്തിൽനിന്നു കാണാമല്ലോ. അപ്പോൾ ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്

$$4\pi \times 4^2 = 64\pi \text{ ച.സെ.മീ}$$

മറ്റൊരു കണക്കുനോക്കാം:

- 12 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള കട്ടിയായ ഒരു ഗോളത്തെ രണ്ടു സമഭാഗങ്ങളായി മുറിച്ചു കിട്ടുന്ന ഒരു അർധഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലത്തിന്റെ പകുതിയും ഒരു വൃത്തവും ചേർന്നതാണല്ലോ അർധഗോളം.



ഗോളത്തിന്റെ ആരം 12 സെന്റിമീറ്റർ ആയതിനാൽ, അതിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്

$$4\pi \times 12^2 = 576\pi \text{ ച.സെ.മീ}$$

ഇതിന്റെ പകുതിയും വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവും ചേർന്നതാണ് അർധഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്. വൃത്തത്തിന്റെ ആരവും 12 സെന്റിമീറ്റർ തന്നെ ആയതിനാൽ, അതിന്റെ പരപ്പളവ്

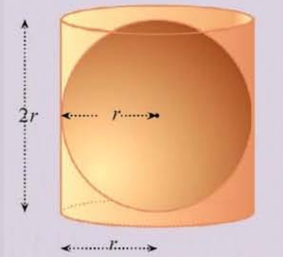
$$\pi \times 12^2 = 144\pi \text{ ച.സെ.മീ}$$

അപ്പോൾ അർധഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്

$$\frac{1}{2} \times 576\pi + 144\pi = 432\pi \text{ ച.സെ.മീ}$$

### ഗോളവും സ്തംഭവും

ഒരു ഗോളത്തിനെ കൃത്യമായി പൊതിയുന്ന വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ ആരം, ഗോളത്തിന്റെ തന്നെ ആരവും ഉയരം, ഈ ആരത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങുമാണല്ലോ:




അതായത്, ഗോളത്തിന്റെ ആരം $r$ എന്നെടുത്താൽ, വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ ആരം $r$, ഉയരം $2r$. അപ്പോൾ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ ഉപരിതല പരപ്പളവ്.

$$(2\pi r \times 2r) + (2 \times \pi r^2) = 6\pi r^2$$

ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് $4\pi r^2$. ഈ രണ്ടു പരപ്പളവുകളും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $2 : 3$

മാത്രവുമല്ല, സ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

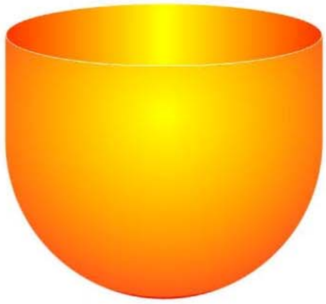
$$\pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3$$

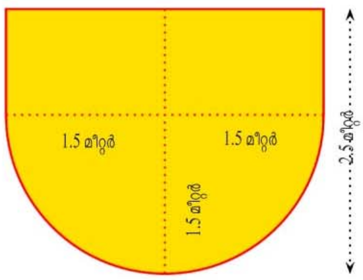
ഉം, ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $\frac{4}{3}\pi r^3$ ഉം ആയതിനാൽ, വ്യാപ്തങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധവും $2 : 3$ തന്നെ.

അതായത്, ഗോളത്തിന്റേയും അതിനെ കൃത്യമായി പൊതിയുന്ന വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റേയും ഉപരിതലപരപ്പളവും വ്യപ്തവും $2 : 3$ എന്ന ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ്.

ഒരു ഉദാഹരണം കൂടിയാകാം:

വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ ഒരറ്റത്ത് അർധഗോളം ഘടിപ്പിച്ച രൂപത്തിലുള്ള ഒരു ജലസംഭരണിയുടെ ആകെ ഉയരം 2.5 മീറ്ററും, പാദത്തിന്റെ ആരം 1.5 മീറ്ററുമാണ്. ഇതിൽ എത്ര ലിറ്റർ വെള്ളം കൊള്ളും?






ടാങ്കിലെ അർധഗോളഭാഗത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

$$\frac{2}{3}\pi \times 1.5^3 = 2.25\pi \text{ ഘനമീറ്റർ}$$

വൃത്തസ്തംഭഭാഗത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

$$\pi \times 1.5^2(2.5 - 1.5) = 2.25\pi \text{ ഘനമീറ്റർ}$$

അപ്പോൾ ആകെ ടാങ്കിന്റെ വ്യാപ്തം

$$2.25\pi + 2.25\pi = 4.5\pi \approx 14.13 \text{ ഘനമീറ്റർ}$$

ഒരു ഘനമീറ്റർ എന്നത്, 1000 ലിറ്ററായതിനാൽ, ടാങ്കിൽ ഏകദേശം 14130 ലിറ്റർ വെള്ളം കൊള്ളും.

ഇനി നിങ്ങൾക്കായി കുറെ കണക്കുകൾ:

- രണ്ടു ഗോളങ്ങളുടെ വ്യാപ്തങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 27 : 64 ആണ്. അവയുടെ ആരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

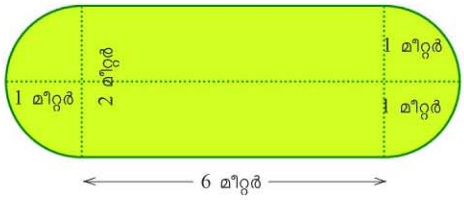
### ആർക്കിമിഡിസ്

ഗോളത്തിന്റേയും അതിനെ പൊതിയുന്ന വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റേയും ഉപരിതലപരപ്പളവും വ്യാപ്തവും 2 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണെന്ന് കണ്ടെത്തിയത് ആർക്കിമിഡിസ് ആണ്. അദ്ദേഹത്തിന് വളരെ പ്രിയപ്പെട്ട ഈ തത്വം, സ്വന്തം കല്ലറയിൽ കൊത്തി വയ്ക്കണമെന്ന് ആവശ്യപ്പെട്ടിരുന്നുവത്രേ.

സിറാക്കൂസിനെ ആക്രമിച്ച റോമൻ പട്ടാളത്തെ ആർക്കിമിഡിസ് ചെറുത്ത കഥ എട്ടാം ക്ലാസിൽ കണ്ടല്ലോ. ബി.സി. 212 ൽ റോമാക്കാർ സിറക്കൂസ് കീഴടക്കി. പേരറിയാത്ത ഏതോ സൈനികൻ ആർക്കിമിഡിസിനെ വധിച്ചു.

ഏതാണ്ട് നൂറ്റമ്പതു വർഷങ്ങൾക്കു ശേഷം സിസെറോ എന്ന റോമൻ പണ്ഡിതൻ ആർക്കിമിഡീസിന്റെ ശവകുടീരം കണ്ടുപിടിച്ചു. മുള്ളും കുറ്റിച്ചെടിയും വളർന്നുനിന്നിരുന്ന ഒരു സ്ഥലത്ത് കല്ലിൽ കൊത്തിവച്ചിരുന്ന ഒരു വൃത്തസ്തംഭവും ഗോളവുമാണ് ഇതു കണ്ടുപിടിക്കാൻ സഹായിച്ചത്. ഒരു പ്രായശ്ചിത്തമെന്നോണം അവിടമെല്ലാം വൃത്തിയാക്കി, ആദരാഞ്ജലികളർപ്പിച്ചതിനു ശേഷമാണ് സിസെറോ മടങ്ങിപ്പോയത്.

- ലോഹം കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ ഒരു വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ നീളം 10 സെന്റിമീറ്ററും, ആരം 4 സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. ഇതുരുക്കി, 2 സെന്റിമീറ്റർ ആരമുള്ള എത്ര ഗോളങ്ങളുണ്ടാക്കാം?
- ഒരു പെട്രോൾ ടാങ്കിന്റെ ചിത്രമാണ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്:



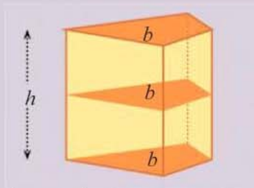

ഇതിൽ എത്ര ലിറ്റർ പെട്രോൾ കൊള്ളും?

### ഒറ്റമൂലി

സ്തംഭം, സ്തൂപിക, ഗോളം ഇവയുടെയെല്ലാം വ്യാപ്തത്തിന്റെ കണക്ക് വ്യത്യസ്തമാണല്ലോ. ഇവയ്ക്കെല്ലാം പറ്റിയ ഒറ്റക്കണക്കുണ്ട്. ചുവട്ടിലെ പരപ്പളവ് $b$, നടുവിലെ പരപ്പളവ് $m$, മുകളിലെ പരപ്പളവ് $t$, ഉയരം $h$ എന്നെടുത്താൽ, വ്യാപ്തം.

$$\frac{1}{6}h(b+4m+t)$$

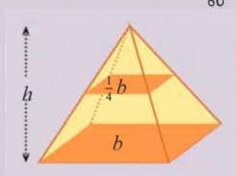
സ്തംഭങ്ങൾക്ക് താഴെയും, നടുക്കും, മുകളിലുമെല്ലാം ഒരേ പരപ്പളവാണല്ലോ. അതായത് $b = m = t$




അപ്പോൾ മേൽപ്പറഞ്ഞ കണക്കനുസരിച്ച്, സ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

$$\frac{1}{6}h(b+4b+b) = \frac{1}{6}h \times 6b = bh$$

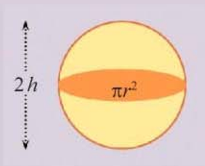
സ്തൂപികകൾക്കോ? $m = \frac{1}{4}b,\ t = 0$ എന്നു കാണാൻ വിഷമമില്ല.




അപ്പോൾ സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം

$$\frac{1}{6}h(b+b+0) = \frac{1}{6}h \times 2b = \frac{1}{3}bh$$

ഇനി ഗോളത്തിനോ? ആരം $r$ എന്നെടുത്താൽ $m = \pi r^2, b = t = 0, h = 2r$



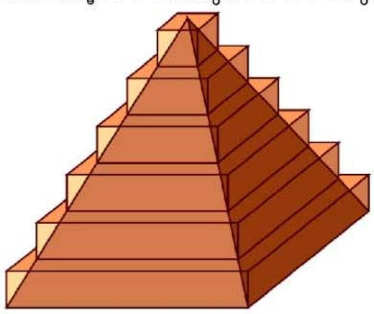

അപ്പോൾ വ്യാപ്തം

$$\frac{1}{6} \times 2r \times 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

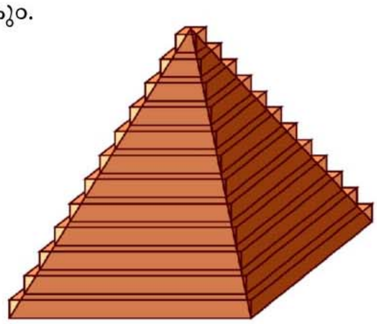
സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തവും, ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവും, വ്യാപ്തവും എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ക്രിയകൾ മാത്രമാണല്ലോ കണ്ടത്. ഇവ എങ്ങനെ കിട്ടി എന്നറിയാൻ താത്പര്യമുള്ളവർക്ക് വേണ്ടി, അവയുടെ തെളിവുകൾ ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

## സമചതുരസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം

ഒരു സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ഏകദേശരൂപമായി കുറെ സമചതുരപ്പലകകളുടെ കൂട്ടം സങ്കൽപിക്കാം.



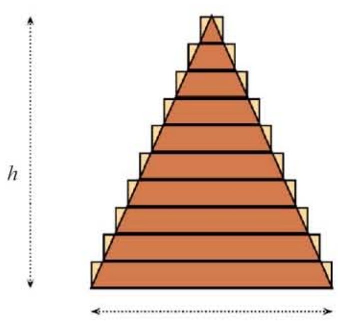
പലകകളുടെ കനം കുറയുകയും, എണ്ണം കൂടുകയും ചെയ്യുന്നതിനനുസരിച്ച്, അവയുടെ അടുക്ക് കൂടുതൽ സ്തൂപികാസമാനമാകും.



അപ്പോൾ ഈ പലകകളുടെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ തുക, സ്തൂപികയടെ വ്യാപ്തത്തോട് അടുത്തടുത്തു വരും.

ഉദാഹരണമായി, 10 പലകകളാണ് ഉപയോഗിച്ചതെന്നു കരുതുക. ഓരോ പലകയും ഒരു സമചതുര സ്തംഭമാണല്ലോ; ഇവയുടെ ഉയരം തുല്യമായിട്ടെടുക്കാം. അപ്പോൾ സ്തൂപികയുടെ ഉയരം $h$ എന്നെടുത്താൽ, ഒരു പലകയുടെ ഉയരം $\frac{1}{10}h$ ഇനി ഓരോ പലകയുടേയും പാദം എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

സ്തൂപികയേയും അതിനെ പൊതിഞ്ഞു നിൽക്കുന്ന പലകകളുടെ അടുക്കിനേയും കുത്തനെ മുറിച്ചാൽ, ഇത്തരമൊരു രൂപം കിട്ടും:




മുകളിൽനിന്നു തുടങ്ങി, സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങൾ വലുതായി വരുന്നുണ്ടല്ലോ; ഇവയുടെ ഉയരം വർധിക്കുന്നത്, ഓരോ പലകയിലും $\frac{1}{10}h$ എന്ന നിരക്കിലാണ്. ഇവയെല്ലാം സദൃശമായതിനാൽ

(എന്തുകൊണ്ട്?) പാദങ്ങളും ഇതേ നിരക്കിൽത്തന്നെ കൂടണം. അതായത്, സ്തൂപികയുടെ പാദം $b$ എന്നെടുത്താൽ, മുകളിൽനിന്നുള്ള ത്രികോണങ്ങളുടെ പാദം $\frac{1}{10}b$, $\frac{2}{10}b$, ...., $b$ എന്നിങ്ങനെയാണ്.

അപ്പോൾ ഈ പലകകളുടെ വ്യാപ്തം

$$\left(\frac{1}{10}b\right)^2 \times \frac{1}{10}h, \left(\frac{2}{10}b\right)^2 \times \frac{1}{10}h, ...b^2 \times \frac{1}{10}h$$

എന്നിങ്ങനെയാണ്, അവയുടെ തുകയോ?

$$\frac{1}{10}b^2h\left(\frac{1}{10^2}+\frac{2^2}{10^2}+...+\frac{9^2}{10^2}+\frac{10^2}{10^2}\right) = \frac{1}{1000}b^2h\left(1^2+2^2+3^2+...+10^2\right)$$

ഇത്തരം തുകകൾ കണ്ടുപിടിക്കാനൊരു മാർഗം, **സമാന്തരശ്രേണികൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **വർഗങ്ങളുടെ തുകകൾ** എന്ന ഭാഗത്തു പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലോ.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 10^2 = \frac{1}{6} \times 10 \times (10 + 1) \times (2 \times 10 + 1)$$

അപ്പോൾ വ്യാപ്തത്തിന്റെ തുക

$$\frac{1}{1000}b^2h\times\frac{1}{6}\times10\times11\times21=\frac{1}{6}b^2h\times\frac{10}{10}\times\frac{11}{10}\times\frac{21}{10}=\frac{1}{6}b^2h\times1.1\times2.1$$

ഇനി ഇതുപോലെ 100 പലകകൾ സങ്കൽപ്പിച്ചു നോക്കൂ (അതേതായാലും വരയ്ക്കാൻ കഴിയില്ല).

പലകകളുടെ കനം $\frac{1}{100}h$ ആകും; പാദങ്ങളുടെ വശം $\frac{1}{100}b, \frac{2}{100}b, \frac{3}{100}b,...$ എന്നിങ്ങനെയാകും. വ്യാപ്തങ്ങളുടെ തുക

$$\frac{1}{100^3}b^2h\left(1^2+2^2+3^2+...+100^2\right) = \frac{1}{100^3}b^2h\times\frac{1}{6}\times100\times101\times201$$

$$=\frac{1}{6}b^2h\times\frac{100}{100}\times\frac{101}{100}\times\frac{210}{100}$$

$$=\frac{1}{6}b^2h\times1.01\times2.01$$

പലകകളുടെ എണ്ണം 1000 ആക്കിയാലോ? കണക്കുകൂട്ടാതെ തന്നെ വ്യാപ്തങ്ങളുടെ തുക

$$\frac{1}{6}b^2h\times1.001\times2.001$$

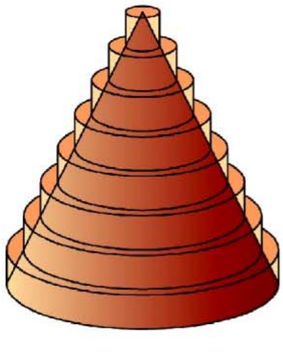
എന്നു കാണാമല്ലോ. ഈ തുകകൾ ഏതു സംഖ്യയോടാണ് അടുത്തടുത്തു വരുന്നത്?

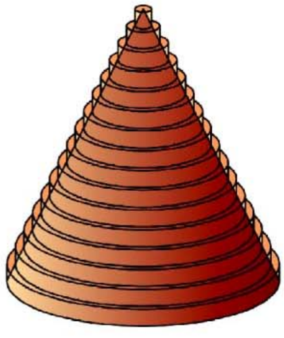
ഇതാണ് സ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം. അതായത്

$$\frac{1}{6}b^2h\times1\times2=\frac{1}{3}b^2h$$

## വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യപ്തം

ചതുരപ്പലകകളടുക്കി, സമചതുരസ്തൂപികയുടെ ഏകദേശം രൂപങ്ങളുണ്ടാക്കിയതുപോലെ, വട്ടപ്പല കകളടുക്കി വൃത്തസ്തൂപികയുടെ ഏകദേശരൂപങ്ങൾ ചമയ്ക്കാം:

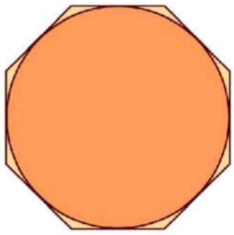




ഇതിലൂടെ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യപ്തവും കണ്ടുപിടിക്കാം (ശ്രമിച്ചുനോക്കൂ)

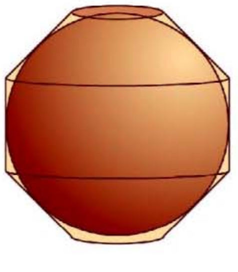
## ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ്

ഇതിന്, ആദ്യം ഗോളത്തിന്റെ മധ്യത്തുകൂടിയുള്ള ഒരു വൃത്തവും അതിനെ കൃത്യമായി പൊതിയുന്ന ഒരു സമബഹുഭുജവും സങ്കൽപ്പിക്കുക. (ഗണിതഭാഷയിൽ, സമബഹുഭുജത്തിന്റെ അന്തർവൃത്തമാണ് നമ്മുടെ വൃത്തം)

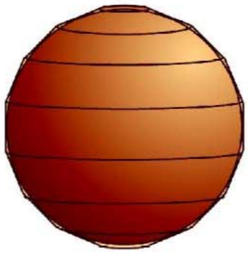


ഇനി ഈ രൂപം ഒന്നു കറങ്ങിയാൽ, ഉള്ളിലൊരു ഗോളവും, പുറത്തു മറ്റൊരു രൂപവും കിട്ടും;

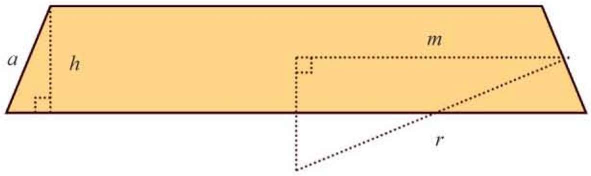
ഈ ചിത്രത്തിൽ, പുറത്തുള്ള രൂപത്തിനെ രണ്ടു വൃത്തസ്തൂപികാപീഠവും, ഒരു വൃത്തസ്തംഭവു മായി ഭാഗിക്കാം:



ബഹുഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുന്നതനുസരിച്ച്, പുറത്തെ രൂപം, ഗോളത്തോട് കൂടുതൽ അടുക്കും:



ഈ സ്തൂപികാപീഠങ്ങളുടെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കാൻ, അവയിൽ ഒന്നെടുത്തു നോക്കാം. ഇതിന്റെ മധ്യത്തുകൂടിയുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ ആരം $m$ എന്നും, ഉയരം $h$ എന്നുമെടുക്കാം. വൃത്തത്തിന്റെ ആരം $r$ എന്നും, അതിനെ പൊതിയുന്ന ബഹുഭുജത്തിന്റെ ഒരു വശം $a$ എന്നുംകൂടി എടുത്താൽ, ചുവടെക്കാണുന്ന ചിത്രം കിട്ടും.




ഇതിലെ രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങൾ സദൃശമാകയാൽ

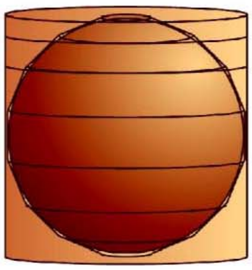
$$\frac{m}{r} = \frac{h}{a}$$

എന്നു കാണാം. അതായത്

$$am = rh$$

ഇതു കറങ്ങിയുണ്ടാകുന്ന പീഠത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ് $2\pi ma$ ആണെന്ന് **പീഠവും സ്തംഭവും** എന്ന ഭാഗത്തു കണ്ടല്ലോ. മുകളിലെ സമവാക്യപ്രകാരം, ഇത് $2\pi rh$ നു തുല്യമാണ്. അതായത്, പാദത്തിന്റെ ആരം $r$ ഉം, ഉയരം $h$ ഉം ആയ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ്.

അപ്പോൾ എന്തുകിട്ടി? മുകളിൽ കണ്ട ഗോളത്തിന്റെ ഏകദേശരൂപത്തിലെ ഓരോ സ്തൂപികാപീഠത്തിന്റെയും പാർശ്വതലപരപ്പളവ്, അതേ ഉയരവും, ഗോളത്തിന്റെ ആരവുമായ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവാണ്. അതിനാൽ, ഈ ഏകദേശരൂപത്തിന്റെ ആകെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ്, ഈ വൃത്തസ്തംഭങ്ങളുടെ ആകെ പാർശ്വതലപരപ്പളവാണ്. ഈ വൃത്തസ്തംഭങ്ങൾ കൂട്ടിവച്ചാൽ കിട്ടുന്നതോ? വലിയൊരു വൃത്തസ്തംഭം:



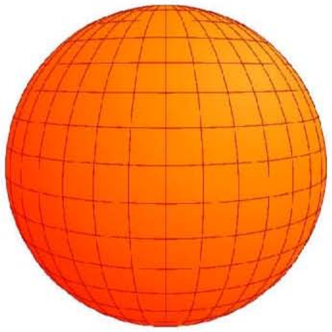
വൃത്തത്തെ പൊതിയുന്ന ബഹുഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുന്നതനുസരിച്ച് അത് കൂടുതൽ വൃത്തസമാനമാകും; ഗോളത്തെ പൊതിയുന്ന രൂപം, ഗോളസമാനമാകും. ഇപ്പോൾ കണ്ടതനുസരിച്ച്, വശങ്ങൾ എത്ര കൂടിയാലും, ഈ രൂപത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ്, ഗോളത്തെ പൊതിയുന്ന വൃത്ത സ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവാണ്. അപ്പോൾ ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവും, അതിനെ പൊതിയുന്ന വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ് തന്നെ. വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ പാദത്തിന്റെ ആരം $r$ ഉം, ഉയരം $2r$ ഉം ആയതിനാൽ അതിന്റെ പാർശ്വതലപരപ്പളവ്

$$2\pi \times r \times 2r = 4\pi r^2$$

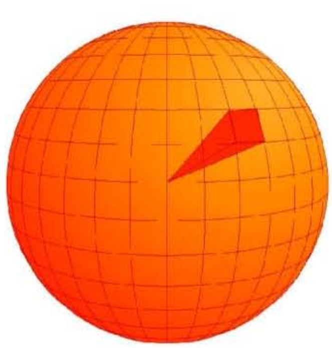
ഇതുതന്നെയാണ് ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവും.

### ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കണ്ടുപിടിക്കാൻ, ഈ ചിത്രം നോക്കുക:



നെടുകെയും കുറുകെയുമുള്ള വൃത്തങ്ങൾ കൊണ്ട് ഗോളത്തിനെ കളങ്ങളായി തിരിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇത്തരമൊരു കളത്തിന്റെ മൂലകളെ ഗോളകേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ, സമചതുരസ്തൂപിക പോലുള്ള ഒരു രൂപം കിട്ടും:



ഇത്തരം രൂപങ്ങൾ ചേർന്നതാണ് ഗോളം; അതിനാൽ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം ഈ രൂപങ്ങളുടെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ തുകയാണ്. ഇനി ഗോളത്തിലെ കളങ്ങളോരോന്നിനേയും, ഗോളത്തെ തൊടുന്ന ചെറു സമചതുരങ്ങളാക്കിമാറ്റിയാൽ, ഗോളത്തെ പൊതിയുന്ന ഒരു രൂപം കിട്ടും; അത് ശരിയായ സമചതുരസ്തൂപികകൾ യോജിപ്പിച്ചതാണ്. ഈ സ്തൂപികകളുടെയെല്ലാം ഉയരം, ഗോളത്തിന്റെ ആരം തന്നെയാണ്. ഇത് $r$ എന്നും, ഒരു സ്തൂപികയുടെ പാദപരപ്പളവ് $a$ എന്നുമെടുത്താൽ, അതിന്റെ വ്യാപ്തം $\frac{1}{3}ar$ എന്നു കിട്ടും. ഗോളത്തെ പൊതിഞ്ഞുനിൽക്കുന്ന രൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം. ഈ സ്തൂപികകളുടെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ തുകയാണല്ലോ. സ്തൂപികകളുടെയെല്ലാം പാദങ്ങൾ ചേർന്നാൽ, ഈ രൂപത്തിന്റെ ഉപരിതലവുമാകും. അപ്പോൾ ഈ രൂപത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവ് $s$ എന്നെടുത്താൽ, അതിന്റെ വ്യാപ്തം $\frac{1}{3}sr$ എന്നുകിട്ടും.

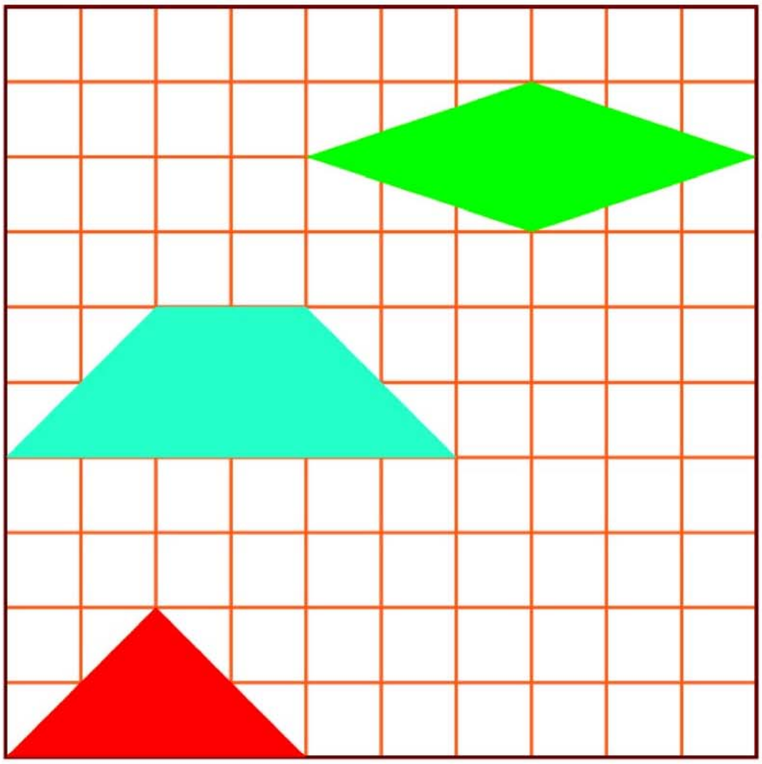
ഗോളത്തിലെ കളങ്ങൾ ചെറുതാകുകയും അവയുടെ എണ്ണം കൂടുകയും ചെയ്യുന്തോറും ഗോളത്തെ പൊതിയുന്ന രൂപം കൂടുതൽ ഗോളത്തോടടുക്കും; $s$ എന്നത്, ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലപരപ്പളവിനോടും. അത് $4\pi r^2$ ആണെന്നു കണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

$$\frac{1}{3} \times 4\pi r^2 \times r = \frac{4}{3}\pi r^3$$

# 6 സൂചകസംഖ്യകൾ

## സംഖ്യാചിത്രങ്ങൾ

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



ഇതുപോലെ ചില ചിത്രങ്ങൾ ഒമ്പതാംക്ലാസിലെ **ബഹുഭുജങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ബഹുഭുജ നിർമാണം** എന്ന ഭാഗത്തിൽ വരച്ചി ട്ടുണ്ടല്ലോ.

മുകളിലത്തെ ചിത്രം എങ്ങനെയാണ് പകർത്തി വരയ്ക്കുക?

10 സെന്റിമീറ്റർ വശമുള്ള ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കുക; അതിൽ കുറുകെയും നെടുകയും 1 സെന്റിമീറ്റർ ഇടവിട്ടു വരച്ച്, ചെറു സമചതുരങ്ങളായി ഭാഗിക്കുക. എന്നിട്ടോ?

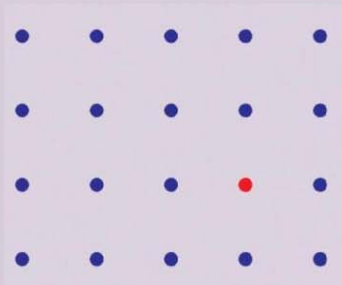
ആദ്യം മുകളിലെ സമഭുജസാമാന്തരികം വരയ്ക്കാം. അതിന് നാലു മൂലകളും അടയാളപ്പെടുത്തണം. ഇടത്തെ മൂല എവിടെയാണ്?

നെടുകെ വരച്ച ഒരു വരയും, കുറുകെ വരച്ച ഒരു വരയും ചേരുന്നിടത്താണ് ഇത്. ഏതൊക്കെയാണ് വരകൾ?

### വരിയും നിരയും

വരിയിലും നിരയിലുമായി അടുക്കിയിരിക്കുന്ന കുറേ വസ്തുക്കളിൽ, ഒരു നിശ്ചിതസ്ഥാനത്തുള്ളതിനെ എങ്ങനെ സൂചിപ്പിക്കും? ഉദാഹരണമായി, ഒരു അലമാരയിൽ അടുക്കിവച്ചിരിക്കുന്ന പുസ്തകങ്ങളിൽ, നമുക്കു വേണ്ടതു "താഴെനിന്നു മൂന്നാമത്തെ പടിയിൽ, ഇടത്തു നിന്നു അഞ്ചാമതിരിക്കുന്ന പുസ്തകം" എന്നോ മറ്റോ പറയാം.

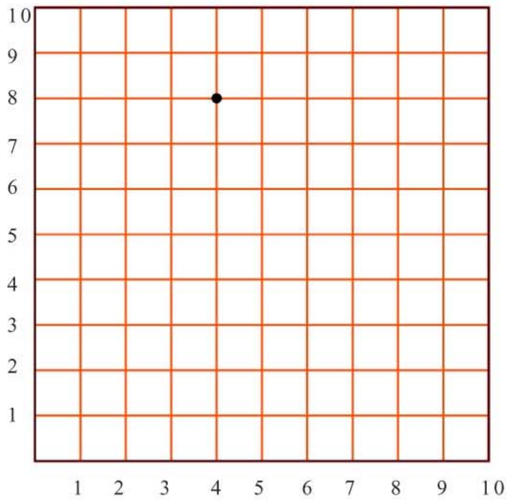
ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



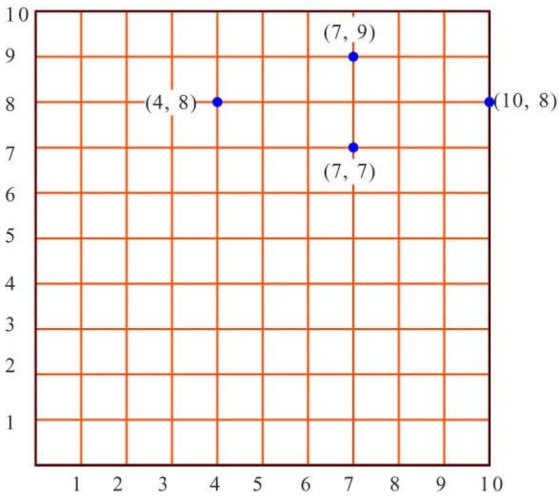
ഇതിലെ ചുവന്ന പൊട്ടിന്റെ സ്ഥാനം എങ്ങനെ പറയും?

താഴെ നിന്നു രണ്ടാമത്തെ വരിയിൽ, ഇടത്തുനിന്നു നാലാമത്തേത് എന്നു പറയാം. മറ്റേതെല്ലാം രീതിയിൽ ഇതു സൂചിപ്പിക്കാം?

സമചതുരത്തിന്റെ ഇടതുവശത്തുനിന്ന് 4 സെന്റിമീറ്റർ വലത്തുള്ള വരയും, ചുവട്ടിലെ വശത്തിൽ നിന്നു 8 സെന്റിമീറ്റർ മുകളിലുള്ള വരയും.



ഇതുപോലെ മറ്റു മൂലകളുടേയും സ്ഥാനം ഇടത്തുനിന്നും, ചുവട്ടിൽ നിന്നുമുള്ള അകലങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച്, അടയാളപ്പെടുത്താമല്ലോ. സൗകര്യത്തിനായി, ഈ സംഖ്യകൾ അതതു ബിന്ദുക്കളുടെ നേരെ എഴുതിവയ്ക്കാം.




ഇനി സമഭുജസാമാന്തരികം വരയ്ക്കാമല്ലോ. മാത്രമല്ല, എങ്ങനെ വരയ്ക്കണമെന്ന് മറ്റുള്ളവർക്ക് എളുപ്പം പറഞ്ഞുകൊടുക്കുകയുമാവാം.

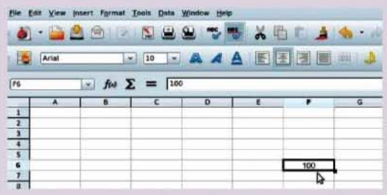
ഇതുപോലെ, ആദ്യത്തെ ചിത്രത്തിലെ സമപാർശ്വലംബകത്തിന്റെ മൂലകൾ എങ്ങനെ അടയാളപ്പെടുത്തും?

ഇതിന്റെ ഇടതുവശത്തെ താഴത്തുള്ള മൂല സമചതുരത്തിന്റെ ഇടതുവശത്തുതന്നെയാണ്. ഈ വശത്തെയും, സമചതുരത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തെയും 0 എന്നു സൂചിപ്പിക്കാം. (എന്തുകൊണ്ട്?)

### പട്ടികയിലെ സ്ഥാനം

ഒരു പട്ടികയിൽ, വരിയിലും നിരയിലുമായി കുറേ കളങ്ങൾ ഉണ്ടാകുമല്ലോ. ഒരു നിശ്ചിത കളത്തിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നതെങ്ങനെയാണ്?

Open office calc പോലെയുള്ള സ്പ്രെഡ്ഷീറ്റുകൾ പരിചയമുണ്ടല്ലോ. അവയിലെങ്ങനെയാണ് വ്യത്യസ്ത കളങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത്?

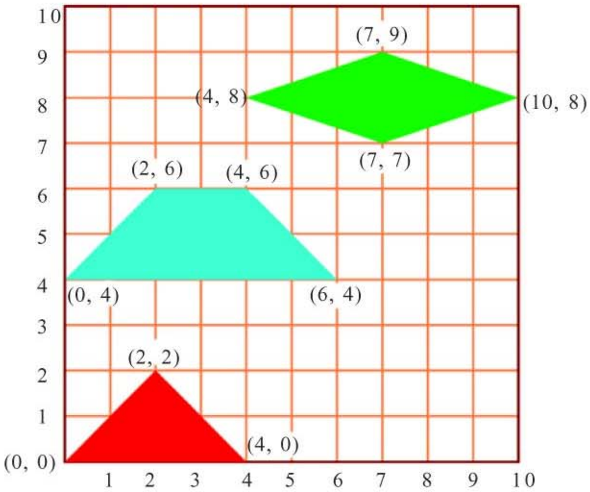


പട്ടികയുടെ ഇടതുവശത്ത്, മുകളിൽ നിന്നു താഴോട്ടായി 1, 2, 3, .... എന്നിങ്ങനെയുള്ള സംഖ്യകൾ കൊണ്ടു വരികളേയും, പട്ടികയുടെ മുകളിൽ ഇടത്തുനിന്ന് വലത്തോട്ട് A, B, C, .... എന്നീ അക്ഷരങ്ങൾകൊണ്ടു നിരകളേയും അടയാളപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്. ഇതു രണ്ടും ഉപയോഗിച്ച് ഏതു കളത്തേയും സൂചിപ്പിക്കാമല്ലോ.

ഉദാഹരണമായി, മുകളിലെ ചിത്രത്തിൽ 100 എന്നെഴുതിയിരിക്കുന്നത്, F6 എന്ന കളത്തിലാണ്.

അപ്പോൾ നമുക്കു വരയ്ക്കേണ്ട ലംബകത്തിന്റെ ഇടതുവശത്തെ താഴത്തുള്ള മൂലയെ എങ്ങനെ എഴുതാം? മറ്റു മൂലകളെയോ?

ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യ കളേതൊക്കെയാണ്?

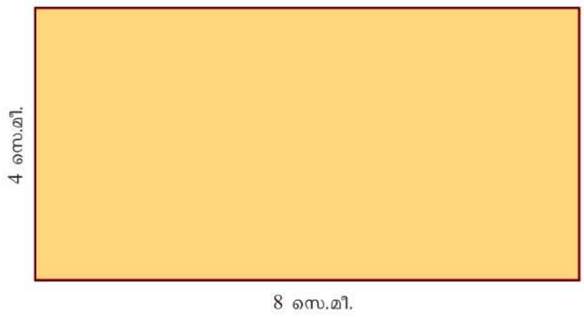



ഇതുപോലെയുള്ള സമചതുരക്കളങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചു ചുവടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന രൂപങ്ങളോരോന്നും വരച്ച്, മൂലകളുടെ സ്ഥാനം സംഖ്യകൾകൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കുക.

- സമപാർശ്വമല്ലാത്ത ത്രികോണം
- സമഭുജമല്ലാത്ത സാമാന്തരികം
- സമപാർശ്വമല്ലാത്ത ലംബകം
- പഞ്ചഭുജം
- ഷഡ്ഭുജം

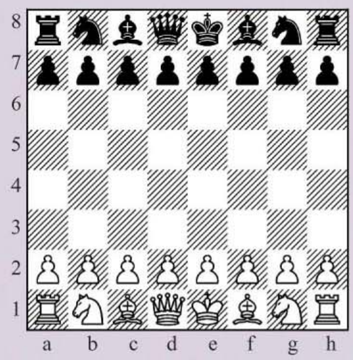
## വീണ്ടും ചില സംഖ്യാചിത്രങ്ങൾ

8 സെന്റിമീറ്റർ നീളവും 4 സെന്റിമീറ്റർ വീതിയുമുള്ള ചതുരത്തിന്റെ നടുക്കുനിന്ന് 4 സെന്റിമീറ്റർ നീളവും 2 സെന്റിമീറ്റർ വീതിയുമുള്ള ചതുരം വെട്ടിയെടുക്കണം.



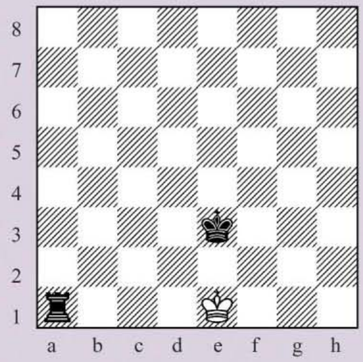

### ചതുരംഗസ്ഥാനം

ചെസ് കളികളെക്കുറിച്ചുള്ള വിവരണങ്ങളിൽ, പലകയിലെ സ്ഥാനങ്ങൾ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് എങ്ങനെയാണെന്നു ശ്രദ്ധിച്ചിട്ടുണ്ടോ?

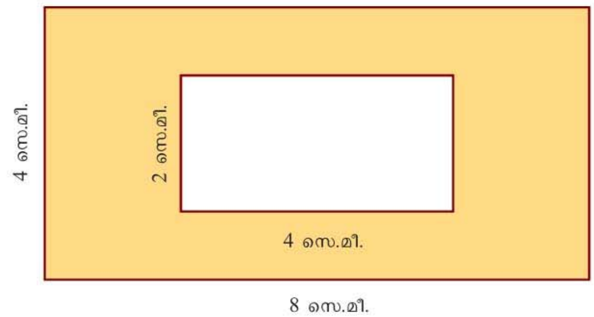


വരികൾക്ക് സംഖ്യകൾകൊണ്ടും, നിരകൾക്ക് അക്ഷരങ്ങൾകൊണ്ടും പേരിട്ടിരിക്കുന്നതു കണ്ടില്ലേ?

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



ഇതിൽ വെളുത്ത രാജാവിന്റെ സ്ഥാനം e1 കറുത്ത രാജാവിന്റെ സ്ഥാനം e3 കറുത്ത തേരിന്റെ സ്ഥാനം a1.

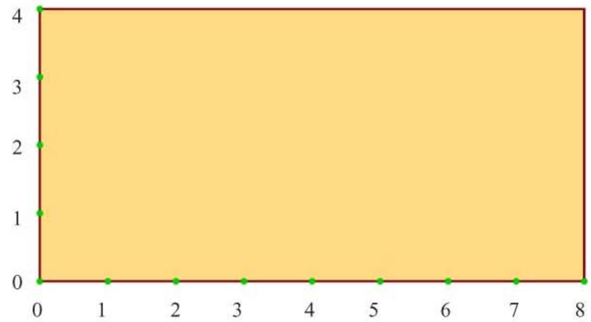



വെട്ടിയെടുക്കേണ്ട ചതുരത്തിന്റെ മൂലകൾ, ആദ്യം അടയാളപ്പെടുത്താം.

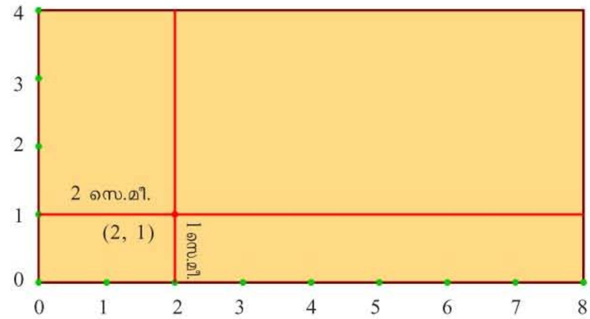
ചെറിയ ചതുരം, വലിയ ചതുരത്തിന്റെ ഒത്ത നടുക്കാകണമല്ലോ. അപ്പോൾ ചെറിയ ചതുരത്തിന്റെ ഇടതും വലതും വശങ്ങൾ, വലിയ ചതുരത്തിന്റെ ഇടതും വലതുമുള്ള വശങ്ങളിൽനിന്ന് ഒരേ അകലത്തിലായിരിക്കണ്ടേ? അതുപോലെതന്നെ രണ്ടു ചതുരങ്ങളുടെയും താഴത്തേയും മുകളിലേയും വശങ്ങളും.

എത്ര അകലത്തിൽ?

വലിയ ചതുരത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തിലും, ഇടത്തെ വശത്തിലും ഒരു സെന്റിമീറ്റർ ഇടവിട്ട് അകലങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്താം.



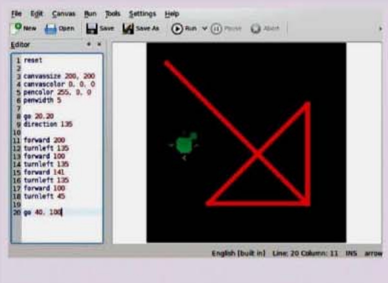

ഇനി വെട്ടിയെടുക്കേണ്ട ചെറിയ ചതുരത്തിന്റെ താഴത്തെ ഇടതു മൂല എങ്ങനെ അടയാളപ്പെടുത്താം?




ഇതുപോലെ മറ്റു മൂലകളും അടയാളപ്പെടുത്താമല്ലോ:

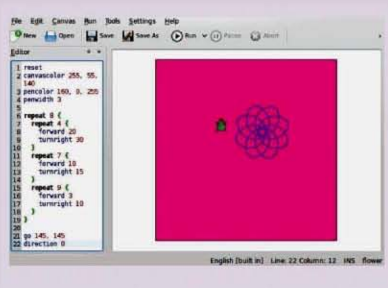
### കമ്പ്യൂട്ടർ ചിത്രങ്ങൾ

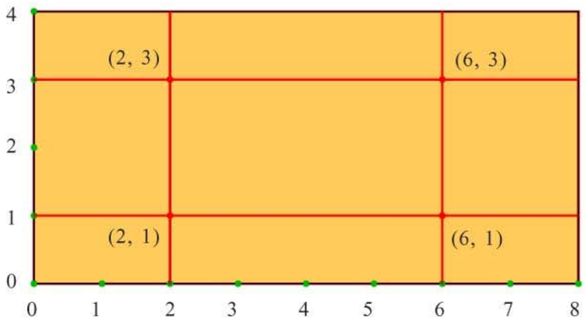
ജ്യാമിതീയരൂപങ്ങളും മറ്റും കമ്പ്യൂട്ടറിൽ വരയ്ക്കാനുള്ള ലളിതമായ ഒരു പ്രോഗ്രാമാണ് ലീനക്സിലെ KTurtle. വിവിധ സ്ഥാനങ്ങളെ സംഖ്യകൾകൊണ്ടു സൂചിപ്പിച്ചുകൊണ്ടാണ് ഇതിൽ ചിത്രങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്നത്.



ചിത്രത്തിൽ ഇടതുവശത്തു കാണുന്നത് ചിത്രം വരയ്ക്കാനായി ഉപയോഗിച്ച കോഡ് ആണ്.

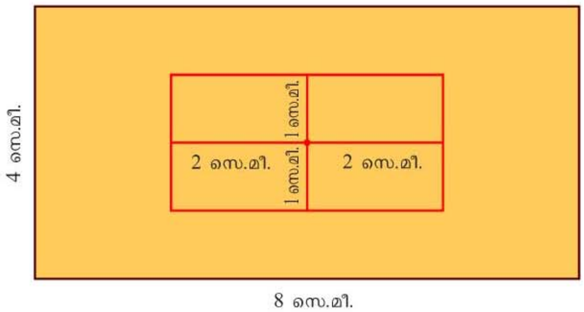
അൽപം ശ്രമിച്ചാൽ കുറേക്കൂടി സങ്കീർണമായ ചിത്രങ്ങളും ഇതിൽ വരയ്ക്കാം.



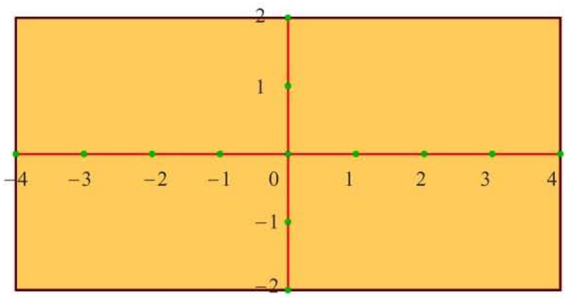



ഇനി ചതുരം വരച്ച്, വെട്ടിയെടുക്കാം.

മറ്റൊരു രീതിയിലും ആലോചിക്കാം: വലിയ ചതുരത്തിന്റെ മധ്യ ബിന്ദുവിൽനിന്ന്, 2 സെന്റിമീറ്റർ ഇടത്തും വലത്തുമാണ്, ചെറിയ ചതുരത്തിന്റെ ഇടതും വലതും ഉള്ള വശങ്ങൾ; 1 സെന്റിമീറ്റർ താഴെയും മുകളിലുമാണ്, അതിന്റെ താഴത്തെയും മുകളിലേയും വശങ്ങൾ.




ഈ രീതിയിൽ ചെറിയ ചതുരത്തിന്റെ മൂലകളെ സൂചിപ്പിക്കാൻ, വലിയ ചതുരത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിലൂടെ കുറുകെയും നെടുകെയും ഒരു ജോടി വരകൾ വരച്ച്, അതിൽ അകലങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്താം; വലത് - ഇടത് , മേല് - കീഴ് എന്നിങ്ങനെ വേർതിരിക്കാൻ, ഇട ത്തോട്ടും, കീഴോട്ടുമുള്ള അകലങ്ങളെ ന്യൂനസംഖ്യകൾ കൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കാം. (സംഖ്യാരേഖയിൽ, ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം അട യാളപ്പെടുത്തിയത് ഓർമയുണ്ടല്ലോ?)




ഇതിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ, മുറിച്ചെടുക്കേണ്ട ചെറിയ ചതുര ത്തിന്റെ മൂലകൾ എങ്ങനെ സൂചിപ്പിക്കും?

### അച്ചടിഭാഷ

കമ്പ്യൂട്ടർ ഉപയോഗിച്ചുള്ള അച്ചടിയിൽ, ഒരു പേജിലെ അക്ഷരങ്ങളും ചിത്രങ്ങളുമെല്ലാം അതതിന്റെ സ്ഥാനത്ത് വരയ്ക്കാനുപയോഗിക്കുന്ന ഒരു ഭാഷയാണ് Post Script ഒരു പേജിലെ വിവിധ സ്ഥാനങ്ങളെ സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ചു സൂചിപ്പിക്കുകയാണ് ഇതിൽ ചെയ്യുന്നത്.

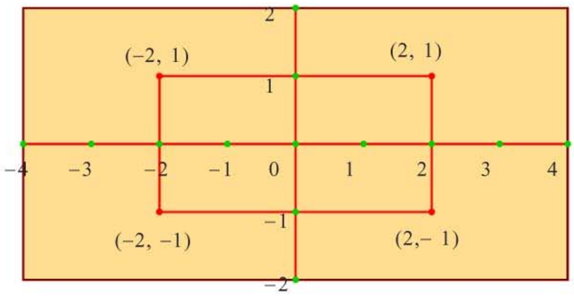
ഒരു ഉദാഹരണം നോക്കാം. ലീനക്സിലെ gedit പോലെയുള്ള ഒരു text editor തുറന്ന് ചുവടെപ്പറയുന്ന വരികൾ എഴുതുക.

```
newpath
20 20 moveto
40 20 lineto
40 40 lineto
20 40 lineto
closepath
fill
showpage
```

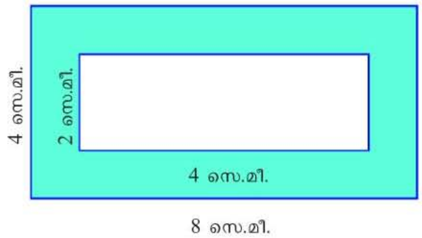
ഇത് പോസ്റ്റ്സ്ക്രിപ്റ്റ് ഭാഷയാണ്. ഇതിലൂടെ വരച്ചതെന്താണെന്നു കാണാൻ. gv എന്ന പ്രോഗ്രാം ഉപയോഗിക്കാം. അതിന്, ഈ ഫയൽ test.ps എന്ന പേരിൽ സേവ് ചെയ്യുക. ഒരു ടെർമിനൽ തുറന്ന് gv test.ps എന്ന ആജ്ഞ കൊടുത്താൽ ഒരു വെളുത്ത സ്ക്രീനിൽ, ഇടത്തു താഴെ മൂലയിൽ ഒരു കറുത്ത സമചതുരം കാണാം.

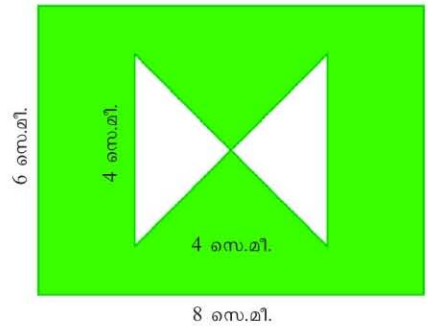
ഇവിടെ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്ന സംഖ്യാജോടികളെല്ലാം, പേജിന്റെ ഇടതു വശത്തുനിന്നും, താഴത്തെ വശത്തുനിന്നും, അതിലെ വിവിധ സ്ഥാനങ്ങളിലേക്കുള്ള അകലമാണ്. നീളത്തിന്റെ ഏകകം, അച്ചടിയിൽ സാധാരണ ഉപയോഗിക്കുന്ന പോയിന്റ് (point) ആണ്. ഒരു പോയിന്റ് എന്നത് ഏതാണ്ട് 0.035 സെന്റിമീറ്ററാണ്.

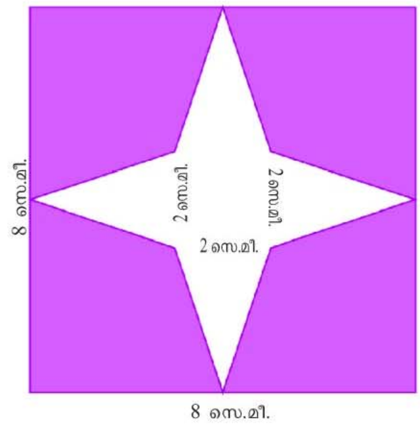
മിക്ക ഡി.ടി.പി ആപ്ലിക്കേഷനുകളുടേയും പുറകിൽ അദൃശ്യമായി പ്രവർത്തിക്കുന്നത് പോസ്റ്റ്സ്ക്രിപ്റ്റ് ഭാഷയാണ്.




ഇനി ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന രൂപങ്ങളോരോന്നും വെട്ടിയെടുക്കാൻ അടയാളപ്പെടുത്തേണ്ട ബിന്ദുക്കളെ, വലിയ ചതുരത്തിന്റെ മധ്യത്തിൽനിന്നുള്ള അളവുകൾ ഉപയോഗിച്ച് (ഇപ്പോൾ ചെയ്തതുപോലെ) എഴുതുക:




### നിറങ്ങളും സംഖ്യകളും

കമ്പ്യൂട്ടറിൽ സ്ക്രീനിലെ സ്ഥാനങ്ങളെ മാത്രമല്ല, നിറങ്ങളേയും സംഖ്യകൾ കൊണ്ടുതന്നെയാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. പല അളവുകളിൽ ചുവപ്പ്, പച്ച, നീല എന്നീ നിറങ്ങൾ കലർത്തിയാണ് സ്ക്രീനിൽ വിവിധ നിറങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കുന്നത്.

ലീനക്സിലെ Gcolor2 ഉപയോഗിച്ച് ഇതു പെട്ടെന്നു മനസിലാക്കാം.

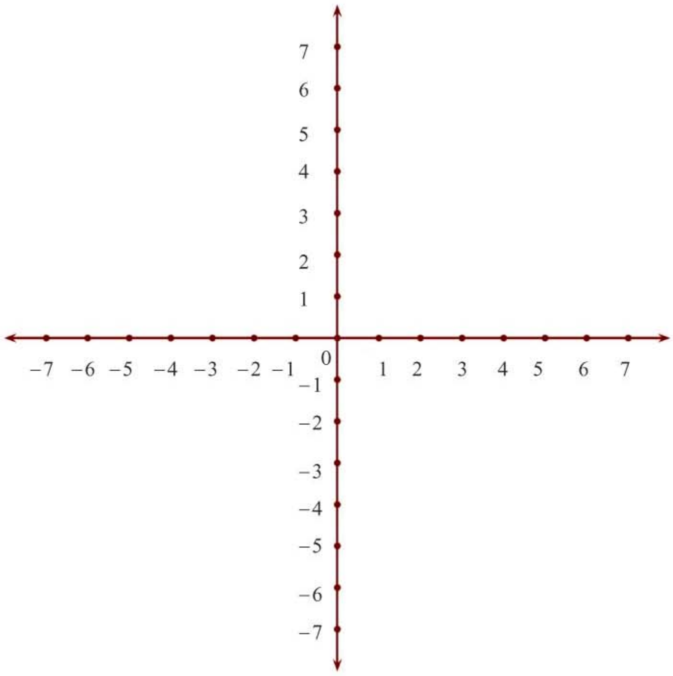

ഇതിലെ  ൽ ക്ലിക് ചെയ്തതിനു ശേഷം, സ്ക്രീനിലെ ഏതെങ്കിലും ഭാഗത്തു ക്ലിക് ചെയ്താൽ, ആ സ്ഥാനത്തെ നിറത്തിന്റെ RGB സംഖ്യകൾ കിട്ടും.

## സ്ഥാനങ്ങളും സംഖ്യകളും

ഒരേ തലത്തിലുള്ള കുറേ ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനങ്ങൾ, സംഖ്യാ ജോടികൾകൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കുന്ന രീതി കണ്ടല്ലോ. ഓരോ ജോടി സംഖ്യകളും എന്തിനെയാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്?

പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ടു വരകളിൽ നിന്ന് ഒരു ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലങ്ങൾ, അല്ലേ?

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



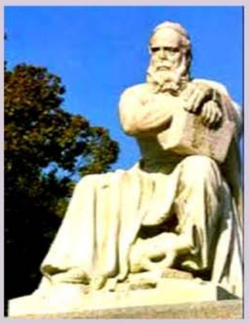

രണ്ടു ലംബരേഖകൾ. അവ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള അകലങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. ഇടതും വലതും കീഴും മേലും തിരിച്ചറിയാൻ, അധിസംഖ്യകളും ന്യൂനസംഖ്യകളും ഉപയോഗിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഇങ്ങനെ അടയാളപ്പെടുത്തുന്നത്, 1 സെന്റിമീറ്റർ തന്നെ ഇടവിട്ടാകണമെന്നില്ല; അടുത്തടുത്ത ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ അകലത്തിലായിരിക്കണം എന്നുമാത്രം. മറ്റൊരു രീതിയിൽപ്പറഞ്ഞാൽ, ഏതു നീളവും അളക്കാനുള്ള ഏകകമായി എടുക്കാം. (രണ്ടു സംഖ്യാരേഖകൾ, പരസ്പരം ലംബമായി, പൂജ്യം പൊതുവായി, വരച്ചിരിക്കുന്നതായി കരുതാം.)

ഈ വരകളിൽനിന്നുള്ള അകലം ഉപയോഗിച്ച്, അവ ഉൾപ്പെടുന്ന തലത്തിലെ ഏതു ബിന്ദുവിന്റെയും സ്ഥാനം സൂചിപ്പിക്കാമല്ലോ.

### അൽപം ചരിത്രം

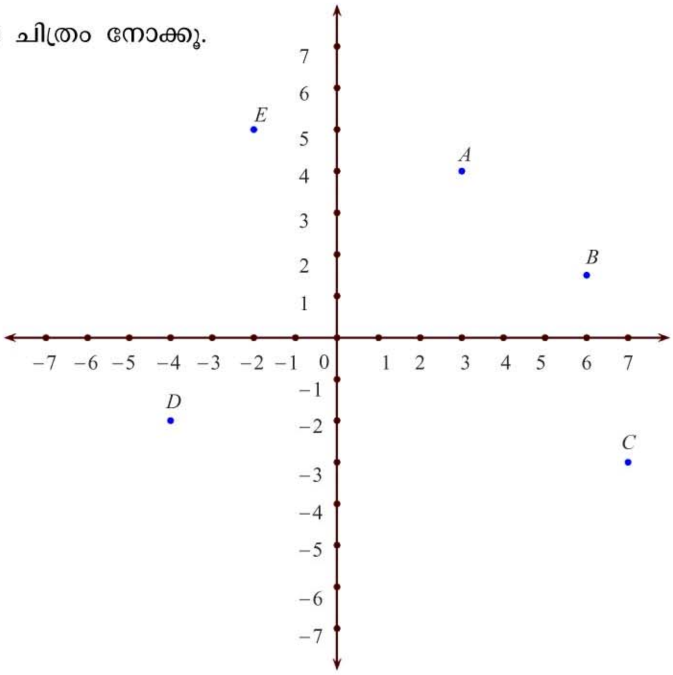
ബി.സി. ഇരുനൂറാമാണ്ടിൽത്തന്നെ, അപ്പൊളോണിയസ് എന്ന ഗണിതകാരൻ, ചില ജ്യാമിതീയപ്രശ്നങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം കാണാൻ ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനങ്ങളെ സംഖ്യകൾകൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കുന്ന രീതി ഉപയോഗിച്ചിട്ടുണ്ട്; നിശ്ചിത രേഖകളിൽ നിന്നുള്ള അകലങ്ങളാണ് ഇത്തരം സംഖ്യകൾ.

തുടർന്ന് എ.ഡി. പതിനൊന്നാം നൂറ്റാണ്ടിലെ പേർഷ്യയിൽ, ഗണിതകാരനും കവിയുമായ ഒമർ ഖയ്യാം, ചില ബീജഗണിത പ്രശ്നങ്ങളെ ജ്യാമിതീയ പ്രശ്നങ്ങളാക്കി മാറ്റാൻ, സംഖ്യാജോടികളെ ബിന്ദുക്കളാക്കി വരയ്ക്കുന്ന രീതി ഉപയോഗിച്ചിട്ടുണ്ട്.



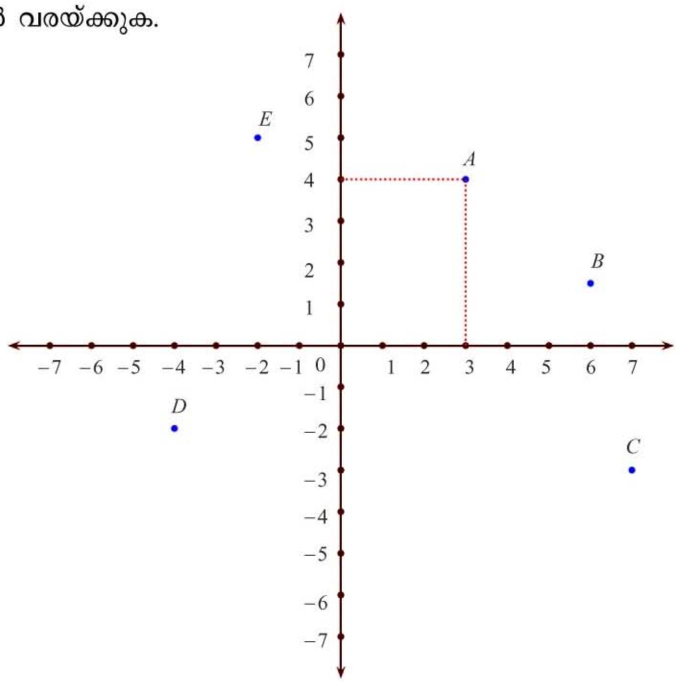
ജ്യാമിതിയും, ബീജഗണിതവുമായുള്ള ഈ ബന്ധം ചിട്ടയായ ഒരു ഗണിതശാഖയായി വളർന്നത്, പതിനേഴാം നൂറ്റാണ്ടിൽ, ഫ്രാൻസിലെ തത്വചിന്തകനായ റെനെ ദേക്കാർത് (Rene Descartes) ‘‘ജ്യാമിതി’’ എന്ന പ്രബന്ധം പ്രസിദ്ധീകരിച്ചതിൽപ്പിന്നെയാണ്.

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.




$A, B, C, D, E$ ഇവയെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യാജോടികൾ എന്തൊക്കെയാണ്?

ആദ്യം $A$ നോക്കാം. $A$ യിൽനിന്ന് ഈ രണ്ടു വരകളിലേക്കും ലംബങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.



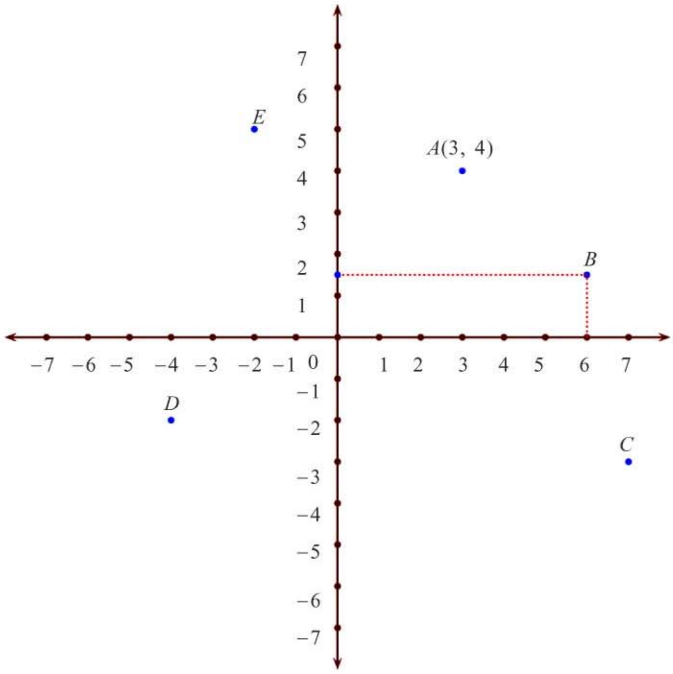

വിലങ്ങനെയുള്ള വരയിലേക്കുള്ള ലംബം, അതുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്നത്, 3 എന്ന ബിന്ദുവിലും, കുത്തനെയുള്ള വരയിലേക്കുള്ള ലംബം, അതുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്നത്, 4 എന്ന ബിന്ദുവിലുമാണല്ലോ. അതിനാൽ, നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ, ഈ ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനത്തെ (3, 4) എന്ന സംഖ്യാജോടികൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കാം.

ഇനി $B$ നോക്കൂ.

### ഈച്ചയും ജ്യാമിതിയും

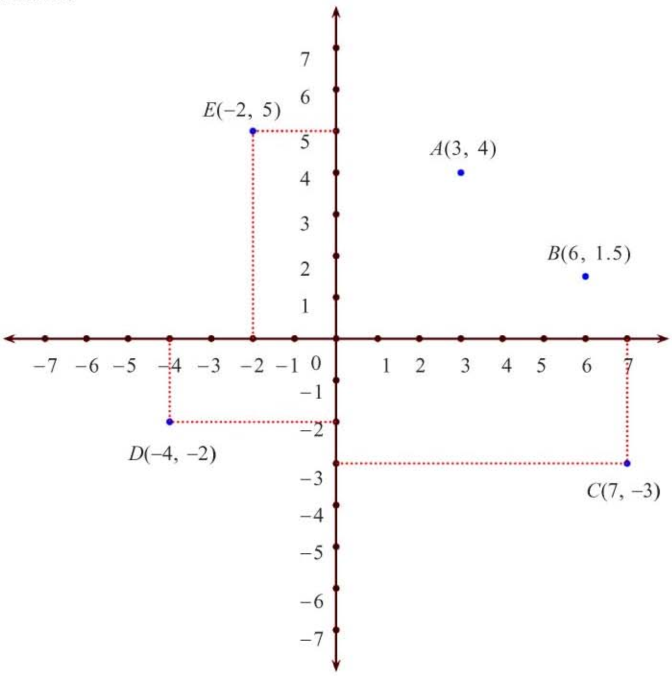
ജ്യാമിതിയിൽ, ദേക്കാർത് പുതിയൊരു രീതി കണ്ടെത്തിയതിനെക്കുറിച്ച് രസകരമായൊരു കഥയുണ്ട്. കട്ടിലിൽക്കിടന്നുകൊണ്ട് എന്തോ ആലോചിച്ചിരുന്ന അദ്ദേഹം, മുറിയുടെ മുകൾത്തട്ടിൽ ഒരു ഈച്ചയെ കാണുന്നു. അതിന്റെ ചലനത്തിന്റെ പാത അറിയാൻ, അടുത്തടുത്ത രണ്ടു ചുമരുകളിൽ നിന്നുള്ള അതിന്റെ അകലങ്ങളും, അവ മാറുന്നതിന്റെ ബന്ധവും മനസിലാക്കിയാൽ മതിയെന്ന ചിന്ത ഉണ്ടാകുന്നു. ഈ ചിന്തയാണത്രേ, പുതിയൊരു ജ്യാമിതീയ രീതിയിലേക്ക് അദ്ദേഹത്തെ നയിച്ചത്.

ഇതു സത്യമാണെങ്കിലും അല്ലെങ്കിലും, രണ്ടു ലംബരേഖകളിൽ നിന്നുള്ള അകലങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ഒരു തലത്തിലെ ഏതു സ്ഥാനവും സൂചിപ്പിക്കാമെന്നും, അത്തരം സംഖ്യജോടികളുപയോഗിച്ചു ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങളെ വ്യാഖ്യാനിക്കാം എന്നുമുള്ള ചിന്തയ്ക്ക് നല്ലൊരുദാഹരണമാണ് ഈ ഈച്ചക്കഥ.




കുത്തനെയുള്ള വരയിലേക്കുള്ള ലംബം അതുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്നത്, 1 ന്റേയും 2 ന്റേയും കൃത്യം നടുക്കാണ്. അപ്പോൾ $B$ യെ $\left(6, \frac{3}{2}\right)$ എന്നെഴുതാം.

ഇതുപോലെ $C, D, E$ ഇവയേയും സംഖ്യാജോടികൾകൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കാം.




അപ്പോൾ, പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ടു വരകളും, നീളമളക്കാൻ യുക്തമായ ഒരു ഏകകവും ഉപയോഗിച്ച്, ഒരു തലത്തിലെ ബിന്ദുക്കളെയെല്ലാം സംഖ്യാജോടികൾകൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കാം.

**ഭൂവിഭജനം**

ഭൂമിയിലെ വ്യത്യസ്തസ്ഥാനങ്ങൾ സൂചിപ്പിക്കുന്നത്, അക്ഷാംശം, രേഖാംശം എന്നീ രണ്ടു സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ചാണല്ലോ. എന്താണ് ഇവയുടെ അർത്ഥം?

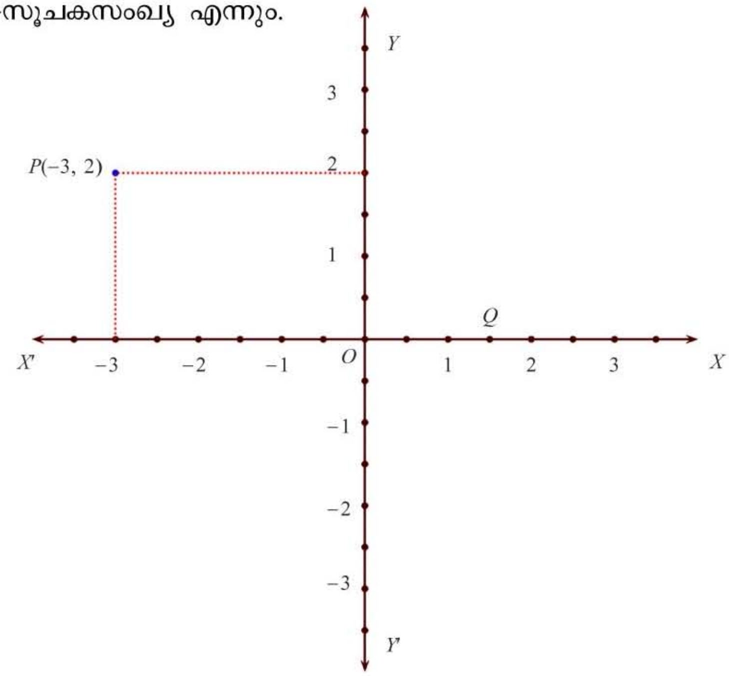
ഭൂമി സ്വയം തിരിയുന്നുണ്ടല്ലോ. ഏതു ഗോളം തിരിയുമ്പോഴും, അതിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ അനങ്ങാതെയിരിക്കും. അവയാണ് ധ്രുവങ്ങൾ (poles) അവയെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖയാണ്, തിരിയുന്നതിന്റെ അക്ഷം (axis of rotation). ഗോളത്തിൽ വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തങ്ങളിൽ, കേന്ദ്രം ഗോളത്തിന്റേതു തന്നെ ആയവയാണ് വൻവൃത്തങ്ങൾ. രണ്ടു ധ്രുവങ്ങളിൽ നിന്നും തുല്യ ദൂരത്തിലുള്ള വൻവൃത്തമാണ്, ഭൂമധ്യരേഖ (equator). അതിനു സമാന്തരമായ വൃത്തങ്ങളാണ് അക്ഷാംശ രേഖകൾ (lines of latitude)

ധ്രുവങ്ങളിൽക്കൂടി വരയ്ക്കുന്ന വൻവൃത്തങ്ങളാണ് രേഖാംശരേഖകൾ (lines of longitude or meridians). ഇവയിൽ, ഇംഗ്ലണ്ടിലെ ഗ്രീൻവിച്ച് എന്ന സ്ഥലത്തുകൂടി കടന്നുപോകുന്നതിനെ പ്രധാന രേഖാംശരേഖയായി എടുത്തിരിക്കുന്നു. (prime meridian)


അങ്ങനെ അക്ഷാംശരേഖകളും രേഖാംശരേഖകളുമായ വൃത്തങ്ങൾ, ഭൂമിയെ കളങ്ങളാക്കുന്നതായി സങ്കൽപ്പിക്കാം.

ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കുന്ന രണ്ടു വരകൾക്ക്, സൂചകാക്ഷങ്ങൾ (axis of co-ordinates) എന്നാണ് പേര്. വിലങ്ങനെയുള്ള വരയെ $x$- അക്ഷം ($x$ - *axis*) എന്നും, കുത്തനെയുള്ള വരയെ $y$-അക്ഷം ($y$-axis) എന്നും പറയുന്നു. സാധാരണയായി $x$-അക്ഷത്തിന് $XX^1$ എന്നും, $y$-അക്ഷത്തിന് $YY^1$ എന്നുമാണ് പേരിടുന്നത്. ഇവ തമ്മിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്, ആധാരബിന്ദു (origin) എന്നാണ് പേര്. ഈ ബിന്ദുവിനെ സാധാരണയായി $O$ എന്ന അക്ഷരംകൊണ്ടാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനം സൂചിപ്പിക്കാൻ $x$-അക്ഷത്തിലേക്കും $y$-അക്ഷത്തിലേക്കും ലംബങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്ന രീതി കണ്ടല്ലോ. ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന ഒരു ജോടി സംഖ്യകളെ, ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ (co-ordinates) എന്നാണ് പറയുന്നത്. ആദ്യത്തെ സംഖ്യയെ $x$-സൂചകസംഖ്യ എന്നും രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യയെ $y$-സൂചകസംഖ്യ എന്നും.




ഉദാഹരണമായി, മുകളിലെ ചിത്രത്തിൽ, $P$ എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ $x$-സൂചകസംഖ്യ $-3$ ഉം $y$-സൂചകസംഖ്യ 2 ഉം ആണ്. $Q$ ന്റെ സൂചകസംഖ്യകളോ?

ഇനി ചില ചോദ്യങ്ങളാവാം.

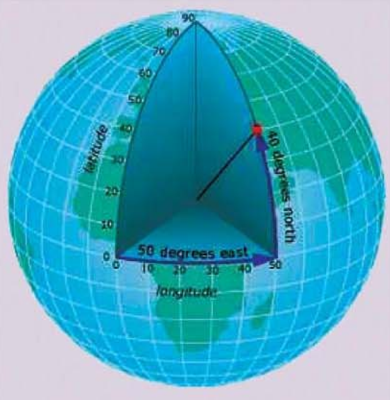
- $x$-അക്ഷത്തിലെ ബിന്ദുക്കളുടെയെല്ലാം $y$-സൂചകസംഖ്യകളുടെ പ്രത്യേകത എന്താണ്?
- $y$-അക്ഷത്തിലെ ബിന്ദുക്കളുടെയെല്ലാം $x$-സൂചകസംഖ്യകളുടെ പ്രത്യേകത എന്താണ്?
- ആധാരബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്താണ്?

### ഭൂസ്ഥാനങ്ങൾ

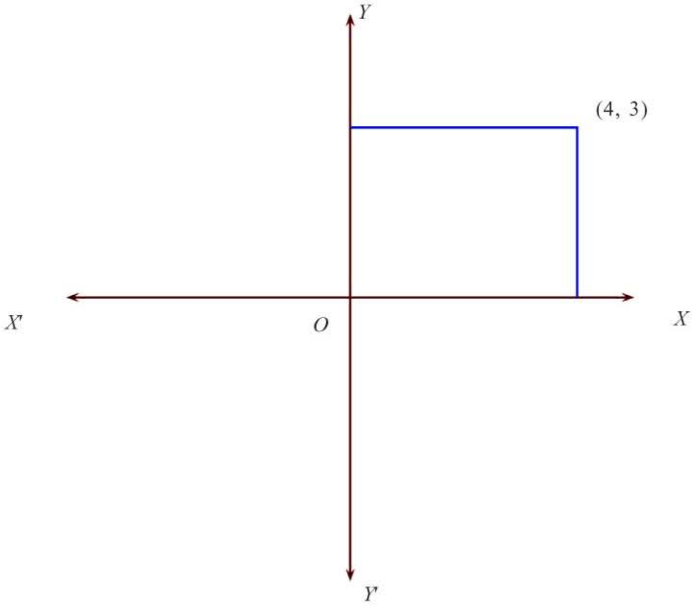
ഭൂതലത്തെ അക്ഷാംശരേഖകളും രേഖാംശരേഖകളും കളങ്ങളാക്കുന്നതു കണ്ടല്ലോ. ഇവ ഉപയോഗിച്ചാണ്, ഭൂമിയിലെ ഏതു സ്ഥാനവും സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

അതിനാദ്യം, ഭൂമധ്യരേഖയും ഗ്രീൻവിച്ച് രേഖയും സന്ധിക്കുന്ന ഒരു ബിന്ദുവും, അതിനെ ഭൂമിയുടെ കേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയും സങ്കൽപ്പിക്കുക. ഈ ബിന്ദു മറ്റൊരു അക്ഷാംശരേഖയിലെത്താൻ, വടക്കോട്ടോ തെക്കോട്ടോ നീങ്ങണം; അതിനനുസരിച്ച്, ബിന്ദുവിനെ ഭൂകേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖ മുകളിലോട്ടോ, താഴോട്ടോ ഒരു നിശ്ചിത കോൺ തിരിയണം. ഇത്തരം കോണുകൾ ഉപയോഗിച്ചാണ് അക്ഷാംശരേഖകളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. (വടക്ക്, തെക്ക് എന്നി വിശേഷണങ്ങൾകൂടി ഉപയോഗിക്കും.) ഇനി നമ്മുടെ ആദ്യത്തെ ബിന്ദു, മറ്റൊരു രേഖാംശരേഖയിലേക്കു മാറണമെങ്കിലോ? കിഴക്കോ, പടിഞ്ഞാറോ മാറണം; അതിനനുസരിച്ച്, വരയും വലത്തോട്ടോ ഇടത്തോട്ടോ ഒരു നിശ്ചിത കോൺ തിരിയണം. ഈ കോണുകളാണ് രേഖാംശരേഖകളുടെ സൂചകങ്ങൾ.

ഇത്തരം ഈ കോണുകൾ ഉപയോഗിച്ച്, ഭൂമിയിലെ ഏതു സ്ഥാനവും സൂചിപ്പിക്കാം.

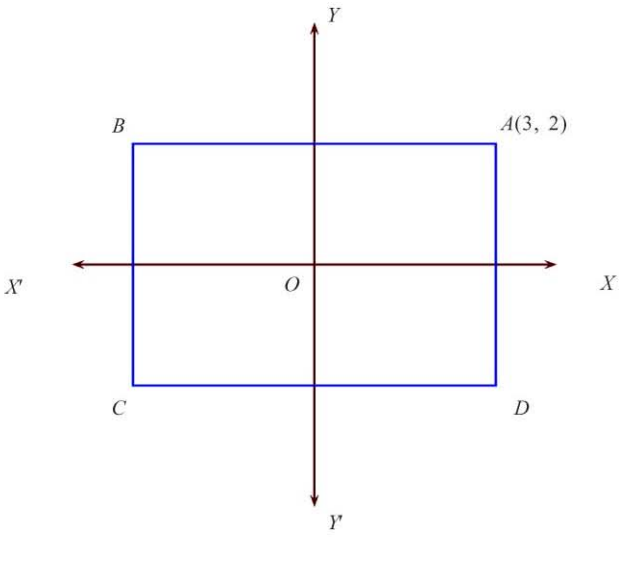


- ചിത്രത്തിലെ ചതുരത്തിന്റെ മറ്റു മൂന്നു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.




ഇവിടെ നീളമളക്കാൻ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്ന ഏകകം $\frac{3}{4}$ സെന്റി മീറ്ററാണ്. ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും എത്രയാണ്?

- ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ $ABCD$ ഒരു ചതുരമാണ്. ആധാര ബിന്ദു $O$, ചതുരത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവാണ്. വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമാണ്.



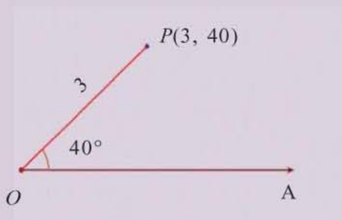

$B$, $C$, $D$ എന്നീ മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്താണ്?

### അകലവും ദിശയും

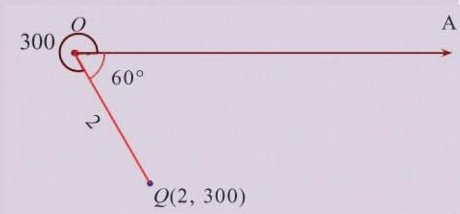
ലംബരേഖകളിൽനിന്നുള്ള അകലങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചു ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം പറയുന്നതിനുപകരം, ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള അകലവും, ഒരു വരയുമായുണ്ടാക്കുന്ന കോണും ഉപയോഗിച്ച് സ്ഥാനം പറയുന്ന രീതിയും ഗണിതത്തിലുണ്ട്.

അതിന് ഒരു ബിന്ദു $O$ യും അതിൽനിന്നുള്ള ഒരു വര $OA$ യും എടുക്കുക.


ഇനി, ഏതു ബിന്ദു $P$ എടുത്താലും, $OP$ യുടെ നീളവും, $\angle POA$ യുടെ അളവും ഉപയോഗിച്ച്, $P$ യുടെ സ്ഥാനം സൂചിപ്പിക്കാമല്ലോ.

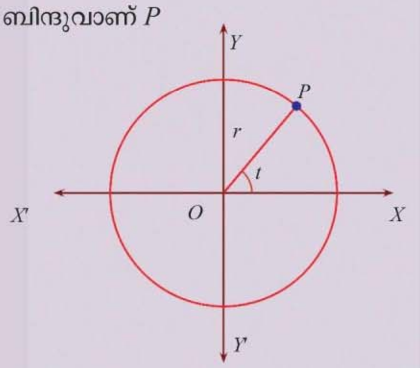



$Q$ വിന്റെ സ്ഥാനം എങ്ങനെ സൂചിപ്പിക്കാം.



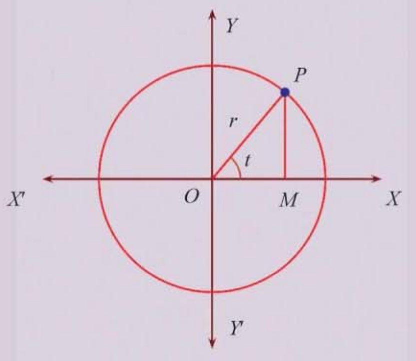
## അൽപം ത്രികോണമിതി

ആധാരബിന്ദു കേന്ദ്രമായി, ആരം $r$ ആയ ഒരു വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുവാണ് $P$




$\angle POX = t$ എന്നെടുത്താൽ, $P$ യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്താണ്?

$P$ യിൽ നിന്ന് $x$ അക്ഷത്തിലേക്കു $PM$ എന്ന ലംബം വരച്ചാൽ, $POM$ എന്ന മട്ടത്രികോണം കിട്ടുമല്ലോ.



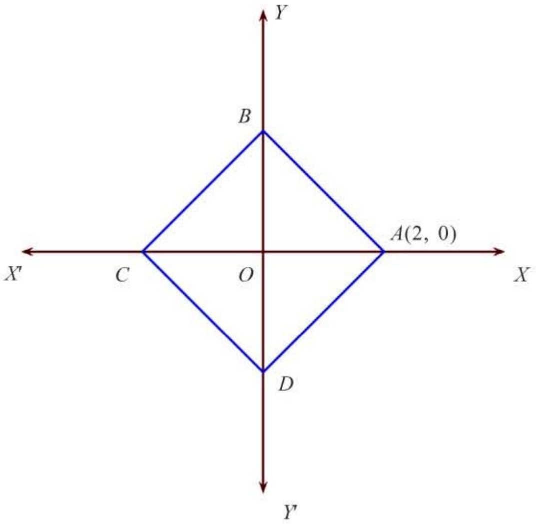

ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്

$$OM = r\cos t. \quad PM = r\sin t$$

എന്നു കാണാം. അതായത്, $P$ യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(r\cos t,\ r\sin t)$

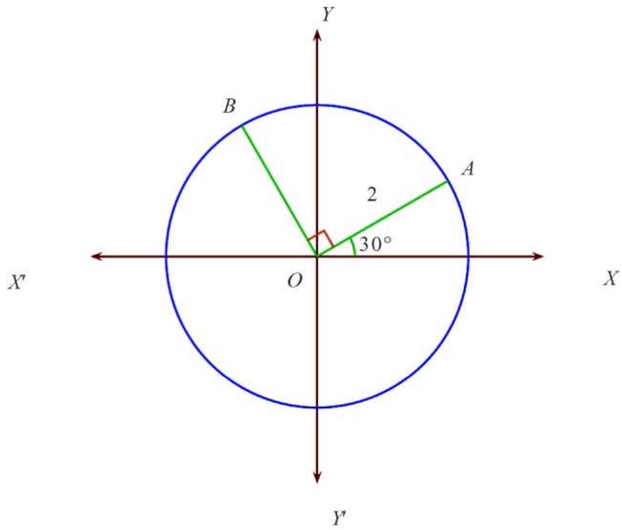
$\angle POX$ മട്ടകോണോ, അതിലും വലിയ കോണോ ആണെങ്കിലോ?

- ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ $ABCD$ ഒരു സമചതുരമാണ്.




$B, C, D$ ഇവയുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

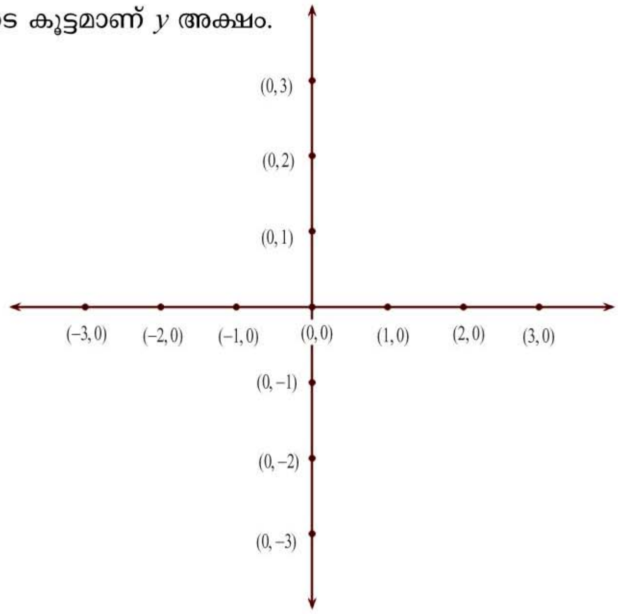
- ചിത്രത്തിലെ $A$, $B$ എന്നി ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്താണ്?



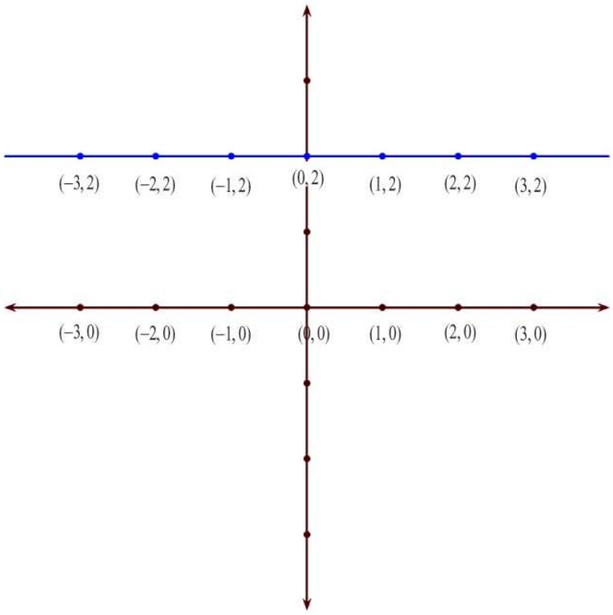

- ഒരു ചതുരത്തിന്റെ ഒരു ജോടി സമീപവശങ്ങൾക്കു സമാന്തരമായി അക്ഷങ്ങളെടുത്തപ്പോൾ, ചതുരത്തിന്റെ രണ്ട് എതിർമൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(0, 0)$, $(4, 3)$ എന്നു കിട്ടി. മറ്റു രണ്ടു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്തൊക്കെയാണ്?

$x$-അക്ഷത്തിലെ ബിന്ദുക്കളുടെയെല്ലാം $y$-സൂചകസംഖ്യ 0 ആണെന്നു കണ്ടല്ലോ. മറിച്ച്, y-സൂചകസംഖ്യ 0 ആയ ബിന്ദുക്കളെല്ലാം $x$-അക്ഷത്തിലാണുതാനും. അതായത്, സൂചകസംഖ്യകൾ $(x, 0)$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള ബിന്ദുക്കളുടെ കൂട്ടമാണ് $x$-അക്ഷം.

ഇതുപോലെ, സൂചകസംഖ്യകൾ $(0, y)$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള ബിന്ദുക്കളുടെ കൂട്ടമാണ് $y$ അക്ഷം.

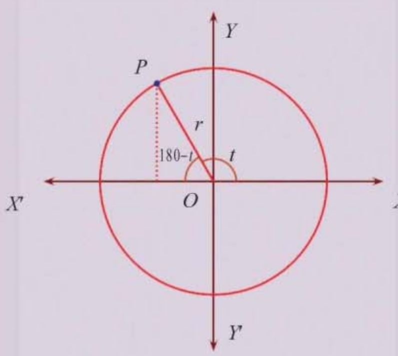



ഇതിൽ, പൂജ്യത്തിനു പകരം മറ്റേതെങ്കിലും സംഖ്യ എടുത്താലോ? ഉദാഹരണമായി, $(x, 2)$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള ബിന്ദുക്കളെടുത്താലോ? ഇത്തരം ബിന്ദുക്കളെല്ലാം, $x$-അക്ഷത്തിൽ നിന്ന് 2 അകലത്തിലല്ലേ? (നീളമളക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്ന ഏകകത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ.) അപ്പോൾ, ഇവയെല്ലാം $x$-അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായി 2 അകലത്തിൽ വരയ്ക്കുന്ന വരയിലാണ്.




### വീണ്ടും ത്രികോണമിതി

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:




ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്, $P$ യുടെ $x$ സൂചകസംഖ്യ $-r\cos(180-t)$ എന്നും, $y$ സൂചകസംഖ്യ $r\sin(180-t)$ എന്നും കാണാമല്ലോ.

$t$ എന്ന കോൺ $90°$ നും $180°$ നും ഇടയ്ക്കാണെങ്കിൽ,

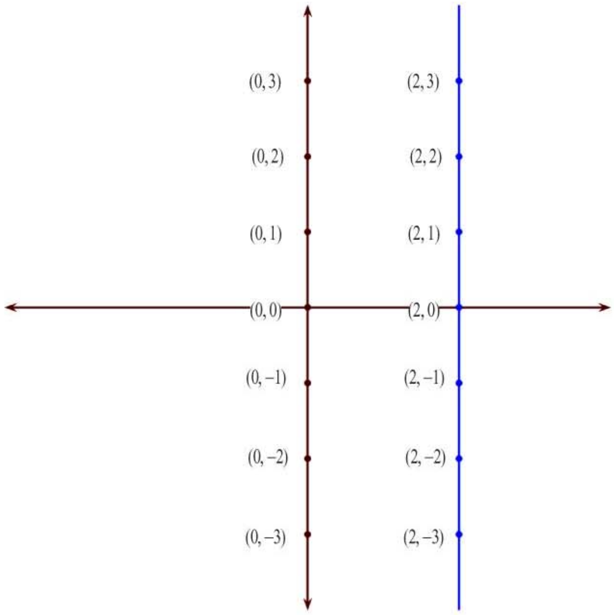
$\cos(180-t) = -\cos t$

$\sin(180-t) = \sin t$

എന്നു **ത്രികോണമിതി** എന്ന പാഠത്തിൽ നിർവചിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ $P$ യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ, ഈ സന്ദർഭത്തിലും $(r\cos t, r\sin t)$ തന്നെ.

$y$-സൂചകസംഖ്യ 2 ആയ ബിന്ദുക്കളെല്ലാം ഈ വരയിലുണ്ട്.

ഇതുപോലെ $(2, y)$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള ബിന്ദുക്കളുടെ കൂട്ടമെന്താണ്?




ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ, $a$ എന്ന ഏതു സംഖ്യയെടുത്താലും $(x, a)$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള ബിന്ദുക്കളുടെ കൂട്ടം, $x$ അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായി $a$ അകലത്തിലുള്ള വരയാണ്; മറിച്ച്, $(a, y)$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള ബിന്ദുക്കളുടെ കൂട്ടം, $y$ അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായി $a$ അകലത്തിലുള്ള വരയാണ്.

ഒരു വിധത്തിൽ നോക്കിയാൽ, ഇത്തരം വരകളെല്ലാം തന്നെ സംഖ്യാരേഖകളാണ്. സംഖ്യകളുടെ സ്ഥാനത്തെ സൂചിപ്പിക്കാൻ $x$ എന്നതിനു പകരം $(x, a)$ അല്ലെങ്കിൽ $(a, y)$ എന്നുപയോഗിച്ചിട്ടുണ്ടെന്നേയുള്ളൂ.

അപ്പോളൊരു ചോദ്യം: $(1, 2)$, $(3, 2)$ ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലമെന്താണ്?

$(1, 2)$, $(-3, 2)$ ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലമോ?

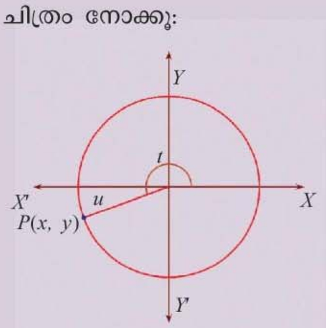
സംഖ്യാരേഖയിൽ അകലം കണ്ടുപിടിച്ചതുപോലെ, വലിയ $x$ സൂചകസംഖ്യയിൽ നിന്ന് ചെറുതു കുറച്ചാൽപ്പോരേ?

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ, $(x_1, a)$, $(x_2, a)$ ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലം കണ്ടുപിടിക്കാൻ, $x_1$, $x_2$ ഇവയിലെ വലുതിൽ നിന്ന് ചെറുതു കുറച്ചാൽ മതി; ബീജഗണിതഭാഷയിൽപ്പറഞ്ഞാൽ, ഈ അകലം $|x_1 - x_2|$.

ഇതുപോലെ $(a, y_1)$, $(a, y_2)$ ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലം കണ്ടുപിടിക്കാൻ, $y_1$, $y_2$ ഇവയിലെ വലുതിൽ നിന്ന് ചെറുതു കുറച്ചാൽ മതി. ബീജഗണിതഭാഷയിൽപ്പറഞ്ഞാൽ, ഈ അകലം $|y_1 - y_2|$.

### വൃത്തവും ത്രികോണമിതിയും

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



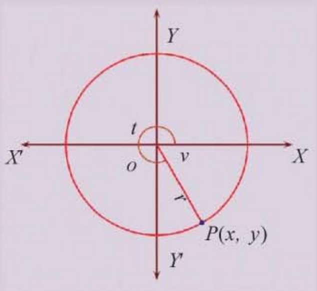

ഇവയിൽ $P$ യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(-r \cos u, -r \sin u)$ എന്നു കാണാമല്ലോ. $t = 180 + u$ എന്നും കാണാം. അപ്പോൾ

$$\cos(180 + u) = -\cos u$$

$$\sin(180 + u) = -\sin u$$

എന്നു നിർവചിച്ചാൽ $P$ യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(r \cos t,\ r \sin t)$ എന്നു തന്നെ കിട്ടും.

$P$ യുടെ സ്ഥാനം ഇങ്ങനെ ആയാലോ?

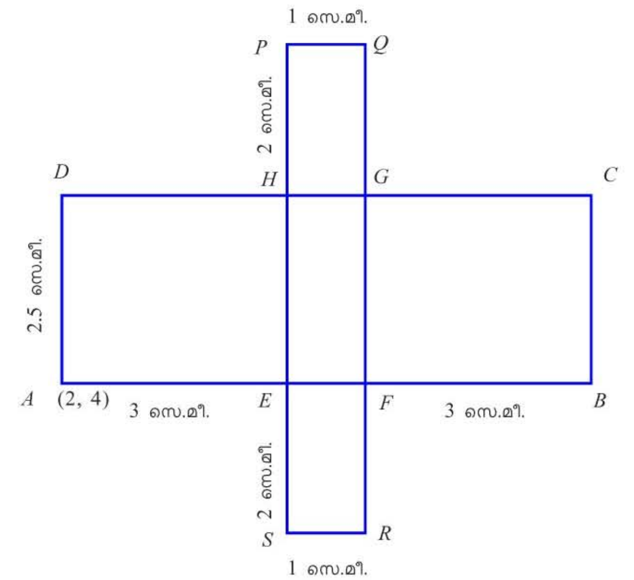



ഇതിൽ $P$ യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(r \cos v, -r \sin v)$. എന്നും $t = 360 - v$ എന്നും കാണാം. അപ്പോൾ

$$\cos(360 - v) = \cos v$$

$$\sin(360 - v) = -\sin v$$

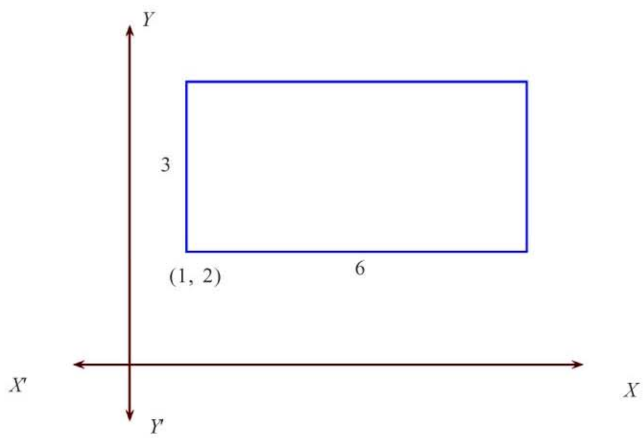
എന്നു നിർവചിച്ചാൽ, $P$ യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(r \cos t,\ r \sin t)$ എന്നു തന്നെയാകും.




ചിത്രത്തിൽ $ABCD$, $PQRS$ എന്നീ ചതുരങ്ങളുടെ വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമാണ്. ഇതിലെ ചതുരങ്ങളുടെയെല്ലാം മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

## ചതുരക്കണക്കുകൾ

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

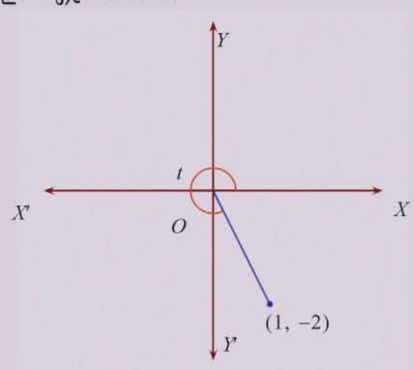



വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്കു സമാന്തരമായി, ഇതുപോലൊരു ചതുരം വരയ്ക്കണം. മറ്റു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകളെന്തെല്ലാമാണ്?

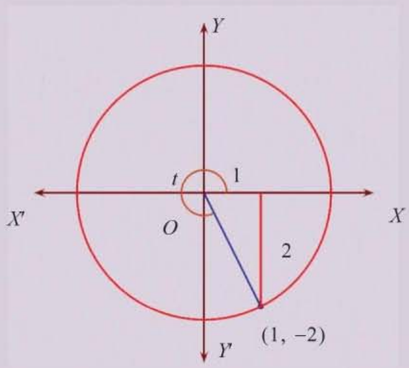
ചതുരത്തിലെ താഴത്തെ വശത്തിലെ ബിന്ദുക്കളെല്ലാം $(x, 2)$ എന്ന രൂപത്തിലാണല്ലോ (എന്തുകൊണ്ട്?) അവയിൽ, ചതുരത്തിന്റെ വലതു മൂല $(1, 2)$ ൽ നിന്നു 6 അകലെയാണ്. അപ്പോൾ അതിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്താണ്?

### വൃത്തമില്ലാതെ

ചിത്രത്തിൽ കോൺ $t$ യുടെ sin ഉം cos ഉം എത്രയാണ്?




ആധാരബിന്ദു കേന്ദ്രമായി $(1, -2)$ വിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം സങ്കൽപ്പിക്കാമല്ലോ. അതിന്റെ ആരം എത്രയാണ്?



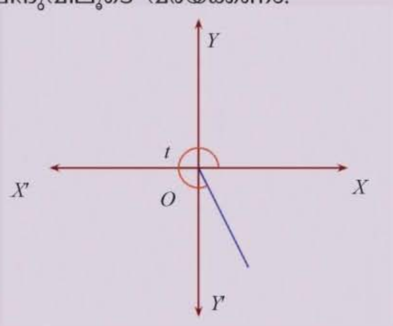

ചിത്രത്തിൽനിന്ന്, വൃത്തത്തിന്റെ ആരം $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ എന്നു കാണാം. അപ്പോൾ നിർവചനമനുസരിച്ച്

$$\cos t = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \sin t = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

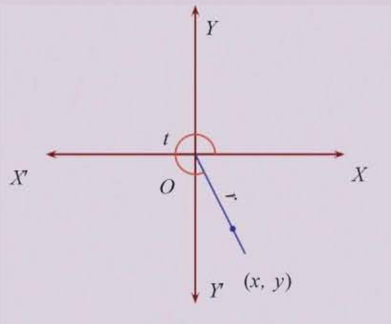
### സൂചകസംഖ്യകളും കോണും

ഏതു കോണിന്റെയും sin ഉം cos ഉം നിർവചിക്കുന്ന രീതി കണ്ടല്ലോ. ഇതനുസരിച്ച്, $180°$ യെക്കാൾ വലിയ കോണിന്റെ ത്രികോണമിതി അളവുകൾ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതെങ്ങനെ?

ആദ്യം $x$ അക്ഷവുമായി ഇത്തരമൊരു കോൺ ഉണ്ടാക്കുന്ന ഒരു വര ആധാരബിന്ദുവിലൂടെ വരയ്ക്കണം.




അതിലെ ഒരു ബിന്ദു എടുത്ത്, അതിന്റെ സൂചകസംഖ്യകളും, ആധാരബിന്ദുവിൽനിന്നുള്ള അകലവും കണ്ടുപിടിക്കണം




ഇനി നിർവചനമനുസരിച്ച്

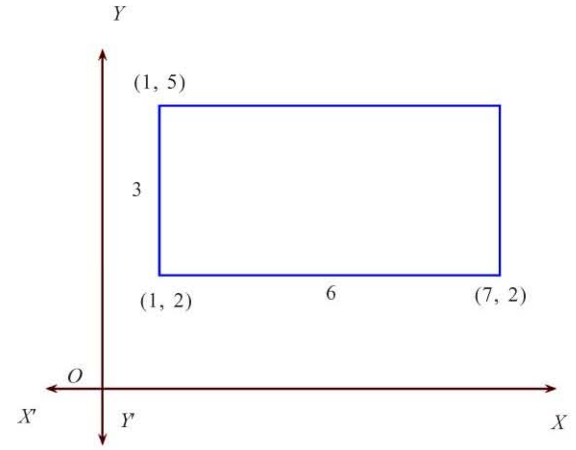
$\cos t = \frac{x}{r}, \quad \sin t = \frac{y}{r}$

എന്നു കാണാം. കൂടാതെ

$\tan t = \frac{y}{x}$

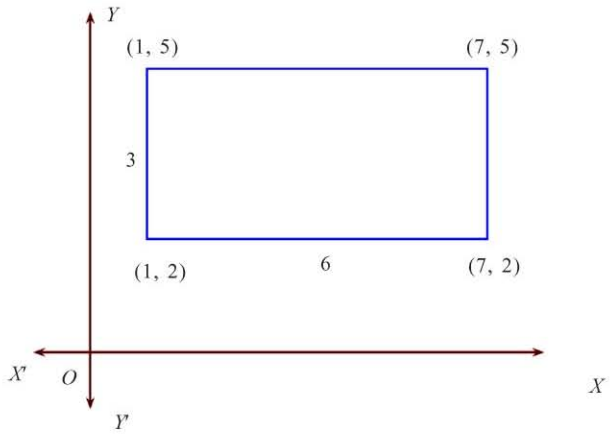
എന്നും നിർവചനമുണ്ട്. അതായത്, കോണിന്റെ tan കണ്ടുപിടിക്കാൻ, സൂചകസംഖ്യകൾ മാത്രം മതി.

ഇതുപോലെ, ചതുരത്തിന്റെ ഇടതു വശത്തുള്ള ബിന്ദുക്കളെല്ലാം ഏതു രൂപത്തിലാണ്? അവയിൽ ചതുരത്തിന്റെ മുകളിലത്തെ മൂലയുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്താണ്?



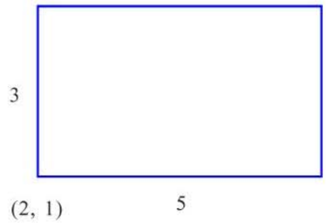

ഇനി നാലാമത്തെ മൂലയുടെ സൂചകസംഖ്യകളോ?

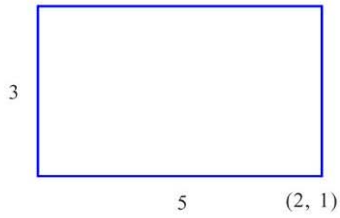
പലതരത്തിൽ ആലോചിക്കാം. ഈ ബിന്ദു, ചതുരത്തിന്റെ വലതുവശത്തായതിനാൽ $x$ സൂചകസംഖ്യ 7 (എന്തുകൊണ്ട്?), ചതുരത്തിന്റെ മുകൾവശത്തായതിനാൽ $y$ സൂചകസംഖ്യ 5.

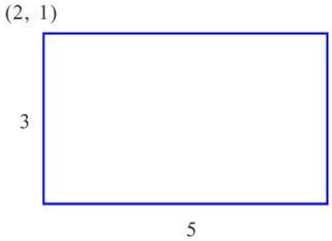


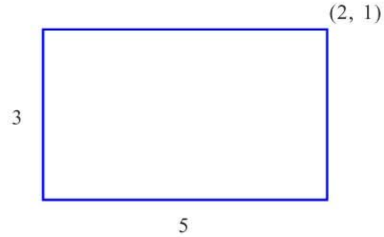

(മറ്റേതെല്ലാം തരത്തിൽ ഇത് ആലോചിച്ചെടുക്കാം?)

ചുവടെ കുറേ ചതുരങ്ങളുടെ ചിത്രമുണ്ട്. ഒരു നിശ്ചിത ഏകകമുപയോഗിച്ച് ഓരോന്നിന്റേയും നീളവും വീതിയും ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിട്ടുണ്ട്. ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിട്ടില്ലാത്ത, ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായ, ഒരു ജോടി അക്ഷങ്ങൾ അടിസ്ഥാനമാക്കി, ഒരു മൂലയുടെ സൂചകസംഖ്യകളും ചിത്രത്തിലുണ്ട്. മറ്റു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

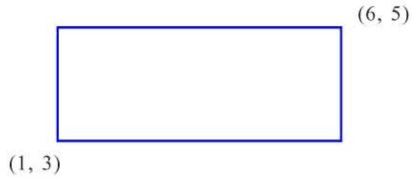





ഇനി വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്കു സമാന്തരമായ ഈ ചതുരം നോക്കൂ:




ഇതിന്റെ മറ്റു രണ്ടു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

ആദ്യം വലതു താഴത്തെ മൂല നോക്കാം. ഈ മൂല ചതുരത്തിന്റെ വലത്തെ വശത്തിലാണ്; ആ വശം $y$-അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമാണ്; അതിലെ ഒരു ബിന്ദു $(6, 5)$ ആണ്. അപ്പോൾ നമ്മളന്വേഷിക്കുന്ന മൂലയുടെ $x$ സൂചകസംഖ്യയും 6 തന്നെ.

$y$-സൂചകസംഖ്യയോ? താഴത്തെ വശം $x$-അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമാണ്; അതിലെ ഒരു ബിന്ദു $(1, 3)$ ആണ്. അപ്പോൾ ഈ മൂലയുടെ $y$ സൂചകസംഖ്യ 3 തന്നെ.

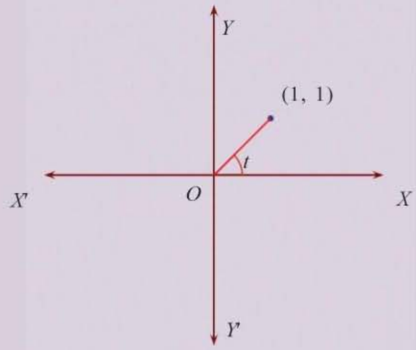

ഇതുപോലെ ഇടതു മുകളിലെ മൂലയും കണ്ടുപിടിച്ചുകൂടേ?


ഇതിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്താണ്?

ഇതുപോലെ വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്കു സമാന്തരമായ മറ്റൊരു ചതുരമിതാ:


### വരയും ബിന്ദുക്കളും

ചിത്രത്തിലെ കോൺ $t$ എത്രയാണെന്നു പറയാമോ?



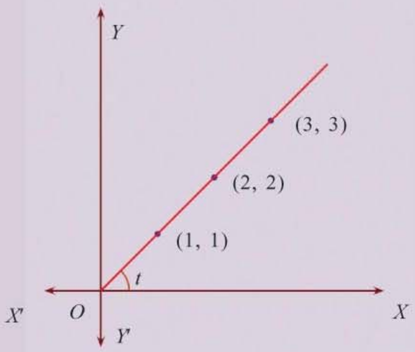

നേരത്തെ കണ്ടതനുസരിച്ച്

$$\tan t = \frac{1}{1} = 1$$

അപ്പോൾ

$$t = 45°$$

(1,1) നുപകരം (2,2) ആയാലും ഇതുതന്നെയല്ലേ കിട്ടുന്നത്? (3, 3) ആയാലോ. അപ്പോൾ എന്തു കിട്ടി? (1, 1), (2, 2), (3, 3), ... എല്ലാം ഒരേ വരയിലാണ്.




ഇക്കാര്യം നേരത്തെ കണ്ടിട്ടുണ്ടോ?

**സമാന്തരശ്രേണികൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ജ്യാമിതി** എന്ന ഭാഗം നോക്കുക.

മറ്റു രണ്ടു മൂലകൾ കണ്ടുപിടിക്കാമോ? വശങ്ങളുടെ നീളമോ? ഇതു പോലെ ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളും എതിർമൂലകളായി, വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്കു സമാന്തരമായി, ചതുരം വരയ്ക്കാമോ?

ഇത്തരം രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര അക്ഷങ്ങളോരൊന്നിനും സമാന്തരമാകരുത് അല്ലേ? അതായത്, $x$ സൂചകസംഖ്യകൾ തുല്യമാകരുത്; $y$ സൂചകസംഖ്യകളും തുല്യമാകരുത്.

ഉദാഹരണമായി, $(-2, 3)$, $(6, 5)$ ആയാലോ? ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം എങ്ങനെയാണ്?


ചതുരത്തിന്റെ മറ്റുമൂലകളെന്തൊക്കെയാണ്?

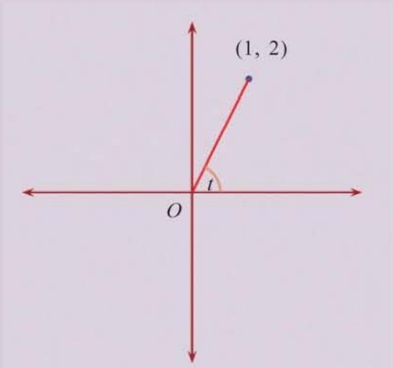

$(-2, 3)$, $(6, 1)$ ആയാലോ?



ഇതുപോലെ അക്ഷങ്ങൾ വരയ്ക്കാതെ, ചുവടെപ്പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ ജോടികൾ, ഇടതു-വലതു, മേൽ-കീഴ് സ്ഥാനങ്ങൾ ശരിയായി അടയാളപ്പെടുത്തുക. അവ എതിർമൂലകളായും വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായും വരുന്ന ചതുരങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെ നീളവും മറ്റു മൂലകളും കണ്ടുപിടിക്കുക.

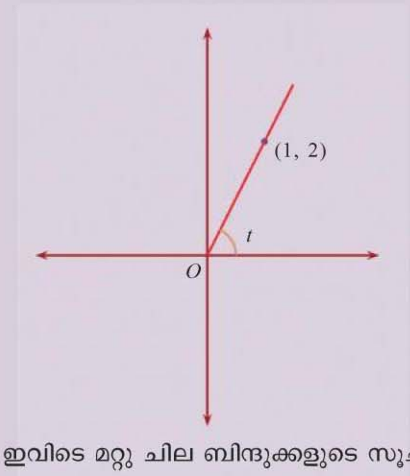
- $(3, 5)$, $(7, 8)$
- $(-3, 5)$, $(-7, 1)$
- $(6, 2)$, $(5, 4)$
- $(-1, -2)$, $(-5, -4)$

### മറ്റൊരു വര




ചിത്രത്തിലെ കോൺ $t$ യുടെ tan എത്രയാണെന്ന് പറയാമോ?

ഈ വരനീട്ടി വരച്ചാലോ?




ഇവിടെ മറ്റു ചില ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ പറയാമോ?