ഗണിതം

സ്റ്റാൻഡേർഡ്

X

ഭാഗം - 2

കേരളസർക്കാർ
വിദ്യാഭ്യാസവകുപ്പ്

തയ്യാറാക്കിയത്
സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി (SCERT), കേരളം
2011

ദേശീയഗാനം

ജനഗണമന അധിനായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ,
പഞ്ചാബസിന്ധു ഗുജറാത്ത മറാഠാ
ദ്രാവിഡ ഉത്ക്കല ബംഗാ,
വിന്ധ്യഹിമാചല യമുനാഗംഗാ,
ഉച്ഛ്വല ജലധിതരംഗാ,
തവശുഭനാമേ ജാഗേ,
തവശുഭ ആശിഷ മാഗേ,
ഗാഹേ തവ ജയ ഗാഥാ
ജനഗണമംഗലദായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ.
ജയഹേ, ജയഹേ, ജയഹേ,
ജയ ജയ ജയ ജയഹേ!

പ്രതിജ്ഞ

ഇന്ത്യ എന്റെ രാജ്യമാണ്. എല്ലാ ഇന്ത്യക്കാരും എന്റെ സഹോദരീ സഹോദരന്മാരാണ്.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തെ സ്നേഹിക്കുന്നു; സമ്പൂർണവും വൈവിധ്യപൂർണവുമായ അതിന്റെ പാരമ്പര്യത്തിൽ ഞാൻ അഭിമാനം കൊള്ളുന്നു.

ഞാൻ എന്റെ മാതാപിതാക്കളെയും ഗുരുക്കന്മാരെയും മുതിർന്നവരെയും ബഹുമാനിക്കും.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തിന്റെയും എന്റെ നാട്ടുകാരുടെയും ക്ഷേമത്തിനും ഐശ്വര്യത്തിനും വേണ്ടി പ്രയത്നിക്കും.

Prepared by :

State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram 695012, Kerala

Website : www.scertkerala.gov.in
e-mail : scertkerala@asianetindia.com
Phone : 0471 - 2341883, Fax : 0471 - 2341869
First Edition : 2011
Typesetting : SCERT
Lay out : SCERT
Cover design : SCERT
Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi

പ്രിയപ്പെട്ട കുട്ടികളേ,

പാഠത്തും പണിശാലയിലും
മാനത്തും മനസ്സിലും
വിടരുന്ന ഗണിതം.
ചരിത്രത്തിലാഴുന്ന വേരുകൾ,
സംഖ്യകൾ, സമവാക്യങ്ങൾ,
ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങൾ
പിരിയുന്ന ശാഖകൾ
എല്ലാം അല്പമൊന്നറിയാൻ
ഈ ചെറുപുസ്തകം.
അറിവിൻ ഫലം, മനസ്സിന്റെ പാകം
ശരിയായ ചിന്ത, നേരായ വാക്ക്.

ആശംസകളോടെ,

പ്രൊഫ. എം. എ. ഖാദർ
ഡയറക്ടർ
എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി.

പാഠപുസ്തക രചനാസമിതി

ഗണിതം X

ചെയർമാൻ

ഡോ. കൃഷ്ണൻ. ഇ.
ഹെഡ്, ഡിപ്പാർട്ട്മെന്റ് ഓഫ് മാത്തമാറ്റിക്സ് (Rtd.),
യൂണിവേഴ്സിറ്റി കോളേജ്, തിരുവനന്തപുരം

അംഗങ്ങൾ

അനിൽകുമാർ. എം. കെ.
എച്ച്.എസ്.എ., എസ്.കെ.എം.ജെ.
എച്ച്.എസ്.എസ്., കൽപ്പറ്റ, വയനാട്

ഡോ. ഗോകുലദാസൻ പിള്ള. സി.
ഹെഡ്, കരിക്കുലം ഡിപ്പാർട്ട്മെന്റ്,
എസ്.സി. ഇ.ആർ.ടി., തിരുവനന്തപുരം

പ്രഭാകരൻ നായർ. പി. പി.
എച്ച്.എസ്.എ.(Rtd.), പാലോറ എച്ച്.എസ്,
കോഴിക്കോട്

രമേശൻ. എൻ. കെ.
എച്ച്.എസ്.എ., രാജീവ് ഗാന്ധി മെമ്മോറിയൽ
ഹൈസ്കൂൾ, മൊകേരി, കണ്ണൂർ

ഡോ. രാധാകൃഷ്ണൻ ചെട്ടിയാർ. എസ്.
പ്രൊഫസർ (Rtd.), യൂണിവേഴ്സിറ്റി കോളേജ്,
തിരുവനന്തപുരം

വിജയകുമാരൻ. റ്റി. കെ.
എച്ച്.എസ്.എ., ഗവ. എച്ച്.എസ്. എസ്.,
കാസറഗോഡ്

ഡോ. സാബുജി വറുഗീസ്
എച്ച്.എസ്.എസ്.റ്റി., ഗവ. എച്ച്.എസ്.എസ്.,
തോട്ടക്കോണം, പന്തളം, പത്തനംതിട്ട

ഉണ്ണികൃഷ്ണൻ. എം. വി.
ലക്ചറർ ഇൻ മാത്തമാറ്റിക്സ്,
ക്രസന്റ് ബി.എഡ്. കോളേജ്, കണ്ണൂർ

പ്രകാശൻ. ടി. പി.
എച്ച്.എസ്.എ., ഗവ. എച്ച്.എസ്.എസ്.,
വാഴക്കാട്, മലപ്പുറം

നാരായണൻ. വി.
എച്ച്.എസ്.എസ്.റ്റി., ഗവ. എച്ച്.എസ്.എസ്.,
എടപ്പാൾ, മലപ്പുറം

രാമാനുജം. ആർ.
എച്ച്.എസ്.എസ്.റ്റി., എം.എൻ.കെ.എം.
ഗവ. എച്ച്.എസ്.എസ്., പുലാപ്പറ്റ, പാലക്കാട്

വാസു. കെ. ജി.
എ.ഇ.ഒ. (Rtd.), കുറ്റിപ്പുറം,
മലപ്പുറം

വേണുഗോപാൽ. വി.
എച്ച്.എസ്.എ., എം.എൻ.കെ.എം.
ഗവ. എച്ച്.എസ്.എസ്., പുലാപ്പറ്റ, പാലക്കാട്

ചിത്രകാരൻ

ധനേശൻ. എം. വി.
എച്ച്.എസ്.എ., എ.വി.ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്.,
കരിവെള്ളൂർ, കണ്ണൂർ

വിദഗ്ധസമിതി

ഡോ. ത്രിവിക്രമൻ. റ്റി.
ഹെഡ്, ഡിപ്പാർട്ട്മെന്റ് ഓഫ് മാത്തമാറ്റിക്സ്(Rtd.),
കൊച്ചിൻ യൂണിവേഴ്സിറ്റി ഓഫ് സയൻസ് &
ടെക്നോളജി, കൊച്ചിൻ

നാരായണൻ. സി. പി.
മെമ്പർ,
കേരള സംസ്ഥാന പ്ലാനിംഗ് ബോർഡ്

ഡോ. രാമചന്ദ്രൻ.പി. റ്റി.
ഹെഡ്, ഡിപ്പാർട്ട്മെന്റ് ഓഫ് മാത്തമാറ്റിക്സ്,
യൂണിവേഴ്സിറ്റി ഓഫ് കാലിക്കറ്റ്

ഡോ. രാജൻ. എ. ആർ.
പ്രൊഫസർ, ഡിപ്പാർട്ട്മെന്റ് ഓഫ് മാത്തമാറ്റിക്സ്,
യൂണിവേഴ്സിറ്റി ഓഫ് കേരള

അക്കാദമിക് കോർഡിനേറ്റർ

ഡോ. ലിഡ്സൺ രാജ്. ജെ.
റിസർച്ച് ഓഫീസർ, എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി., തിരുവനന്തപുരം

സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി (SCERT)
വിദ്യാഭവൻ, പൂജപ്പുര, തിരുവനന്തപുരം 695 012

ഉള്ളടക്കം

ഭാരതത്തിന്റെ ഭരണഘടന

ഭാഗം IV ക

മൗലിക കർത്തവ്യങ്ങൾ

51 ക. മൗലിക കർത്തവ്യങ്ങൾ - താഴെപ്പറയുന്നവ ഭാരതത്തിലെ ഓരോ പൗരന്റെയും കർത്തവ്യം ആയിരിക്കുന്നതാണ് -

(ക) ഭരണഘടനയെ അനുസരിക്കുകയും അതിന്റെ ആദർശങ്ങളെയും സ്ഥാപനങ്ങളെയും ദേശീയപതാകയെയും ദേശീയഗാനത്തെയും ആദരിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഖ) സ്വാതന്ത്ര്യത്തിനുവേണ്ടിയുള്ള നമ്മുടെ ദേശീയസമരത്തിന് പ്രചോദനം നൽകിയ മഹനീയാദർശങ്ങളെ പരിപോഷിപ്പിക്കുകയും പിൻതുടരുകയും ചെയ്യുക;

(ഗ) ഭാരതത്തിന്റെ പരമാധികാരവും ഐക്യവും അഖണ്ഡതയും നിലനിർത്തുകയും സംരക്ഷിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഘ) രാജ്യത്തെ കാത്തുസൂക്ഷിക്കുകയും ദേശീയ സേവനം അനുഷ്ഠിക്കുവാൻ ആവശ്യപ്പെടുമ്പോൾ അനുഷ്ഠിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ങ) മതപരവും ഭാഷാപരവും പ്രാദേശികവും വിഭാഗീയവുമായ വൈവിധ്യങ്ങൾക്കതീതമായി ഭാരതത്തിലെ എല്ലാ ജനങ്ങൾക്കുമിടയിൽ, സൗഹാർദവും പൊതുവായ സാഹോദര്യമനോഭാവവും പുലർത്തുക. സ്ത്രീകളുടെ അന്തസ്സിന് കുറവു വരുത്തുന്ന ആചാരങ്ങൾ പരിത്യജിക്കുക;

(ച) നമ്മുടെ സമ്മിശ്രസംസ്കാരത്തിന്റെ സമ്പന്നമായ പാരമ്പര്യത്തെ വിലമതിക്കുകയും നിലനിറുത്തുകയും ചെയ്യുക;

(ഛ) വനങ്ങളും തടാകങ്ങളും നദികളും വന്യജീവികളും ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രകൃത്യാ ഉള്ള പരിസ്ഥിതി സംരക്ഷിക്കുകയും അഭിവൃദ്ധിപ്പെടുത്തുകയും ജീവികളോട് കാരുണ്യം കാണിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ജ) ശാസ്ത്രീയമായ കാഴ്ചപ്പാടും മാനവികതയും, അന്വേഷണത്തിനും പരിഷ്കരണത്തിനും ഉള്ള മനോഭാവവും വികസിപ്പിക്കുക;

(ഝ) പൊതുസ്വത്ത് പരിരക്ഷിക്കുകയും ശപഥം ചെയ്ത് അക്രമം ഉപേക്ഷിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഞ) രാഷ്ട്രം യത്നത്തിന്റെയും ലക്ഷ്യപ്രാപ്തിയുടെയും ഉന്നതതലങ്ങളിലേക്ക് നിരന്തരം ഉയരത്തക്കവണ്ണം വ്യക്തിപരവും കൂട്ടായതുമായ പ്രവർത്തനത്തിന്റെ എല്ലാ മണ്ഡലങ്ങളിലും ഉൽകൃഷ്ടതയ്ക്കുവേണ്ടി അധ്വാനിക്കുക.

(ട) ആറിനും പതിനാലിനും ഇടയ്ക്ക് പ്രായമുള്ള തന്റെ കുട്ടിക്കോ രക്ഷ്യബാലകനോ, അതതു സംഗതി പോലെ, മാതാപിതാക്കളോ രക്ഷകർത്താവോ വിദ്യാഭ്യാസത്തിനുള്ള അവസരങ്ങൾ ഏർപ്പെടുത്തുക.

7 സാധ്യതകളുടെ ഗണിതം

സാധ്യതകളും സംഖ്യകളും

ഒരു ചെപ്പിൽ പത്തു മുത്തുകളുണ്ട്; ഒമ്പതെണ്ണം കറുത്തതും, ഒരെണ്ണം മാത്രം വെളുത്തതും. ഇതിൽ നിന്ന് (നോക്കാതെ) ഒരു മുത്തെടുത്താൽ...

മിക്കവാറും കറുപ്പാകും, അല്ലേ? വെളുത്തതായിക്കൂടായ്കയുമില്ല.

മറ്റൊരു ചെപ്പിൽ അഞ്ചു കറുത്ത മുത്തും, അഞ്ചു വെളുത്ത മുത്തും ആണ്. ഇതിൽനിന്നും ഒരെണ്ണം എടുത്തു. അത് കറുത്തതോ വെളുത്തതോ ആകാം, എന്നല്ലാതെ മറ്റൊന്നും കൂട്ടിച്ചേർക്കാനില്ലല്ലോ.

ഇക്കാര്യങ്ങൾ മറ്റൊരു തരത്തിൽപ്പറയാം. ആദ്യത്തെ ചെപ്പിൽ നിന്ന് ഒരു മുത്തെടുത്താൽ, കറുത്തതാകാനാണ് കൂടുതൽ സാധ്യത; അഥവാ, വെളുത്തതു കിട്ടാൻ സാധ്യത വളരെ കുറവാണ്. രണ്ടാമത്തെ ചെപ്പിലോ? കറുത്ത മുത്തു കിട്ടാനും, വെളുത്ത മുത്തു കിട്ടാനും ഒരേ സാധ്യത ആണെന്നു പറയാം, അല്ലേ?

കുറേക്കൂടി വ്യക്തമായിപ്പറയാൻ സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കാം. ആദ്യത്തെ ചെപ്പിൽ പത്തിൽ ഒമ്പതും കറുത്ത മുത്തുകളാണ്; വെളുത്ത മുത്ത് പത്തിലൊന്നേയുള്ളൂ. അപ്പോൾ കറുത്ത മുത്തു കിട്ടാൻ സാധ്യത $\frac{9}{10}$ ആണെന്നു പറയാം. വെളുത്ത മുത്തു കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത $\frac{1}{10}$ എന്നും.

രണ്ടാമത്തെചെപ്പിലോ? $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ ആണല്ലോ. അപ്പോൾ കറുത്ത മുത്തു കിട്ടാനും, വെളുത്ത മുത്തു കിട്ടാനും സാധ്യത $\frac{1}{2}$ തന്നെ.

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം. 1 മുതൽ 25 വരെയുള്ള സംഖ്യകളോരോന്നും ഓരോ കടലാസു കഷണത്തിലെഴുതി, ഒരു പെട്ടിയിലിട്ടു. ഇതിൽ നിന്ന് ഒരു കടലാസ് എടുത്തു. അതിലെ സംഖ്യ 3 ന്റെ ഗുണിതമാകാൻ സാധ്യത എത്രയാണ്?

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24 എന്നീ എട്ടു സംഖ്യകളല്ലേ, പെട്ടിയിലുള്ള മൂന്നിന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ?

പകിട ഗണിതം

പാമ്പും കോണിയും പോലെ പകിട (dice) ഉപയോഗിച്ച് പലതും കളിച്ചിട്ടില്ലേ? വളരെ പണ്ടു തന്നെ ഇത്തരം പകിടകളികൾ ഉണ്ടായിരുന്നു. ഏതാണ്ട് 2500 ബി.സി.യിൽ ഭാരതത്തിൽ നിലവിലുണ്ടായിരുന്ന സിന്ധു നദീതട സംസ്കാരകാലത്തുള്ള ഒരു പകിടയുടെ ചിത്രമാണിത്:

പകിടയുരുട്ടുമ്പോൾ ഏതു സംഖ്യയാണ് കിട്ടുകയെന്ന് മുൻകൂട്ടി കൃത്യമായി പറയാൻ കഴിയില്ലല്ലോ. എ.ഡി. പതിനാറാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഇറ്റലിയിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന ജെരോലാമോ കാർഡാനോ (Gerolamo Cardano) എന്ന ശാസ്ത്രജ്ഞനാണ് ഇതിന്റെ ഗണിതത്തെക്കുറിച്ച് ആദ്യമായൊരു പുസ്തകമെഴുതിയത്.

പ്രധാനമായും ചൂതുകളിക്കാർക്കുള്ള നിർദ്ദേശങ്ങൾ നൽകുന്ന ഇതിൽ, രണ്ടു പകിടകൾ ഒന്നിച്ചുരുട്ടുമ്പോൾ വിവിധ സംഖ്യകൾ തുകയായി കിട്ടാനുള്ള സാധ്യതകൾ സംഖ്യകളായി കണക്കാക്കിയിട്ടുണ്ട്.

അപ്പോൾ, സാധ്യത $\frac{8}{25}$

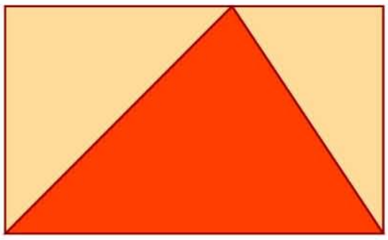
എടുക്കുന്നത് 4 ന്റെ ഗുണിതമാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

ഇരട്ടസംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യതയോ?

ഒറ്റസംഖ്യ?

ഒരു കണക്കു കൂടി.

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



ഇതുപോലൊരു ചതുരം വെട്ടിയെടുത്ത്, കണ്ണടച്ച് പെൻസിൽകൊണ്ടൊരു കുത്തിടുന്നു. അത് ചുവന്ന ത്രികോണത്തിനുള്ളിലാകാനുള്ള സാധ്യത എത്രയാണ്?

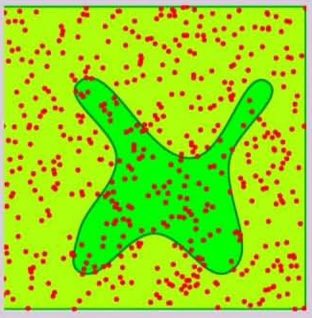
ചിത്രത്തിൽ ചുവന്ന ത്രികോണം, ചതുരത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ്? (ഒമ്പതാംക്ലാസിലെ **പരപ്പളവ്** എന്ന പാഠത്തിലെ **ചതുരവും ത്രികോണവും** എന്ന ഭാഗം ഓർക്കുക.) അപ്പോൾ, സാധ്യത $\frac{1}{2}$. മറ്റൊരു വിധത്തിൽപ്പറഞ്ഞാൽ, കുത്ത് ത്രികോണത്തിനകത്താകാനും പുറത്താകാനും ഒരേ സാധ്യത തന്നെയാണ്.

ഇതുപോലെ ഈ കണക്കുകൾ സ്വയം ചെയ്തു നോക്കൂ:

- ഒരു പെട്ടിയിൽ 4 വെളുത്ത പന്തുകളും 6 കറുത്ത പന്തുകളുമുണ്ട്; മറ്റൊന്നിൽ, 3 വെളുത്ത പന്തുകളും 5 കറുത്ത പന്തുകളും. കറുത്ത പന്താണ് വേണ്ടതെങ്കിൽ, ഏതു പെട്ടിയിൽ നിന്നെടുക്കുന്നതാണ് നല്ലത്?
- ഒരാളോട് 10 നേക്കാൾ ചെറിയ ഒരു (എണ്ണൽ) സംഖ്യ പറയാൻ ആവശ്യപ്പെടുന്നു. അയാൾ പറയുന്നത് ഒരു അഭാജ്യ സംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യത എത്രയാണ്? ഇതുതന്നെ 100 നേക്കാൾ ചെറിയ സംഖ്യയായാലോ?
- ഒരു പെട്ടിയിൽ സംഖ്യകളെഴുതിയ കുറേ കടലാസു കഷണങ്ങൾ ഇട്ടിരിക്കുന്നു. 4 ഒറ്റസംഖ്യകളും, 5 ഇരട്ടസംഖ്യകളും. ഒറ്റ സംഖ്യയെഴുതിയ ഒരു കടലാസു കഷണവും, ഇരട്ടസംഖ്യ എഴുതിയ മറ്റൊന്നും കൂടി പെട്ടിയിലിട്ടാൽ, ഒറ്റസംഖ്യ കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത കൂടുമോ, കുറയുമോ? ഇരട്ടസംഖ്യയുടെ കാര്യമോ?

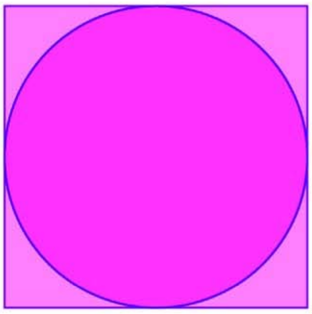
പരപ്പളവും സാധ്യതയും

സങ്കീർണമായ രൂപങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് ഏകദേശമായി കണ്ടുപിടിക്കാൻ സാധ്യതയുടെ ഗണിതം ഉപയോഗിക്കാം. ഒരു നിശ്ചിത സമചതുരത്തിനകത്ത് ഈ രൂപം വരയ്ക്കണം. എന്നിട്ട്, പ്രത്യേകിച്ചൊരു ക്രമമോ ചിട്ടയോ ഇല്ലാതെ ചിത്രത്തിൽ കുത്തുകളിടണം.



നമുക്കാവശ്യമായ രൂപത്തിനകത്തു വീണ കുത്തുകളുടെ എണ്ണത്തെ ആകെ കുത്തുകളുടെ എണ്ണം കൊണ്ടു ഹരിച്ചുകിട്ടുന്ന സംഖ്യ, ഈ രൂപത്തിന്റെ പരപ്പളവിനെ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവുകൊണ്ടു ഹരിച്ചു കിട്ടുന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായിരിക്കും. കുത്തുകളുടെ എണ്ണം വർധിക്കുന്തോറും ഇതു കൂടുതൽ കൃത്യമാകുകയും ചെയ്യും. ഈ ജ്യാമിതീയ ക്രിയയും, സംഖ്യകളുടെ ക്രിയയും കമ്പ്യൂട്ടർ ഉപയോഗിച്ച് വേഗം ചെയ്യാം. മോണ്ടി കാർലോ രീതി (Monte Carlo method) എന്നാണ് ഇതിന്റെ പേര്.

- ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ കണ്ണടച്ചൊരു കുത്തിട്ടു.



ഇതു വൃത്തത്തിനകത്താകാനുള്ള സാധ്യത എത്രയാണ്? വൃത്തത്തിനു പുറത്താകാനോ? രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ വരെ കണക്കാക്കുക.

രണ്ടെണ്ണമെടുത്താൽ

ഒരു പെട്ടിയിൽ 1, 2 എന്നെഴുതിയ രണ്ടു കടലാസു കഷണങ്ങളും, മറ്റൊരു പെട്ടിയിൽ 1, 2, 3 എന്നെഴുതിയ മൂന്നു കടലാസു കഷണങ്ങളും ഇട്ടിട്ടുണ്ട്. ഓരോ പെട്ടിയിൽ നിന്നും ഓരോ കടലാസു വീതമെടുത്തു. രണ്ടും ഒറ്റസംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യത എത്രയാണ്?

ഓരോ പെട്ടിയിൽ നിന്നും ഓരോ കടലാസെടുത്താൽ, ഒരു ജോടി സംഖ്യകളാണ് കിട്ടുന്നത്. ഇവ എങ്ങനെയൊക്കെയാകാം? ആദ്യത്തെ പെട്ടിയിൽ നിന്നു 1, രണ്ടാമത്തെ പെട്ടിയിൽ നിന്നു 2; അല്ലെങ്കിൽ, രണ്ടുപെട്ടിയിൽ നിന്നും 1; എന്നിങ്ങനെ പലതരത്തിൽ സംഭവിക്കാമല്ലോ. എല്ലാ ജോടികളും ഒന്നെഴുതി നോക്കാം:

$$(1, 1) \quad (1, 2) \quad (1, 3)$$

$$(2, 1) \quad (2, 2) \quad (2, 3)$$

ആകെ ആറു ജോടികൾ. നമ്മുടെ താൽപര്യം, രണ്ടും ഒറ്റസംഖ്യയാകുന്ന ജോടികളിലാണല്ലോ. അത്തരം എത്രയെണ്ണമുണ്ട് ഈ കൂട്ടത്തിൽ?

രണ്ടെണ്ണം മാത്രം അല്ലേ?

അപ്പോൾ ഇങ്ങനെ സംഭവിക്കാനുള്ള സാധ്യത എത്രയാണ്?

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ഒരു ഒറ്റസംഖ്യയും, ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യയും കിട്ടാനുള്ള സാധ്യതയോ?

ഒരു പ്രശ്നം

പ്രസിദ്ധ ശാസ്ത്രജ്ഞനായ ഗലീലിയോ, ചൂതുകളിക്കാരനായ ഒരു സുഹൃത്ത് ഉന്നയിച്ച പ്രശ്നത്തെക്കുറിച്ചു പറയുന്നുണ്ട്. മൂന്നു പകിട ഒന്നിച്ചുരുട്ടുമ്പോൾ, തുകയായി 9 കിട്ടുന്നതും 10 കിട്ടുന്നതും, ആറു വിധത്തിലാണ് എന്നയാൾ കണക്കാക്കി.

	9	10
1.	$1+2+6$	$1+3+6$
2.	$1+3+5$	$1+4+5$
3.	$1+4+4$	$2+2+6$
4.	$2+2+5$	$2+3+5$
5.	$2+3+4$	$2+4+4$
6.	$3+3+3$	$3+3+4$

എന്നാൽ അനുഭവത്തിൽ, 10 ആണ് 9 നേക്കാൾ കൂടുതൽ വരുന്നത്. ഇതെന്തുകൊണ്ടാണെന്നാണ് ചോദ്യം.

ഇതിൽ 1, 2, 6 എന്നെടുത്തിരിക്കുന്നത്, ഏതോ ഒരു പകിടയിൽ 1, മറ്റൊന്നിൽ 2, മൂന്നാമത്തേതിൽ 6 എന്നാണല്ലോ. ഇതിനുപകരം ആദ്യത്തെ പകിടയിൽ 1, രണ്ടാമത്തെ പകിടയിൽ 2, മൂന്നാമത്തെ പകിടയിൽ 6 എന്നതിനെമാത്രം (1, 2, 6) എന്ന ത്രയമുപയോഗിച്ചു സൂചിപ്പിക്കുക, ആദ്യത്തെ പകിടയിൽ 1, രണ്ടാമത്തെ പകിടയിൽ 6, മൂന്നാമത്തെ പകിടയിൽ 2, എന്നതിനെ (1, 6, 2) എന്ന ത്രയമുപയോഗിച്ചു സൂചിപ്പിക്കുക. (1, 2, 6), (1, 6, 2), (2, 1, 6), (2, 6, 1), (6, 1, 2), (6, 2, 1) എന്നീ ആറു വ്യത്യസ്ത ത്രയങ്ങൾ 9 തുകയായി കിട്ടുന്ന വിധത്തിൽ എടുക്കണം എന്നാണ് ഗലീലിയോയുടെ ഉത്തരം. മറ്റു ത്രയങ്ങളേയും ഇതുപോലെ വിസ്തരിച്ചെഴുതിയാൽ, 9 കിട്ടുന്നത് 25 രീതിയിലും, 10 കിട്ടുന്നത് 27 രീതിയിലുമാണെന്നും ഗലീലിയോ വ്യക്തമാക്കുന്നു. (ചെയ്തു നോക്കൂ)

സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം കൂട്ടിയാലോ? ഒരു പെട്ടിയിൽ 1 മുതൽ 5 വരെയുള്ള സംഖ്യകൾ, രണ്ടാമത്തെ പെട്ടിയിൽ 1 മുതൽ 10 വരെയുള്ള സംഖ്യകൾ; ഇപ്പോൾ മേൽപ്പറഞ്ഞ സാധ്യതകൾ എത്രയാണ്?

ഇപ്പോൾ ആകെ എത്ര സംഖ്യാജോടികളുണ്ട്? ആദ്യം ചെയ്തതു പോലെ എല്ലാം എഴുതി എണ്ണുക ബുദ്ധിമുട്ടല്ലേ? (അതിലൊരു രസവുമില്ലതാനും) എണ്ണം കണക്കുകൂട്ടിയെടുക്കാമോ?

ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കാം. ആദ്യത്തെ (പെട്ടിയിൽ നിന്നു കിട്ടുന്ന) സംഖ്യ 1 ആകുന്ന എത്ര ജോടികളുണ്ട്? ആദ്യത്തെ സംഖ്യ 2 ആകുന്നവയോ?

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ, ആദ്യത്തെ സംഖ്യ 5 തരത്തിലാകാം. ഇതോരോന്നിലും, രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ 10 തരത്തിലും. ഇവയെ മുമ്പെഴുതിയതുപോലെ വരിയിലും നിരയിലുമായി സങ്കൽപ്പിച്ചാൽ, ആദ്യത്തെ സംഖ്യ 1 ആയ 10 ജോടികളുടെ ഒരു വരി, അടുത്തത്, ആദ്യത്തെ സംഖ്യ 2 ആയ 10 ജോടികളുടെ വരി, എന്നിങ്ങനെ 5 വരി. (ഓരോന്നിലും 10 ജോടികൾ)

അപ്പോൾ ആകെ 50 ജോടികളായി. ഇവയിൽ രണ്ടും ഒറ്റസംഖ്യകളാകുന്ന എത്ര ജോടികളുണ്ട്?

അത്തരം ജോടികളിൽ, ആദ്യത്തെ സംഖ്യ 1, 3, 5 ഇവ മൂന്നിൽ ഏതെങ്കിലുമാകണം. രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യയോ?

അങ്ങനെ ഇത്തരം ജോടികൾ ആകെ $3 \times 5 = 15$ എന്നും കിട്ടി. (ഇതു മനസിലായോ? വേണമെങ്കിൽ വരിയും നിരയുമായി സങ്കൽപിച്ചു നോക്കൂ).

അപ്പോൾ ഇവിടെ രണ്ട് ഒറ്റസംഖ്യകൾ കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത $\frac{15}{50} = \frac{3}{10}$

ഇതുപോലെ, രണ്ടും ഇരട്ടസംഖ്യകളാകാനുള്ള സാധ്യതയും, ഒന്ന് ഒറ്റയും മറ്റേത് ഇരട്ടയും ആകാനുള്ള സാധ്യതയും കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം: രണ്ടു കുട്ടികൾ തമ്മിലുള്ള കളിയാണ്. രണ്ടുപേരും രണ്ടു കയ്യിലെയും കുറേ വിരലുകൾ ഉയർത്തിപ്പിടിക്കും. രണ്ടുപേരും കൂടി ആകെ ഉയർത്തിയ വിരലുകളുടെ എണ്ണം ഒറ്റസംഖ്യയായാൽ ആദ്യത്തെയാൾ ജയിച്ചു; ഇരട്ടസംഖ്യയാണെങ്കിൽ, രണ്ടാമത്തെയാളും. ആർക്കാണ് വിജയസാധ്യത കൂടുതൽ?

ഇതിൽ ഓരോരുത്തരും ഉയർത്തുന്ന വിരലുകളുടെ എണ്ണം, ഒന്നു മുതൽ പത്തു വരെയുള്ള ഏത് (എണ്ണൽ) സംഖ്യയും ആവാം. അപ്പോൾ രണ്ടുപേരും ഉയർത്തുന്ന വിരലുകളുടെ എണ്ണം ജോടിയാക്കിയാൽ, ആകെ എത്ര സംഖ്യാജോടികളായി?

തത്വവും യാഥാർത്ഥ്യവും

ഒരു നാണയം മേൽപ്പൊട്ടെറിഞ്ഞാൽ വന്നു വീഴുന്നത് തലയോ (head) വാലോ (tail) ആകാം. രണ്ടിനും തുല്യ സാധ്യത, അഥവാ ഓരോന്നിനും സാധ്യത $\frac{1}{2}$, എന്നെടുക്കുന്നതാണ് ഗണിതയുക്തി.

എന്നുവച്ച്, രണ്ടു തവണ നാണയമെറിയുമ്പോൾ ഒരു തവണ തലയും, ഒരു തവണ വാലും കിട്ടണമെന്നില്ലല്ലോ. പത്തു തവണ എറിഞ്ഞാൽ, കൃത്യം അഞ്ചു തവണ തലയും, അഞ്ചു തവണ വാലും കിട്ടണമെന്നുമില്ല. സാധാരണ ഒരു നാണയം കുറെയേറെ തവണ എറിയുമ്പോൾ, തലയുടെ എണ്ണവും, വാലിന്റെ എണ്ണവും, ഏതാണ്ട് തുല്യമാകുമെന്നേ ഇതിന് അർത്ഥമുള്ളൂ. ഉദാഹരണമായി 1000 തവണ എറിയുമ്പോൾ, തല 510, വാൽ 490 എന്നാകാം.

ഇതുപോലെ പകിടയുരുട്ടുമ്പോഴും, 1200 തവണ ഉരുട്ടുമ്പോൾ ഓരോ സംഖ്യയും കൃത്യം 200 തവണ വന്നെന്നിരിക്കില്ല (മിക്കവാറും വരികയുമില്ല). ഒരു സംഖ്യ 220 തവണ, മറ്റൊന്ന് 180 തവണ എന്നൊക്കെയാകാം.

ഈ 100 എണ്ണത്തിൽ (എങ്ങനെയാണ് നൂറു കിട്ടിയത്?) എത്രയെണ്ണത്തിലാണ് തുക ഒറ്റസംഖ്യയാകുക?

തുക ഒറ്റസംഖ്യ ആകണമെങ്കിൽ, ഒരു സംഖ്യ ഒറ്റയും, മറ്റേ സംഖ്യ ഇരട്ടയും ആയാലല്ലേ പറ്റൂ?

ആദ്യത്തെ സംഖ്യ ഒറ്റയും, രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ ഇരട്ടയും ആയി എത്ര ജോടികളുണ്ട്? $5 \times 5 = 25$ (അതെങ്ങനെ?) മറിച്ചായാലോ?

അങ്ങനെ തുക ഒറ്റസംഖ്യയാകുന്ന $25 + 25 = 50$ ജോടികളുണ്ടെന്നു കണ്ടുപിടിച്ചു. അപ്പോൾ ഒറ്റസംഖ്യക്കാരന്റെ വിജയസാധ്യത $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$.

ഇരട്ടസംഖ്യക്കാരന്റെ വിജയസാധ്യതയും ഇതുതന്നെയാണെന്ന് കണക്കു കൂട്ടാതെതന്നെ പറയാമല്ലോ. (അതെങ്ങനെ?)

ഒരു കണക്കു കൂടി: ഒരു കുട്ടയിൽ 50 മാങ്ങയുണ്ട്; അതിൽ 20 എണ്ണം പഴുത്തിട്ടില്ല. മറ്റൊരു കുട്ടയിൽ 40 മാങ്ങയുണ്ട്; 15 എണ്ണം പഴുത്തിട്ടില്ല. ഓരോ കുട്ടയിൽ നിന്നും ഓരോ മാങ്ങയെടുത്താൽ ഒന്നെങ്കിലും പഴുത്തതാകാനുള്ള സാധ്യത എത്രയാണ്?

ഓരോ കുട്ടയിൽ നിന്നും ഒരു മാങ്ങ വീതം എത്ര വ്യത്യസ്ത വിധത്തിൽ രണ്ടു മാങ്ങയെടുക്കാം? (വേണമെങ്കിൽ, ഓരോ കുട്ടയിലേയും മാങ്ങകളെ 1, 2, 3, ... എന്നിങ്ങനെ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നതായി സങ്കൽപ്പിക്കാം.)

ഈ 2000 മാങ്ങാജോടികളെ ഇങ്ങനെ മൂന്നു കൂട്ടമായി തരംതിരിക്കാം:

(i) രണ്ടും പഴുക്കാത്തത്

(ii) രണ്ടും പഴുത്തത്

(iii) ഒന്നു പഴുത്തതും മറ്റത് പഴുക്കാത്തതും

രണ്ടു മാങ്ങയും പഴുക്കാത്തതായി എത്ര ജോടികളുണ്ട്?

$20 \times 15 = 300$, അല്ലേ?

രണ്ടും പഴുത്തതോ? ആദ്യത്തെ കുട്ടയിൽ, $50 - 20 = 30$ പഴുത്ത മാങ്ങയുണ്ട്; രണ്ടാമത്തെ കുട്ടയിൽ, $40 - 15 = 25$ എണ്ണം പഴുത്തതാണ്. അപ്പോൾ രണ്ടും പഴുത്തതായി $30 \times 25 = 750$ ജോടി.

ഒന്നാമത്തെ (കുട്ടയിൽ നിന്നുള്ള) മാങ്ങ പഴുത്തതും, രണ്ടാമത്തേത് പഴുക്കാത്തതുമായി, $30 \times 15 = 450$ ജോടികളുണ്ട്. മറിച്ചായാലോ? ആദ്യത്തേത് പഴുക്കാത്തതും, രണ്ടാമത്തേത് പഴുത്തതുമായി $20 \times 25 = 500$. അപ്പോൾ മൂന്നാമത്തെ കൂട്ടത്തിൽ ആകെ എത്ര ജോടിയായി? $450 + 500 = 950$

സാധ്യതയും ആവൃത്തിയും

സാധാരണ ഒരു നാണയം കുറേ തവണ എറിയുമ്പോൾ, തലയോ വാലോ വീഴുന്നതിന്റെ എണ്ണം ഏതാണ്ടു തുല്യമായിരിക്കുമെന്നു പറഞ്ഞല്ലോ. എന്നാൽ, നാണയം ഉണ്ടാക്കുന്നതിലെ അപാകത കൊണ്ടോ മറ്റോ, ചിലപ്പോൾ തലവശം വീഴാൻ സാധ്യത കൂടുതലായി എന്നു വരാം. ഇതെങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

നാണയം ആവർത്തിച്ച് എറിയുമ്പോൾ ഓരോ വശവും വീഴുന്നതിന്റെ എണ്ണം, പകുതിയിൽ നിന്ന് വല്ലാതെ മാറിയിട്ടുണ്ടെങ്കിലാണ് ഇത്തരമൊരു സംശയം ഉണ്ടാകേണ്ടത്. അപ്പോൾ കൂടുതൽ തവണ എറിഞ്ഞ് ഓരോ വശവും വീഴുന്നതിന്റെ എണ്ണം വെവ്വേറെ പട്ടികപ്പെടുത്തുകയാണ് രീതി. ഉദാഹരണമായി ഈ പട്ടിക നോക്കുക.

ഏറ്	തല	വാൽ
10	6	4
100	58	42
1000	576	424
10000	5865	4135

ഇതിൽ നിന്ന് തലയുടെ സാധ്യത 0.6 എന്നും, വാലിന്റെ സാധ്യത 0.4 എന്നും എടുക്കുന്നതാണ്, രണ്ടും 0.5 എന്നെടുക്കുന്നതിനേക്കാൾ ശരി എന്നു കാണാമല്ലോ.

ഇത്തരം കണക്കുകൂട്ടലുകൾ കൂടുതൽ കൃത്യമാക്കാനുള്ള ഗണിതരീതികൾ, സാധ്യതാസിദ്ധാന്തം (Probability theory) എന്ന ഗണിതശാഖയുടെ തുടർന്നുള്ള പഠനത്തിൽ കാണാം.

ഒന്നെങ്കിലും പഴുത്തത് രണ്ടാമത്തേയും, മൂന്നാമത്തേയും കൂട്ടത്തിലാണല്ലോ. അവ ആകെ 750 + 950 = 1700. അപ്പോൾ ഒരെണ്ണമെങ്കിലും പഴുത്തതാകാനുള്ള സാധ്യത.

$$\frac{1700}{2000} = \frac{17}{20}$$

ഇത് 0.85 എന്നുമെഴുതാം.

ഇതിൽ മൂന്നു കൂട്ടത്തിലേയും എണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കാതെ, ആദ്യത്തെ കൂട്ടത്തിലെ എണ്ണം മാത്രം ഉപയോഗിച്ചും, ഈ സാധ്യത കണ്ടുപിടിക്കാമായിരുന്നില്ലേ? എങ്ങനെയാണിത്?

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ സ്വയം ചെയ്തു നോക്കൂ.

- രണ്ടു പെട്ടികൾ; ഓരോന്നിലും 1 മുതൽ 5 വരെയുള്ള സംഖ്യകളെഴുതിയ കടലാസുകഷണങ്ങൾ. ഓരോ പെട്ടിയിൽ നിന്നും ഓരോ കടലാസെടുത്ത്, അതിലെ സംഖ്യകൾ കൂട്ടുന്നു. തുകയായി വരാവുന്ന സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെയാണ്? ഇവയോരോന്നും കിട്ടാനുള്ള സാധ്യതകൾ കണക്കാക്കുക.
- വിരലുകളുയർത്തി കൂട്ടുന്ന കളിയിൽ, ഏതു സംഖ്യ തുകയായി വരാനാണ് ഏറ്റവും കൂടുതൽ സാധ്യത? ആ സാധ്യത എത്രയാണ്?
- ഒരാളോട് ഒരു രണ്ടക്കസംഖ്യ പറയാനാവശ്യപ്പെടുന്നു.
  - ഇതിലെ രണ്ടക്കങ്ങളും തുല്യമാകാനുള്ള സാധ്യത എത്രയാണ്?
  - ആദ്യത്തെ അക്കം, രണ്ടാമത്തെ അക്കത്തേക്കാൾ വലുതാകാനുള്ള സാധ്യത എത്രയാണ്?
  - ആദ്യത്തെ അക്കം, രണ്ടാമത്തെ അക്കത്തേക്കാൾ ചെറുതാകാനുള്ള സാധ്യത എത്രയാണ്?

അനിശ്ചിതത്വത്തിന്റെ അളവ്

കലണ്ടറിൽ ഓരോ ദിവസത്തേയും സൂര്യൻ ഉദിക്കുന്ന സമയവും, അസ്തമിക്കുന്ന സമയവും കൊടുത്തിരിക്കുന്നത് ശ്രദ്ധിച്ചിട്ടുണ്ടോ? കൃത്യമായ ചില ഗണിതനിയമങ്ങളനുസരിച്ചു ഭൂമിയും സൂര്യനുമെല്ലാം ചലിക്കുന്നതുകൊണ്ടാണ് ഇതെല്ലാം കണക്കാക്കാൻ പറ്റുന്നത്.

ഇതുപോലെതന്നെ മഴക്കാലവും വേനൽക്കാലവുമെല്ലാം ഏതു മാസങ്ങളിലാണെന്നും കണക്കു കൂട്ടാം. പക്ഷേ വേനൽക്കാലത്ത് പെട്ടെന്നൊരു മഴ വരുന്നത് മുൻകൂട്ടി കണക്കാക്കാൻ കഴിഞ്ഞില്ല എന്നു വരും. മഴയെ സ്വാധീനിക്കുന്ന ഘടകങ്ങളുടെ പെരുപ്പവും, അവ തമ്മിലുള്ള പരസ്പരബന്ധങ്ങളുടെ സങ്കീർണതയുമാണ് ഇത്തരം പ്രവചനങ്ങൾ വിഷമമാക്കുന്നത്.

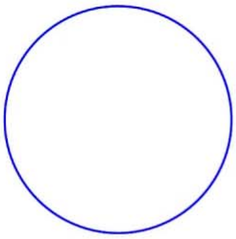
പക്ഷേ ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിലും, സാഹചര്യങ്ങളുടെ ഗണിതപരമായ വിശകലനത്തിലൂടെ സാധ്യതകൾ കണക്കുകൂട്ടാം. അതുകൊണ്ടുതന്നെയാണ് ദൈനംദിന അന്തരീക്ഷസ്ഥിതിയെക്കുറിച്ചുള്ള പ്രവചനങ്ങൾ, സാധ്യതകളായി പറയുന്നത്. അപ്രതീക്ഷിതമായി സാഹചര്യങ്ങളിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റങ്ങളാണ് ഈ പ്രവചനങ്ങളെ ചിലപ്പോൾ തെറ്റിക്കുന്നതും.

യാതൊരു ശാസ്ത്രീയമായ അടിസ്ഥാനവുമില്ലാതെ, കൃത്യമെന്നപോലെ നടത്തുന്ന പ്രവചനങ്ങളേക്കാൾ, ഇത്തരം സാധ്യതാ പ്രവചനങ്ങൾക്ക് വിശ്വാസ്യത കൂടുമെന്ന് ശരിയായി നോക്കിയാൽ കാണുകയും ചെയ്യാം.

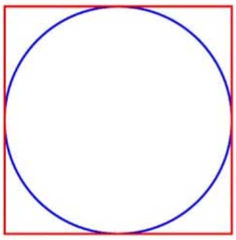
8 തൊടുവരകൾ

വൃത്തത്തിനു ചുറ്റും

ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക; ആരം എന്തുമാവാം:

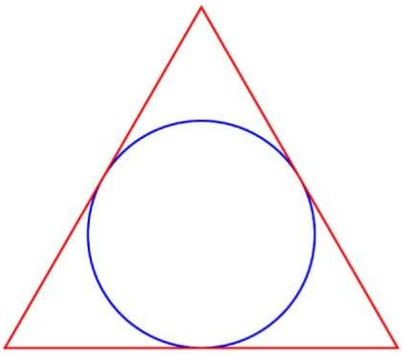


ഇനി അതിനു ചുറ്റുമായി ഇങ്ങനെ ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കണം:



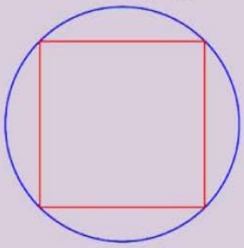
എങ്ങനെയാണ് വശങ്ങൾ വരയ്ക്കുക?

ഇനി ഇതേപോലെ ഒരു വൃത്തം വരച്ച്, അതിനു ചുറ്റുമായി ചുവടെക്കാണുന്നതുപോലെ ഒരു സമഭുജത്രികോണം വരയ്ക്കണം.

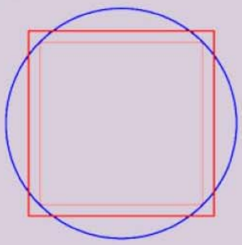


വലുതാകുന്ന സമചതുരം

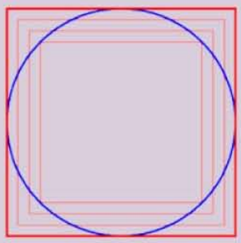
ഒരു വൃത്തത്തിനകത്ത്, ചുവടെകാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ സമചതുരം വരയ്ക്കാൻ വിഷമമില്ലല്ലോ.



വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം അൽപം കൂട്ടി ഇങ്ങനെയും വരയ്ക്കാം.



ഇങ്ങനെ ക്രമേണ വശങ്ങൾ വലുതാക്കിക്കൊണ്ടിരുന്നാൽ, ഇത്തരമൊരു സമചതുരവും കിട്ടും:



ഇതുപോലെ വൃത്തത്തിനകത്തുള്ള ഏത് സമചതുരത്തെയും വൃത്തത്തിന് പുറത്താക്കുവാൻ കഴിയുമോ?

അത്ര എളുപ്പമല്ല, അല്ലേ?

ചതുരച്ചിത്രത്തിലും, ത്രികോണച്ചിത്രത്തിലും, ഓരോ വശവും വൃത്തത്തിലെ എത്ര ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി കടന്നു പോകുന്നുണ്ട്?

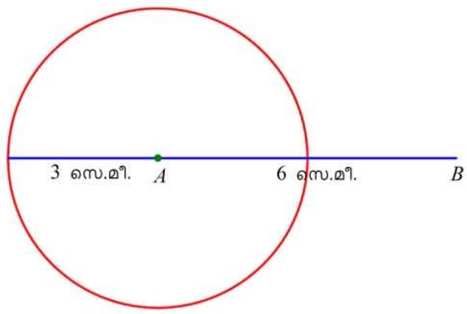
വരകളും വൃത്തങ്ങളുമായുള്ള ഇത്തരം ബന്ധങ്ങൾ വിശദമായിത്തന്നെ പരിശോധിക്കാം.

വരകൾ, വൃത്തങ്ങൾ

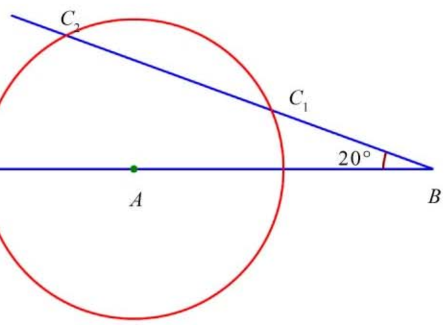
ഒരു വര, ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഒരേ ഒരു ബിന്ദുവിൽക്കൂടി മാത്രം കടന്നു പോകുന്ന സന്ദർഭങ്ങൾ ഇതിനുമുമ്പു കണ്ടിട്ടുണ്ടോ?

ഈ ഉദാഹരണം നോക്കുക. ABC എന്നൊരു ത്രികോണം വരയ്ക്കണം; AB യുടെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്റർ, AC യുടെ നീളം 3 സെന്റിമീറ്റർ, B യിലെ കോൺ $20°$. (ഇത്തരമൊരു കണക്ക് എട്ടാം ക്ലാസിൽ ചെയ്തത് ഓർമയില്ലേ?)

ആദ്യം 6 സെന്റിമീറ്റർ നീളത്തിൽ AB വരയ്ക്കാം. A യിൽ നിന്ന് 3 സെന്റിമീറ്റർ അകലെയാണ് C എന്നറിയാമല്ലോ; അപ്പോൾ A കേന്ദ്രമായി, 3 സെന്റിമീറ്റർ ആരത്തിൽ വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തത്തിലെവിടെയോ ആണ് C.

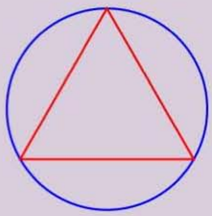


ഇനിയോ? B യിലെ കോൺ $20°$ ആണല്ലോ. അതിനാൽ B യിൽക്കൂടി, ഈ ചരിവിൽ ഒരു വര വരയ്ക്കാം:



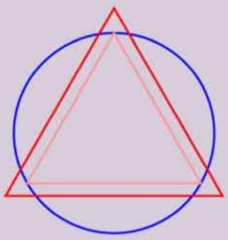
വളരുന്ന ത്രികോണം

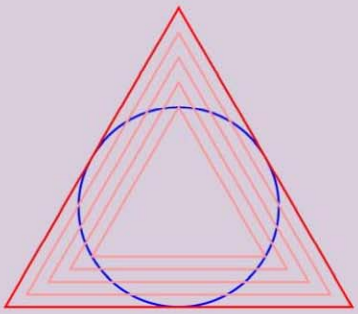
വൃത്തത്തിനകത്ത്, ഇതുപോലെ ഒരു സമഭുജത്രികോണം വരയ്ക്കാമോ?



(**വൃത്തങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ചാപവും കോണും ഞാണും** എന്ന ഭാഗം ഓർക്കുക)

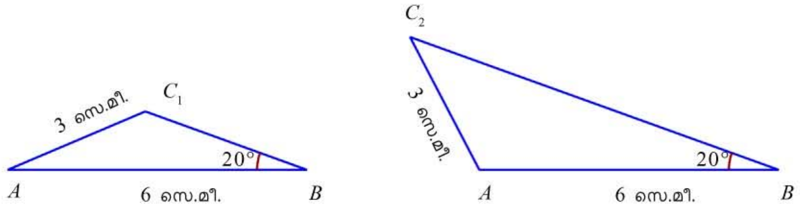
സമചതുരത്തിന്റെ കാര്യത്തിലെന്നപോലെ ഇതിനേയും വലുതാക്കിയാലോ?



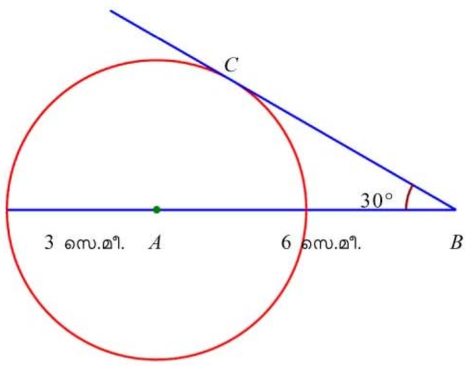


പുറത്തെ ത്രികോണം കിട്ടാൻ വശങ്ങൾ എത്ര വലുതാക്കണം?

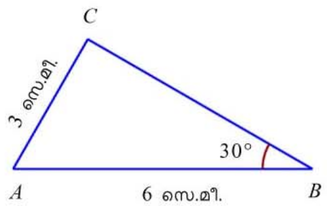
അപ്പോൾ ഇപ്പറഞ്ഞ അളവുകളിൽ രണ്ടു ത്രികോണം കിട്ടും:



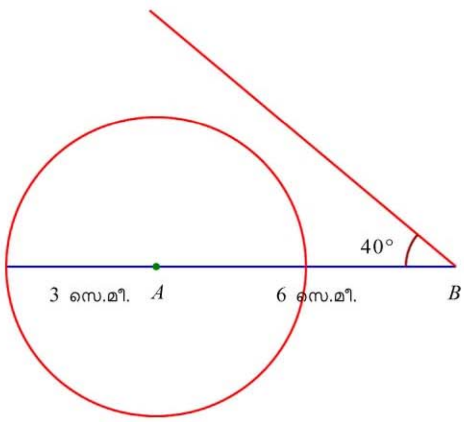
ഇനി B യിലെ കോൺ 30° യാണു വേണ്ടതെങ്കിലോ?



ഒരു ത്രികോണം മാത്രമാണു കിട്ടുന്നത്.



കോൺ 40° ആക്കിയാലോ?



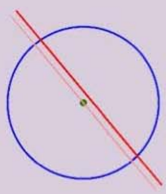
ഇവിടെ 20° വര വൃത്തത്തെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിച്ചു; 40° വരയ്ക്ക് വൃത്തവുമായി ഒരു ബന്ധവുമില്ല.

30° വരയോ? വൃത്തത്തെ ഒന്നു തൊടുക മാത്രം; ഇത്തരമൊരു വരയെ, വൃത്തത്തിന്റെ തൊടുവര എന്നാണ് പറയുന്നത്. (സ്പർശരേഖ എന്നും പറയാറുണ്ട്. ഇംഗ്ലീഷിൽ *tangent* എന്നും.)

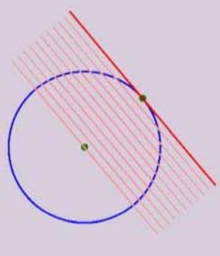
നീങ്ങുന്ന വരകൾ

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

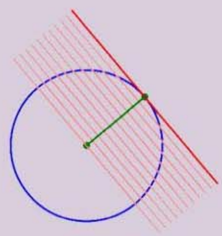
ഒരു വൃത്തവും, കേന്ദ്രത്തിലൂടെ ഒരു വരയും. വര അൽപം മുകളിലേക്കു നീക്കിയാലോ?



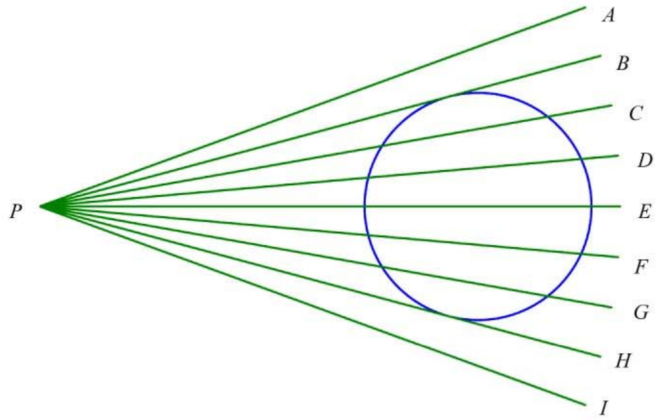
വര വീണ്ടും വീണ്ടും നീക്കിക്കൊണ്ടിരുന്നാൽ വൃത്തത്തിലെ ഒരേയൊരു ബിന്ദുവിൽക്കൂടിപ്പോകുന്ന വരയിലെത്തില്ലേ?



കേന്ദ്രവും, അവസാനം കിട്ടിയ ബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, ഈ സമാന്തരവരകൾക്കെല്ലാം ലംബമാണല്ലോ.



ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

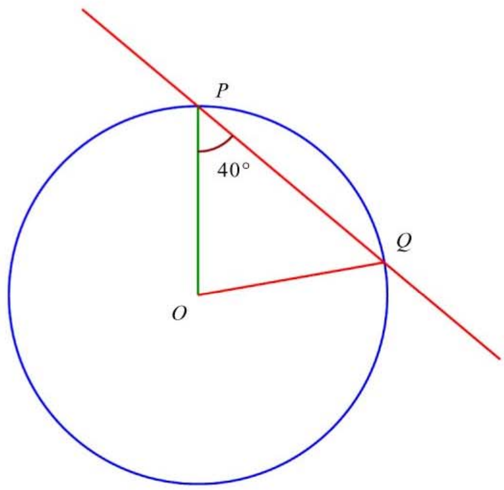


ചിത്രത്തിൽ രണ്ടെണ്ണം മാത്രമാണ് തൊടുവരകൾ. ഏതൊക്കെ?

ഇനി നേരത്തെ വരച്ച ത്രികോണങ്ങൾ ഒന്നുകൂടി നോക്കൂ. രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ കിട്ടിയപ്പോൾ, ഒന്നിൽ മുകളിലെ കോൺ മട്ടത്തേക്കാൾ കൂടുതൽ, രണ്ടാമത്തേതിൽ മട്ടത്തേക്കാൾ കുറവ്. ഈ കോണുകൾ തമ്മിലെന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ? മുകളിലത്തെ മൂലകൾ കിട്ടിയതെങ്ങനെയാണെന്ന് ഒന്നു കൂടി നോക്കു.

ഒരു ത്രികോണം മാത്രം കിട്ടിയപ്പോഴോ?

മറ്റൊരു ചിത്രം വരയ്ക്കാം:



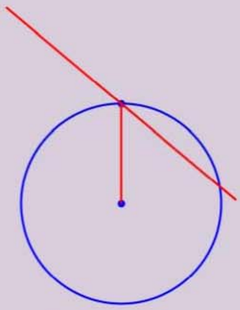
ഇതിൽ $\angle OQP$ എത്രയാണ്?

ഇതേ ചിത്രത്തിൽ Q ന്റെ സ്ഥാനത്തിനു മാത്രം മാറ്റം വരുത്തി, P യിലെ കോൺ $50°, 60°$ എന്നിങ്ങനെ വലുതാക്കി ചിത്രങ്ങൾ വരച്ചു നോക്കൂ. എന്താണ് കാണുന്നത്?

P യിലെ കോൺ വലുതാകുന്തോറും, Q എന്ന ബിന്ദു, P എന്ന ബിന്ദുവിനോടടുക്കുന്നു; ΔPOQ നേർത്തു വരുന്നു.

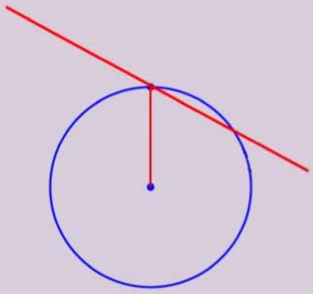
തിരിയുന്ന വരകൾ

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

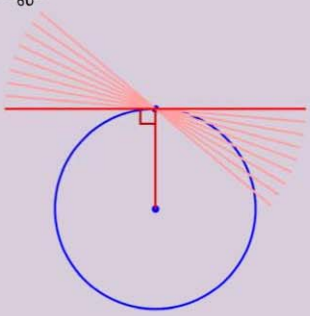


വൃത്തത്തിലെ ഒരു ആരവും, അതിന്റെ അറ്റത്തുനിന്ന്, അൽപം ചരിഞ്ഞ ഒരു വരയും.

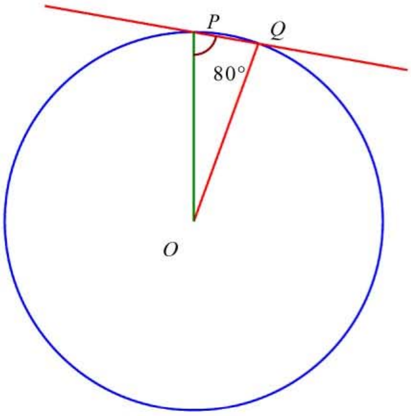
മുകളിലത്തെ ബിന്ദുവിൽക്കൂടി, ഈ വര അൽപം മേലോട്ടു തിരിച്ചാലോ?



ഇങ്ങനെ തിരിച്ചുകൊണ്ടിരുന്നാൽ, ആരത്തിനു ലംബമായ ഒരു വരയിലെത്തില്ലേ?



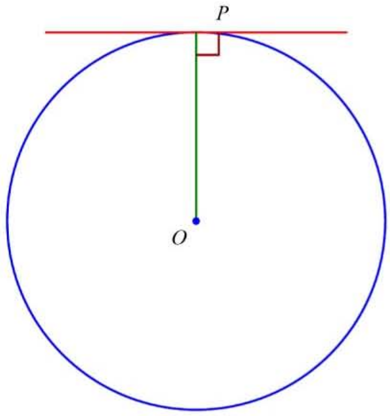
ഇതു വൃത്തത്തിന്റെ എത്ര ബിന്ദുവിൽക്കൂടി കടന്നുപോകും?



P യിലെ കോൺ $90°$ ആയാലോ?

ഈ വര മറ്റൊരു ബിന്ദു Q വിൽ വൃത്തത്തെ ഖണ്ഡിക്കുമോ? അങ്ങനെയായാൽ, Q വിലെ കോണും $90°$ ആകണ്ടേ? ഒരു ത്രികോണത്തിലെങ്ങനെയാണ് രണ്ടു മട്ടകോണുകൾ?

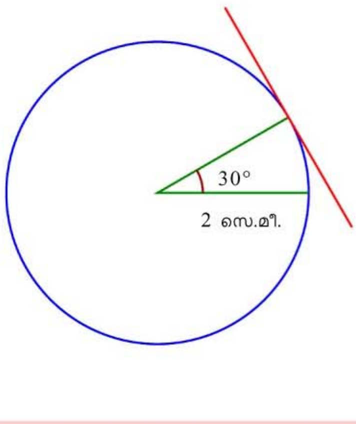
അപ്പോൾ ഈ വരയും വൃത്തവുമായി മറ്റൊരു ബിന്ദുവുമില്ല; അതായത്, ഈ വര P യിലെ തൊടുവരയാണ്:



ഇതിൽനിന്നു കിട്ടിയ സാമാന്യതത്വം എന്താണ്?

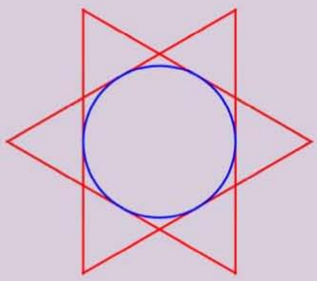
വൃത്തത്തിലെ ഏതെങ്കിലും ബിന്ദുവിലൂടെ ആരത്തിനു ലംബമായി വരയ്ക്കുന്ന വര, ആ ബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയാണ്.

ഇനി ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങൾ, പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന അളവുകളിൽ വരച്ചു നോക്കൂ:

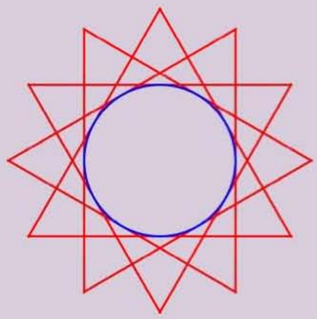


വരകൾകൊണ്ടൊരു വൃത്തം

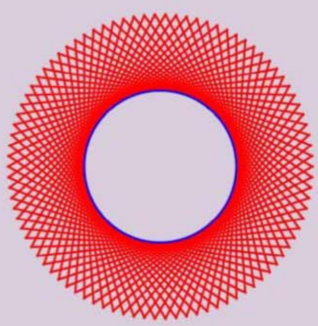
ചിത്രത്തിൽ ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ആറു ബിന്ദുക്കളിൽ തൊടുവരകൾ വരച്ച്, ഒരു നക്ഷത്രമുണ്ടാക്കിയിരിക്കുന്നു.

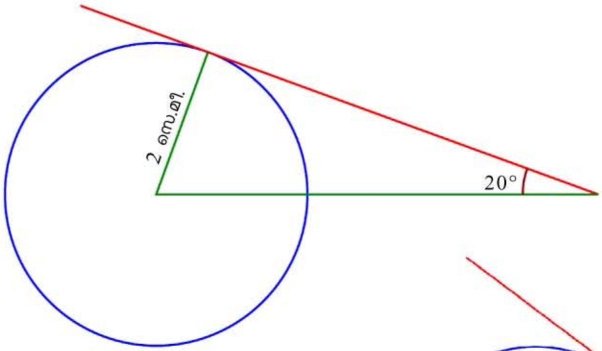


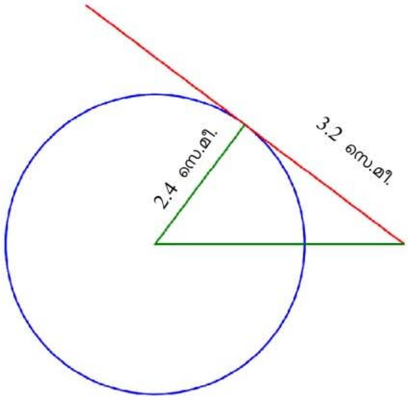
തൊടുവരകളുടെ എണ്ണം 12 ആക്കിയാലോ?



കമ്പ്യൂട്ടർ ഉപയോഗിച്ച്, 90 തൊടുവരകൾ വരച്ച ചിത്രമാണ് ഇത്:







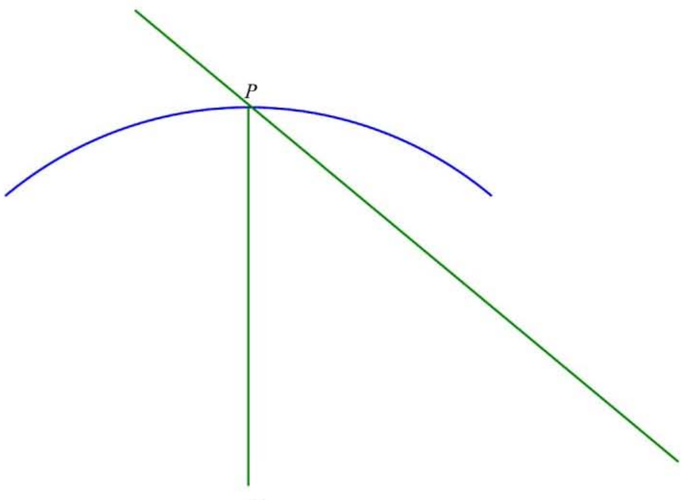
ഒരു വൃത്തത്തിൽ വ്യാസം AB വരയ്ക്കുക. A യിലൂടെയും B യിലൂടെയും കടന്നുപോകുന്ന തൊടുവരകൾ വരച്ച് ഇവ കൂട്ടിമുട്ടുന്നില്ല എന്ന് തെളിയിക്കുക.

തത്വങ്ങളും പ്രയോഗങ്ങളും

ആരത്തിനു ലംബം വരച്ചാൽ തൊടുവരയാകുമെന്നു കണ്ടു. എല്ലാ തൊടുവരകളും ഇങ്ങനെതന്നെയാണോ? മറ്റൊരു വിധത്തിൽ ചോദിച്ചാൽ, ഏതു തൊടുവരയും, അത് വൃത്തത്തിൽ തൊടുന്ന ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള ആരത്തിന് ലംബമാണോ?

ഇതിനുത്തരം പറയാൻ, ആദ്യം ഒരു വൃത്തവും അതിന്റെ ഒരു ആരവും വരച്ച്, ആരത്തിന്റെ അറ്റത്തുകൂടി ലംബമല്ലാത്ത ഒരു വര വരയ്ക്കുക. ഇത്, വൃത്തത്തിനെ മറ്റൊരു ബിന്ദുവിലും കൂടി ഖണ്ഡിക്കുമെന്ന് കാണാമല്ലോ. എവിടെയാണ് ഈ രണ്ടാമത്തെ ബിന്ദു? വൃത്തം മുഴുവൻ കാണാതെ പറയാൻ കഴിയുമോ?

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

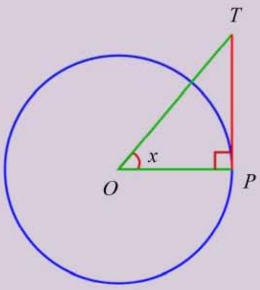


പേരുവിവരം

തൊടുക എന്നർത്ഥമുള്ള *tangere* എന്ന ലാറ്റിൻ വാക്കിൽനിന്നാണ്, തൊടുവരയ്ക്ക് ഇംഗ്ലീഷിൽ *tangent* എന്ന പേരു വന്നത്.

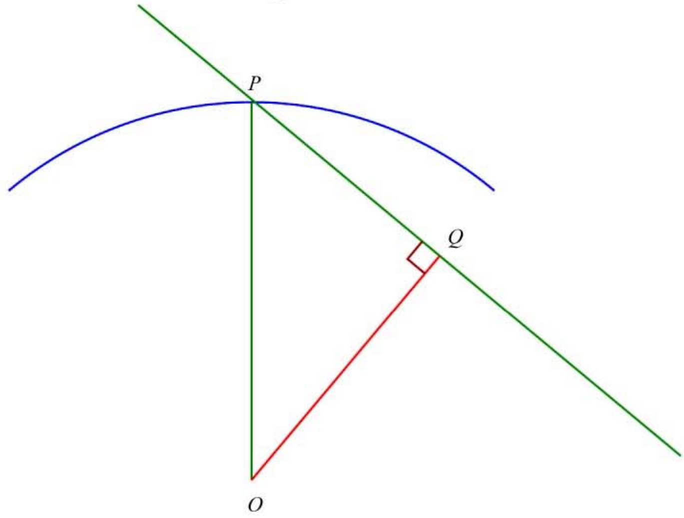
ത്രികോണമിതിയിലെ tan എന്ന അളവിന്റെയും മുഴുവൻ പേര് *tangent* എന്നു തന്നെയാണല്ലോ. എന്താണ് ഇതിന് തൊടുവരയുമായുള്ള ബന്ധം?

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

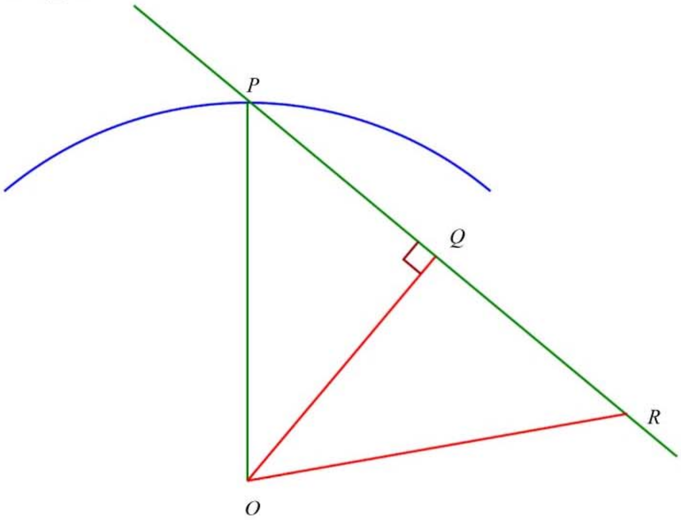


വൃത്തത്തിന്റെ ആരം 1 എന്നെടുത്താൽ, PT എന്ന തൊടുവരയുടെ നീളം $\tan x$ തന്നെയല്ലേ?

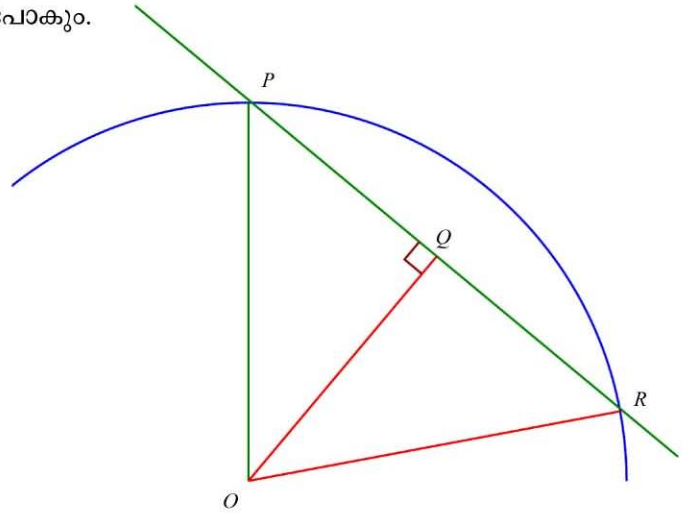
P യിലൂടെയുള്ള വര, ആരം OP ക്കു ലംബമല്ല. അപ്പോൾ, O യിൽ നിന്ന് ലംബം വരയ്ക്കാമല്ലോ.



ഇനി Q ൽ നിന്ന് P യിലേക്കുള്ള അതേ അകലം മുന്നോട്ട് R അടയാളപ്പെടുത്തുക.

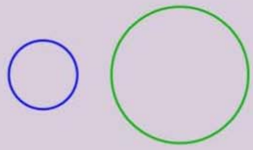


ഇപ്പോൾ ΔOPQ, ΔORQ ഇവ സർവസമമാണ് (കാരണം?) അതിനാൽ, $OP = OR$ ആണ്. അതായത്, വൃത്തം R ൽക്കൂടിയും കടന്നുപോകും.

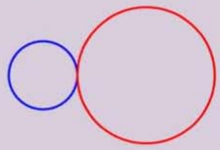


തൊടുവട്ടങ്ങൾ

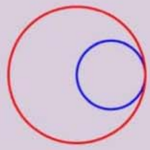
വൃത്തവും വരയുമെന്നപോലെ, രണ്ടു വൃത്തങ്ങളും ഖണ്ഡിക്കാതിരിക്കാം. അല്ലെങ്കിൽ, രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കാം:



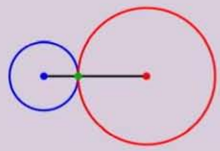
രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ ഒരു ബിന്ദുവിൽ തൊടുകയുമാവാം:

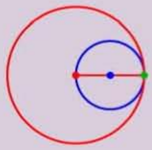


ഇങ്ങനെ പുറത്തുനിന്നു തൊടുന്നതിനുപകരം, അകത്തുനിന്നും തൊടാം:



എങ്ങനെ തൊട്ടാലും, തൊടുന്ന ബിന്ദുവും, വൃത്തകേന്ദ്രങ്ങളും ഒരേ വരയിലായിരിക്കുമെന്ന് യൂക്ലീഡ് തെളിയിച്ചിട്ടുണ്ട്.





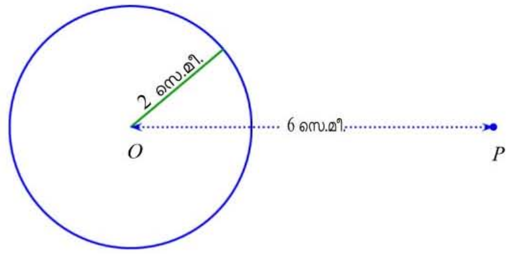
ഇവിടെ കണ്ടതെന്താണ്? P യിൽക്കൂടിയുള്ള ഒരു വര, OP യ്ക്കു ലംബമല്ലെങ്കിൽ, അത് വൃത്തത്തിനെ മറ്റൊരു ബിന്ദുവിലും കൂടി ഖണ്ഡിക്കും; മറിച്ച്, P യിൽക്കൂടിയുള്ള തൊടുവര മറ്റൊരു ബിന്ദുവിൽ വൃത്തത്തെ ഖണ്ഡിക്കുകയുമില്ല. അപ്പോൾ P യിൽക്കൂടിയുള്ള തൊടുവര OP യ്ക്കു ലംബമാകാതെ തരമില്ലല്ലോ.

ഇതൊരു സാമാന്യ തത്വമായി പറയാം.

വൃത്തത്തിന്റെ ഏതു തൊടുവരയും, തൊടുന്ന ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള ആരത്തിന് ലംബമാണ്.

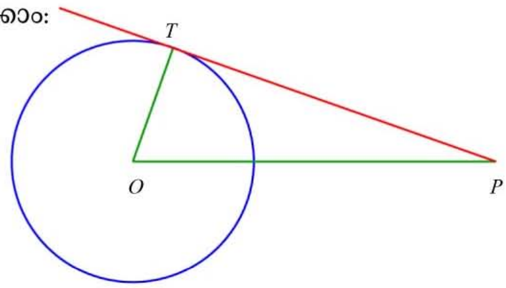
ഈ തത്വത്തിന്റെ ഒരു പ്രയോഗം നോക്കാം.

2 സെന്റിമീറ്റർ ആരത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ഇതിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് 6 സെന്റിമീറ്റർ അകലെ ഒരു കുത്തിടുക.



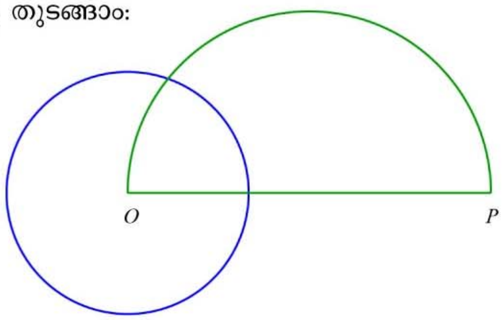
ഇതിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ഒരു തൊടുവര വരയ്ക്കാമോ?

വരയ്ക്കേണ്ടതെങ്ങനെയെന്ന് അറിയാൻ, ഒരു ഏകദേശ ചിത്രം വരച്ചു നോക്കാം:



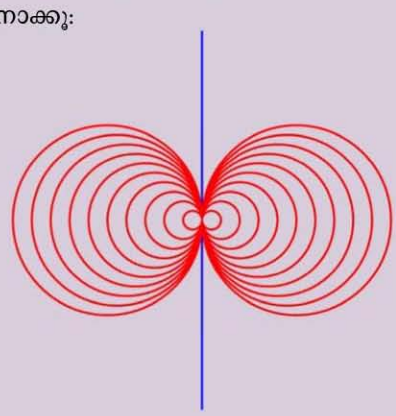
വേണ്ടത് തൊടുവരയായതിനാൽ, മുകളിലത്തെ കോൺ മട്ടമായിരിക്കണം. അപ്പോൾ വേണ്ടത്, ചുവട്ടിലെ വര കർണമായ മട്ടത്രികോണമാണ്. അതിന് ഒരു അർധവൃത്തം വരച്ചാൽപ്പോരേ? (**വൃത്തങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ പഠിച്ചതൊന്നും മറന്നിട്ടില്ലല്ലോ?)

ഇനി വരച്ചു തുടങ്ങാം:

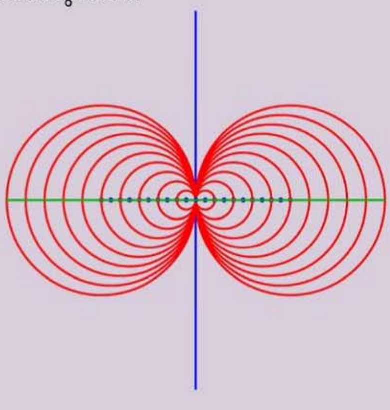


വട്ടക്കൂട്ടം

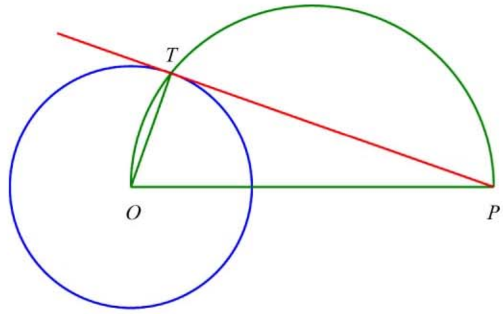
ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവിൽ തൊടുന്ന ഒരേ ഒരു വരയേ ഉള്ളൂ. എന്നാൽ ഒരു വരയെ ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവിൽ തൊടുന്ന അനേകം വൃത്തങ്ങളുണ്ട്. ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



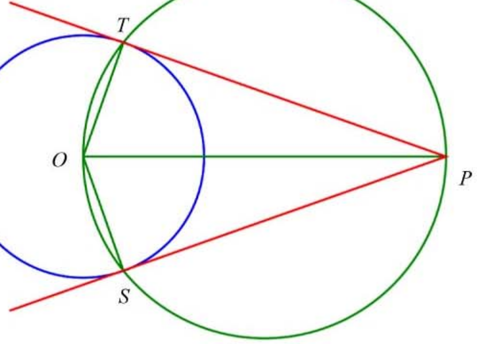
ഈ വൃത്തങ്ങളെല്ലാം പരസ്പരം തൊടുന്നുമുണ്ട്. അപ്പോൾ അവയുടെ കേന്ദ്രങ്ങളെല്ലാം ഒരേ വരയിലാണ്. പൊതുവായ തൊടുവര, ഈ വരയ്ക്കു ലംബവുമാണ്.



ചിത്രത്തിലെ അർധവൃത്തത്തിൽ ഏതു ബിന്ദുവുമായി O, P ഇവ യോജിപ്പിച്ചാലും, OP കർണമായ മട്ടത്രികോണം കിട്ടും. നമുക്കാവശ്യമായ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നാം മൂല, കൊച്ചു വൃത്തത്തിലും ആകണമല്ലോ. അപ്പോൾ, ഈ വൃത്തവും, പുതുതായി വരച്ച അർധവൃത്തവും ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദു എടുക്കണം.



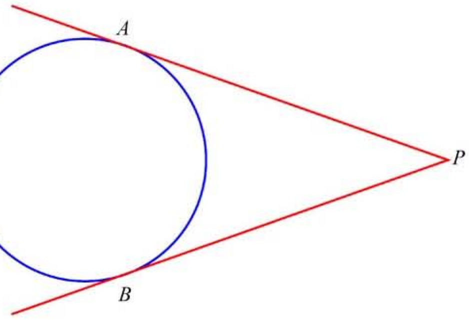
PT യോജിപ്പിച്ചു വരച്ചാൽ പറഞ്ഞ ജോലി കഴിഞ്ഞു. പക്ഷേ ഒരു കാര്യം കൂടി ആലോചിക്കാം അർധവൃത്തം മേലോട്ടു വരച്ചതു പോലെ താഴോട്ട് വരച്ചാലും തൊടുവര കിട്ടില്ലേ?



അപ്പോൾ, P യിൽക്കൂടി രണ്ടു തൊടുവരകൾ വരയ്ക്കാം.

ചിത്രത്തിൽ PT യും PS ഉം തുല്യമാണെന്ന് കാണാൻ കഴിയുന്നുണ്ടോ? ഇവയെ P യിൽ നിന്നുള്ള തൊടുവരകളുടെ നീളം എന്നു പറയാം. അപ്പോൾ വൃത്തത്തിനു പുറത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്ന് വരയ്ക്കുന്ന തൊടുവരകളുടെ നീളം തുല്യമാണ്. ഇതെങ്ങനെ തെളിയിക്കും?

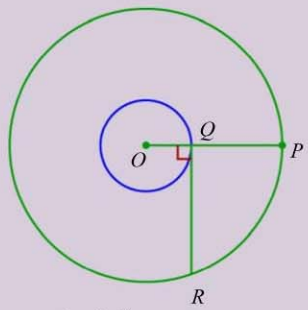
ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ, P എന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്നു വൃത്തത്തിലേക്കു വരച്ചിരിക്കുന്ന തൊടുവരകളുടെ നീളം PA, PB ആണ്.



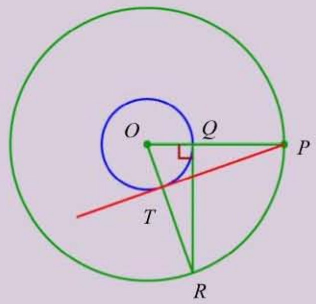
മറ്റൊരുരീതി

വൃത്തത്തിനു പുറത്തുള്ള ബിന്ദുവിൽനിന്ന് തൊടുവര വരയ്ക്കാൻ യൂക്ലീഡ് ഉപയോഗിക്കുന്നത് മറ്റൊരു മാർഗമാണ്.

OP യോജിപ്പിച്ച്, ആ നീളം ആരമായി മറ്റൊരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. OP ആദ്യത്തെ വൃത്തത്തെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുവിൽകൂടി അതിനു ലംബം വരച്ച്, രണ്ടാമത്തെ വൃത്തത്തെ ഖണ്ഡിക്കുക.



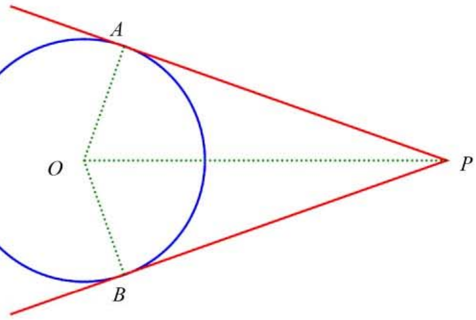
OR യോജിപ്പിച്ച്, ഇതു ആദ്യത്തെ വൃത്തത്തെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുവുമായി P യോജിപ്പിച്ചാൽ, തൊടുവരയായി.



ഇതു തെളിയിക്കാമോ?

P യിൽനിന്നുള്ള രണ്ടാമത്തെ തൊടുവര ഈ രീതിയിൽ വരയ്ക്കാമോ?

$PA = PB$ എന്നു തെളിയിക്കണം. അതിന് P, A, B ഇവ വൃത്തകേന്ദ്രം O യുമായി യോജിപ്പിക്കുക.



AP എന്ന വര, വൃത്തത്തിലെ A എന്ന ബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയാണ്; OA എന്ന വര A യിൽക്കൂടിയുള്ള ആരവും.

അതിനാൽ $\angle OAP = 90°$.

അതായത്, OAP മട്ടത്രികോണമാണ്. അപ്പോൾ പൈഥഗോറസ് സിദ്ധാന്തമുപയോഗിച്ച്,

$$PA = \sqrt{OP^2 - OA^2}$$

ഇതേപോലെ, BP എന്ന വര, വൃത്തത്തിലെ B എന്ന ബിന്ദുവിലെ തൊടുവരയാണ്; OB എന്ന വര B യിൽക്കൂടിയുള്ള ആരവുമായതിനാൽ, $\angle OBP = 90°$. അപ്പോൾ OBP എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽ നിന്ന്

$$PB = \sqrt{OP^2 - OB^2}$$

ഇനി, OA, OB ഇവ വൃത്തത്തിന്റെ ആരങ്ങളായതിനാൽ

$$OA = OB$$

എന്നും കാണാം. മുകളിലെഴുതിയ മൂന്നു സമവാക്യങ്ങളിൽനിന്ന്

$$PA = \sqrt{OP^2 - OA^2} = \sqrt{OP^2 - OB^2} = PB$$

എന്നു കിട്ടും.

ഇക്കാര്യങ്ങൾ ഒരു സമാന്യതത്വമായി എഴുതാം:

വൃത്തത്തിനു പുറത്തുള്ള ഏതു ബിന്ദുവിൽ നിന്നും രണ്ടു തൊടുവരകൾ വരയ്ക്കാം; ബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള ഈ തൊടുവരകളുടെ നീളം തുല്യമാണ്.

ഇനി ചുവടെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന കണക്കുകൾ ചെയ്തു നോക്കൂ:

- A, B ഇവ കേന്ദ്രമായ വൃത്തങ്ങൾ P യിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. AP എന്ന വര B കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിന്റെ P യിലെ തൊടുവരയാണെങ്കിൽ, BP എന്ന വര A കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിന്റെ P യിലെ തൊടുവരയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

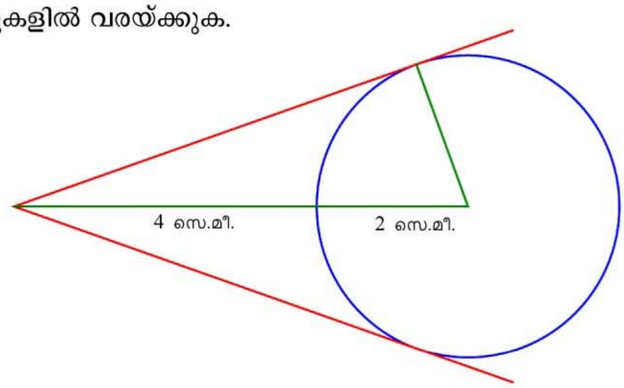
തെളിവിന്റെ രീതിശാസ്ത്രം

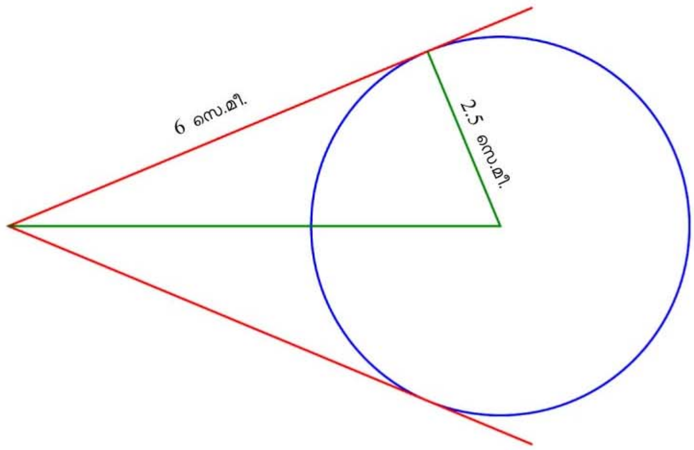
ജ്യാമിതിയുടെ ആചാര്യനായ യൂക്ലീഡിനെക്കുറിച്ചും, അദ്ദേഹമെഴുതിയ എലിമെന്റ്സ് എന്ന പുസ്തകത്തെക്കുറിച്ചും അറിയാമല്ലോ. (ഏഴാം ക്ലാസിലെ **വരക്കണക്ക്** എന്ന പാഠത്തിലെ **വൃത്തവും ത്രികോണവും** എന്ന ഭാഗം).

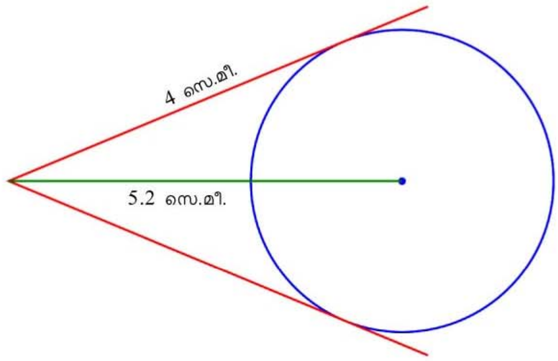
ചില അടിസ്ഥാനപ്രമാണങ്ങളിൽനിന്നു തുടങ്ങി, ലളിതമായ ചില സിദ്ധാന്തങ്ങൾ തെളിയിക്കുക; തുടർന്ന് ഇവ കൂടി ഉപയോഗിച്ചുകൊണ്ട് കൂടുതൽ സങ്കീർണ്ണങ്ങളായ സിദ്ധാന്തങ്ങൾ തെളിയിക്കുക. ഇതാണ് എലിമെന്റ്സ് രീതി. (ഈ പുസ്തകം കമ്പ്യൂട്ടറിൽ വായിക്കാൻ http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html നോക്കുക). ജ്യാമിതിയിൽ മാത്രമല്ല, ഗണിതത്തിലെ എല്ലാ ശാഖകളിലും ഇന്ന് ഈ രീതിയാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത്. മറ്റുശാസ്ത്രങ്ങളിലും ഇതേ രീതി തന്നെ ഏറിയും കുറഞ്ഞും കാണാം.

സിദ്ധാന്തങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് എങ്ങനെയായാലും തെളിവുകൾ അവതരിപ്പിക്കുന്നത്, നിഗമനങ്ങളോരോന്നും കാര്യകാരണബന്ധത്തോടെ ചുരുക്കി എഴുതുന്ന യൂക്ലീഡിന്റെ രീതിയിലാകണം എന്നതാണ് ഇന്നത്തെ ഗണിത സമ്പ്രദായം.

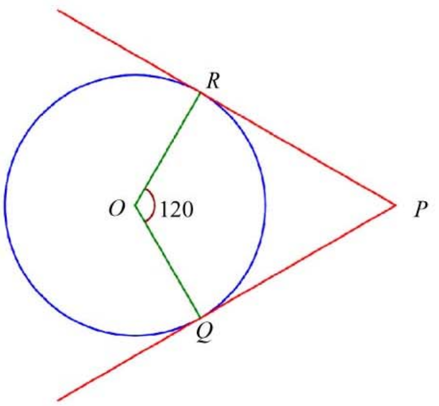
- ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രങ്ങൾ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന അള വുകളിൽ വരയ്ക്കുക.





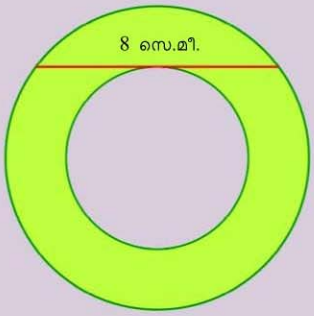


- ചിത്രത്തിലെ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം 15 സെന്റിമീറ്റർ ആണ്. PQ, PR എന്നീ തൊടുവരകളുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.

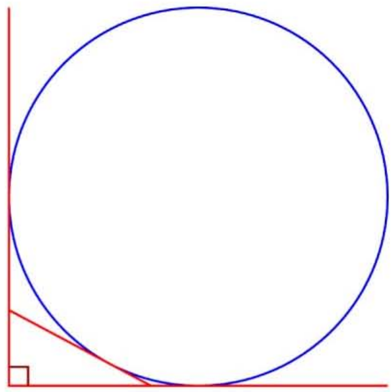


പരപ്പളവ് പ്രശ്നം

ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ, പച്ച ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?

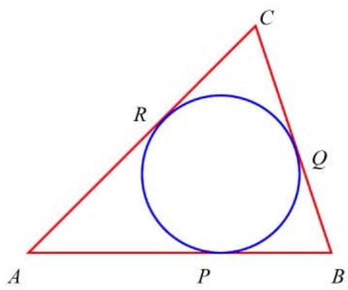


- O കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിലെ A, B എന്നി ബിന്ദുക്കളിലെ തൊടുവരകൾ P യിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. ചുവടെപ്പറയുന്ന കാര്യങ്ങൾ തെളിയിക്കുക:
  - P എന്ന ബിന്ദു, A യിൽ നിന്നും, B യിൽ നിന്നും തുല്യ അകലത്തിലാണ്.
  - OP എന്ന വര AB എന്ന വരയേയും, APB എന്ന കോണിനേയും സമഭാഗം ചെയ്യുന്നു.
  - AB എന്ന വരയെ OP എന്ന വര Q ൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. വൃത്തത്തിന്റെ ആരം r എന്നെടുത്താൽ, $OQ \times OP = r^2$
- ചിത്രത്തിൽ വൃത്തം മൂന്നു വരകളേയും തൊടുന്നു.



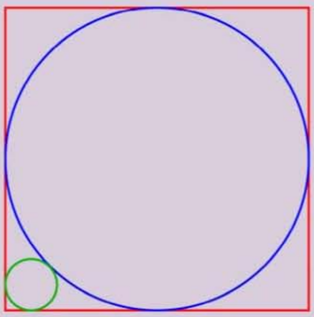
ചുവട്ടിലെ മട്ടത്രികോണത്തിന്റ ചുറ്റളവ്, വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസത്തിനു തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

- ചിത്രത്തിൽ AB, BC, CA എന്നീ വരകൾ വൃത്തത്തെ P, Q, R എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ തൊടുന്നു. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് $2(AP + BQ + CR)$ ആണെന്നു തെളിയിക്കുക.



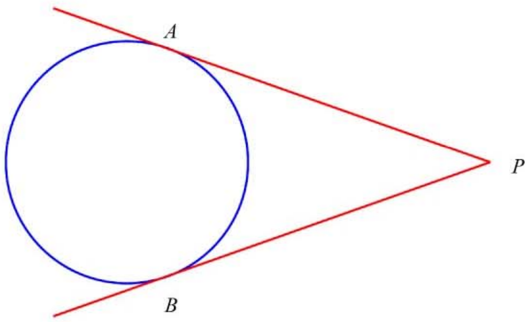
മൂലപ്രശ്നം

ചിത്രത്തിൽ ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെ തൊടുന്ന ഒരു വലിയ വൃത്തവും, ഈ വൃത്തത്തേയും സമചതുരത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളേയും തൊടുന്ന ഒരു ചെറിയ വൃത്തവുമുണ്ട്. ഈ രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെ ആരം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എന്താണ്?

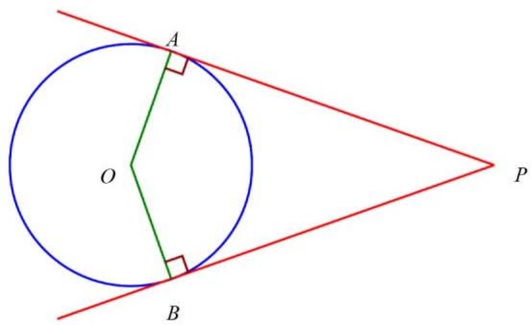


തൊടുവരയും കോണും

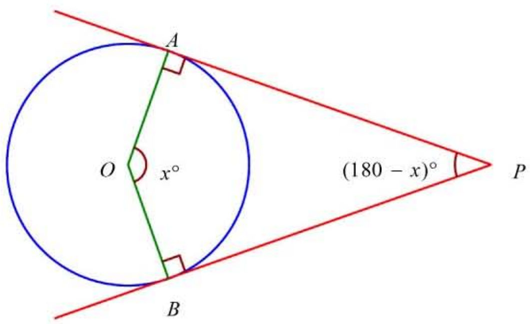
ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടിയുള്ള തൊടുവരകൾ ഒരു ബിന്ദുവിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു എന്നു കരുതുക.



A യും B യും യോജിപ്പിക്കുന്ന ചെറിയ ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണും, തൊടുവരകൾക്കിടയിലുള്ള P യിലെ കോണും നോക്കൂ:

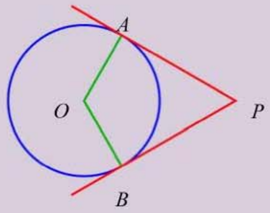


$OAPB$ എന്ന ചതുർഭുജത്തിലെ രണ്ടു കോണുകൾ മട്ടമാണല്ലോ; അവയുടെ തുക $180°$. അപ്പോൾ മറ്റു രണ്ടു കോണുകളുടെ തുകയും $180°$ തന്നെ ആകണമല്ലോ. (ചതുർഭുജത്തിലെ കോണുകളുടെയെല്ലാം തുക എത്രയാണ്?)

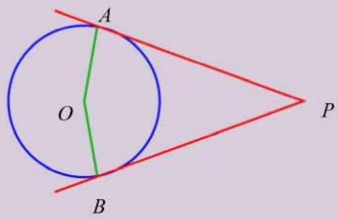


അടുത്തും അകന്നും

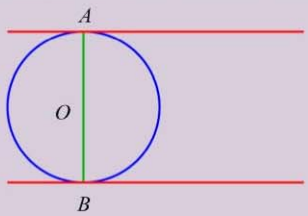
ചിത്രം നോക്കൂ:



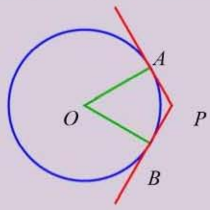
$\angle AOB$ വലുതാകുംതോറും, $\angle APB$ ചെറുതാകും; മാത്രവുമല്ല, O യിൽ നിന്ന് P അകന്നകന്നു പോകും:



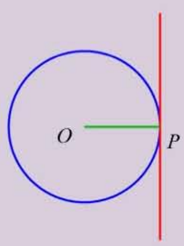
അവസാനം, AB വ്യാസമാകുമ്പോഴോ?



$\angle AOB$ ചെറുതാകുമ്പോഴോ?

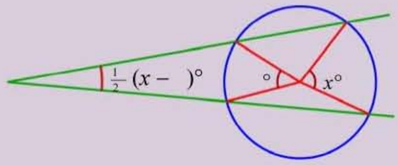


ഇങ്ങനെ തുടർന്ന്, A, B ഇവ ഒന്നിക്കുമ്പോഴോ?

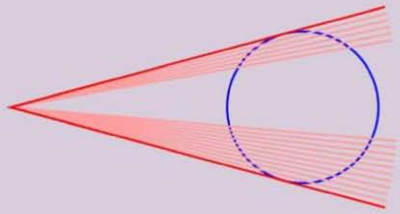


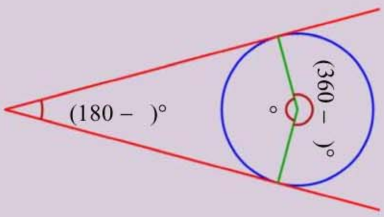
ഞാണും തൊടുവരയും

രണ്ടു ഞാണുകൾ വൃത്തത്തിനുപുറത്തു ഖണ്ഡിക്കുമ്പോഴുണ്ടാകുന്ന കോണിനെക്കുറിച്ച്, **വൃത്തങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **വൃത്തത്തിനുപുറത്ത്** എന്ന ഭാഗത്ത് കണ്ടല്ലോ.



ഈ ഞാണുകൾ കറങ്ങി, തൊടുവരകളാകുമ്പോഴോ?

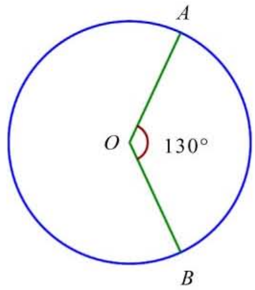


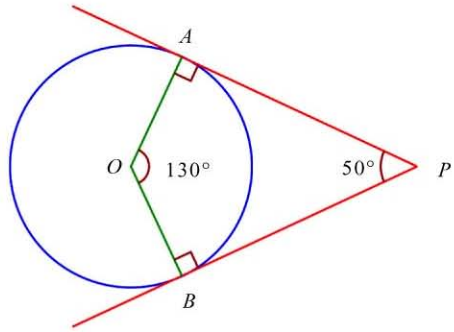


ഇവിടെ കണ്ടതെന്താണ്?

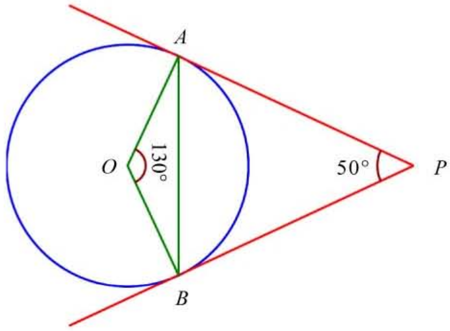
വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന ചെറിയ ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണും, ഈ ബിന്ദുക്കളിലെ തൊടുവരകൾക്കിടയിലുള്ള കോണും അനുപൂരകമാണ്.

ഉദാഹരണമായി, ഒരു വൃത്തത്തിന് രണ്ടു തൊടുവരകൾ വരയ്ക്കണം, അവയ്ക്കിടയിലുള്ള കോൺ 50° ആയിരിക്കണം, എന്നു പറഞ്ഞാൽ, 130° കേന്ദ്രകോണായ ചാപത്തിന്റെ അറ്റങ്ങളിൽനിന്നു വരച്ചാൽ മതി.



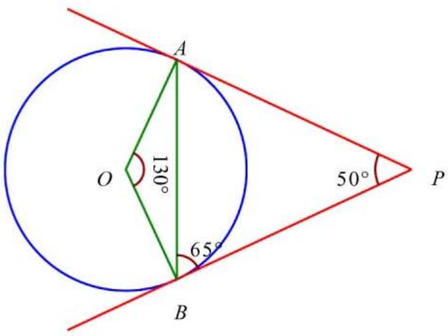


ഈ ചിത്രത്തിൽ, AB എന്ന ഞാണും കൂടി വരച്ചു നോക്കൂ:



ഈ ഞാണും, തൊടുവരയും തമ്മിലുള്ള കോൺ എത്രയാണ്?

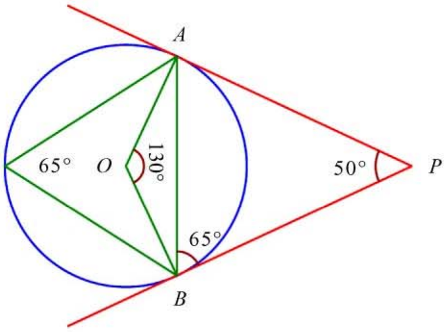
OAB എന്ന സമപാർശ്വത്രികോണത്തിലെ ചെറിയ കോണുകൾ രണ്ടും 25° വീതം.



അപ്പോൾ ABP എന്ന കോൺ $90° - 25° = 65°$.

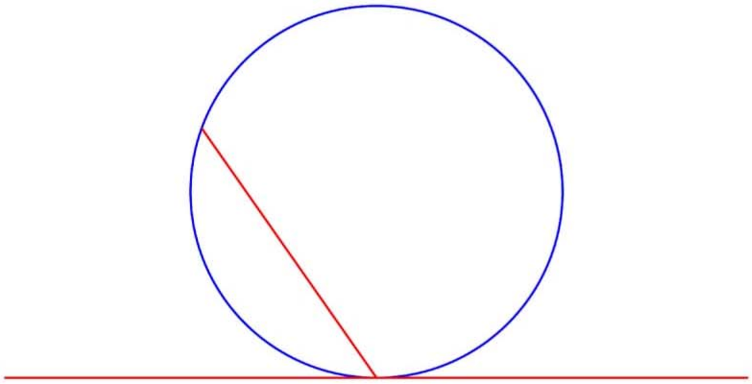
അതായത്, $130°$ യുടെ പകുതി ഇത്, AB എന്ന ഞാൺ മുറിക്കുന്ന വലിയ വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണാണല്ലോ;

ചിത്രം നോക്കൂ.

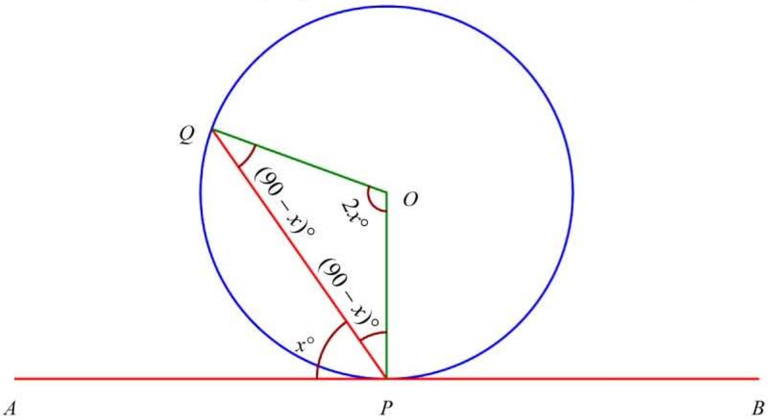


ഇത് എല്ലാ ഞാണുകൾക്കും തൊടുവരകൾക്കും ശരിയാണോ?

ഒരു ഞാണും, അതിന്റെ ഒരറ്റത്തൊരു തൊടുവരയും മാത്രം വരച്ചുനോക്കാം:



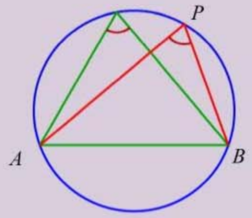
ഞാണും തൊടുവരയും തമ്മിലുള്ള ഒരു കോൺ $x°$ എന്നെടുത്താൽ, ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്, ചെറിയ ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ $2x°$ എന്നു കാണാം. (വിശദീകരിക്കാമോ?)



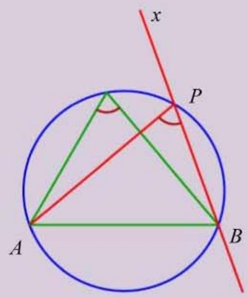
അപ്പോൾ PQ എന്ന ഞാൺ വൃത്തത്തിലെ വലിയ വൃത്തഖണ്ഡത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന കോണും $x°$ തന്നെയാണല്ലോ.

മാറാത്ത കോൺ

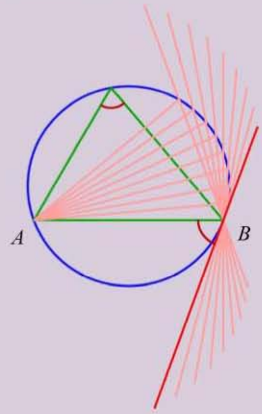
ഒരേ വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണുകൾ തുല്യമാണെന്നു കണ്ടല്ലോ:



PB അൽപം നീട്ടി വരയ്ക്കാം:



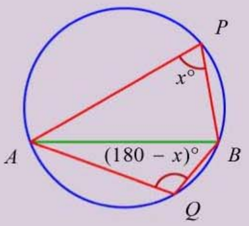
ഇനി P വൃത്തത്തിലൂടെ നീങ്ങി, B യിലെത്തിയാലോ?



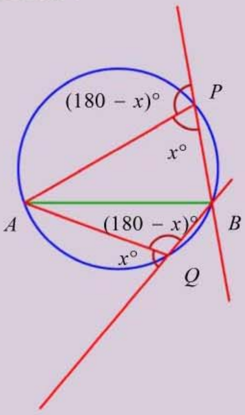
എന്ന വര B യിലെ തൊടുവരയാകും; കോണൊട്ടു മാറുന്നുമില്ല.

മറിയുന്ന കോണുകൾ

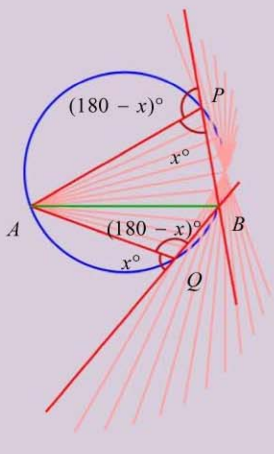
മറുഖണ്ഡത്തിലെ കോണുകൾ അനുപൂരകമാണല്ലോ:



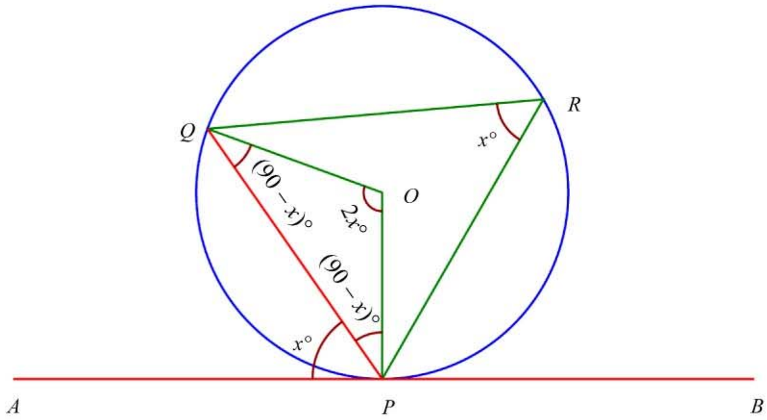
നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ വരകൾ നീട്ടിവരയ്ക്കാം



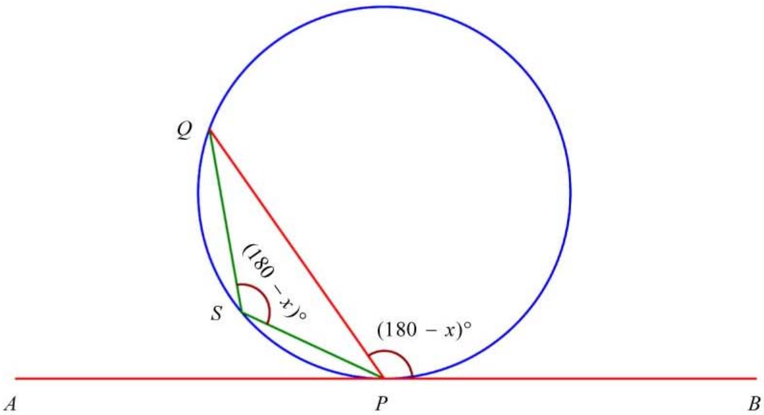
P വൃത്തത്തിലൂടെ Q വിലേക്കു നീങ്ങിയാലോ?



AP യുടെ താഴെ x° യും, മുകളിൽ $(180 - x)^\circ$ ഉം ആണ്. ചലനത്തിലുടനീളം അങ്ങനെതന്നെയല്ലേ?



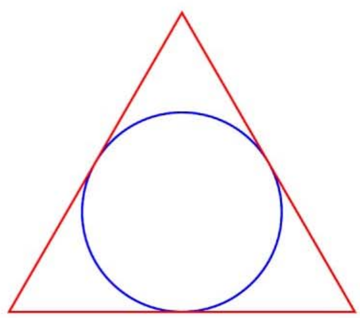
മാത്രവുമല്ല, തൊടുവരയും, ഞാണുമായുള്ള വലിയ കോണും, ഞാൺ ഉണ്ടാക്കുന്ന ചെറിയ വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണും $(180 - x)^\circ$ ആണെന്നും കാണാം:



ഇപ്പോൾ കണ്ടതും ഒരു സാമാന്യതത്വമായി എഴുതാം:

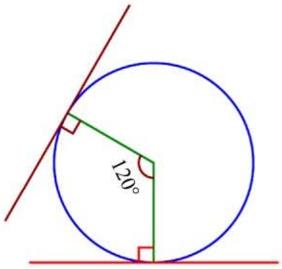
വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു ഞാണും അതിന്റെ ഒരറ്റത്തുകൂടിയുള്ള തൊടുവരയും തമ്മിലുള്ള ഓരോ കോണും, ആ ഞാണിന്റെ മറുവശത്തുള്ള വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണിനു തുല്യമാണ്.

തൊടുവരകൾ തമ്മിലുള്ള കോണിനെക്കുറിച്ച് ഇപ്പോൾ കണ്ടതുപയോഗിച്ച്, നമ്മുടെ ആദ്യത്തെ പ്രശ്നം, വൃത്തത്തെ പൊതിയുന്ന സമഭുജത്രികോണം, പരിഹരിക്കാം.



ഇവിടെ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ വൃത്തത്തിന്റെ തൊടുവരക ളാണല്ലോ. അവ തമ്മിലുള്ള കോൺ എത്രയാണ്? അപ്പോൾ അവ യുടെയിടയിലുള്ള ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണോ?

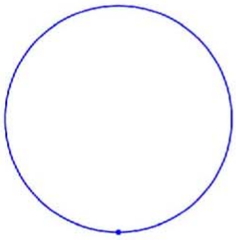
ഇനി വരയ്ക്കാമല്ലോ:



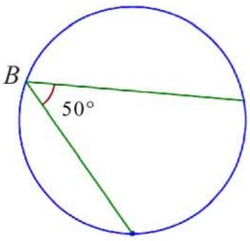
ഇതുപോലെ വൃത്തത്തിനെ തൊടുന്ന സമഭുജത്രികോണമല്ലാതെ ഏതു കോണുകളുള്ള ത്രികോണവും വരച്ചുകൂടേ? ശ്രമിച്ചു നോക്കൂ.

ഇങ്ങനെ ത്രികോണം വരയ്ക്കാൻ, വൃത്തകേന്ദ്രം ഉപയോഗിച്ചല്ലോ. കേന്ദ്രം ഉപയോഗിക്കാതെ (കേന്ദ്രമേതെന്ന് അറിയില്ലാത്ത വൃത്ത മാണെന്നു കരുതിക്കോളൂ) ഇത്തരമൊരു ത്രികോണം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമോ?

ആദ്യം കേന്ദ്രം ഉപയോഗിച്ച് തൊടുവര വരയ്ക്കുന്നതെ ങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം.

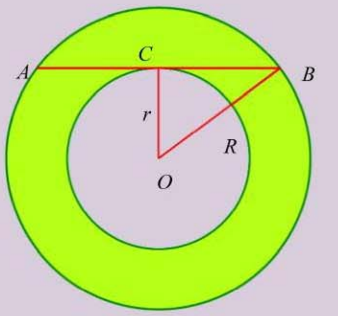


ചിത്രത്തിലെ വൃത്തത്തിൽ, A യിൽ കൂടിയുള്ള തൊടുവര വരയ് ക്കണം. ചുവടെ കാണുന്നതുപോലെ രണ്ട് വരകൾ വരയ്ക്കുക.



ഇനി AC യോജിപ്പിച്ച്, A യിൽ കൂടി AC യുമായി $50°$ കോൺ ഉണ്ടാക്കുന്ന PQ വരയ്ക്കുക.

പരപ്പളവ് പ്രശ്നം – ഉത്തരം

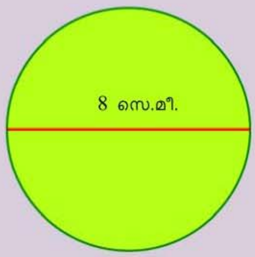


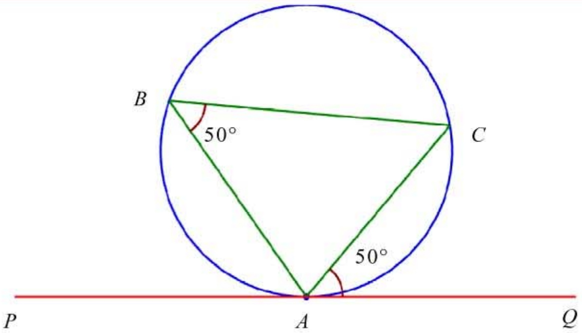
ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം r എന്നും, വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം R എന്നു മെടുത്താൽ, പച്ച ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പ ളവ് $(R^2 - r^2)$ ആണല്ലോ.

ചിത്രത്തിൽ AB ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ തൊടുവരയായതിനാൽ, അത് OC യ്ക്ക് ലംബമാണ്; AB വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ഞാണും ആയതിനാൽ, ഇതിൽനിന്ന് $AC = BC$ എന്നും കിട്ടും (എങ്ങനെ?). അപ്പോൾ OCB എന്ന മട്ടത്രികോണ ത്തിൽ നിന്ന് $R^2 - r^2 = 4^2 = 16$ എന്നു കാണാം.

അങ്ങനെ, പച്ച ഭാഗത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, 16 ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്റർ എന്നു കിട്ടും.

ഇത് AB വ്യാസമായ വൃത്തത്തിന്റെ പരപ്പളവാണെന്നത് മറ്റൊരു രസം.



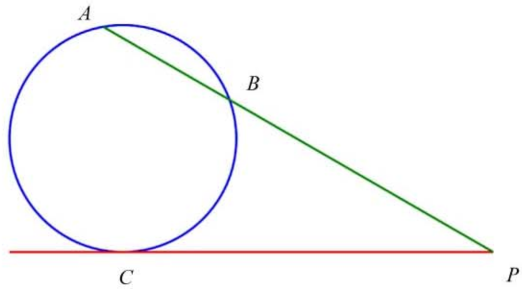


ഇത് A യിലെ തൊടുവരയല്ലേ? കാരണം?

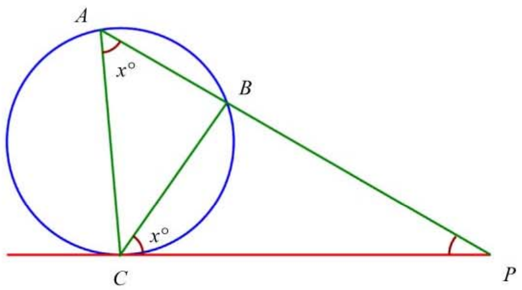
ഇതിൽ 50° യ്ക്കു പകരം ഏതു കോണെടുത്താലും ശരിയാകുമോ?

ഞാൺ തൊടുവരയുമായുണ്ടാക്കുന്ന കോണിനെക്കുറിച്ചുള്ള അറിവുപയോഗിച്ച്, മറ്റൊരു സാമാന്യതത്വമുണ്ടാക്കാം.

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



AC, BC യോജിപ്പിക്കുക $\angle BCP$ x° എന്നെടുത്താൽ, $\angle BAC$ x° എന്നും കാണാമല്ലോ.



അതായത്, ΔAPC യിൽ A യിലെ കോണും ΔBPC യിൽ C യിലെ കോണും തുല്യമാണ്. ഈ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിലും P യിൽ ഒരേ കോണാണ്. അപ്പോൾ ഇവയുടെ മൂന്നാമത്തെ കോണുകൾ തുല്യമാണ്; അതിനാൽ തുല്യ കോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ ജോടികൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധവും തുല്യമാണ്. യുക്തമായ രണ്ടു ജോടി വശങ്ങളെടുത്താൽ

$$\frac{PA}{PC}=\frac{PC}{PB}$$

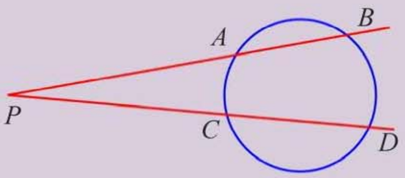
ഇതിനെ

$$PA \times PB = PC^2$$

എന്നെഴുതാം.

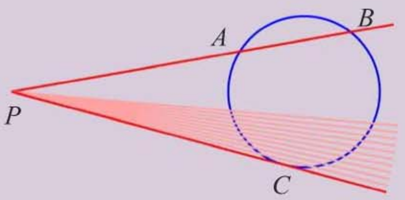
മാറാത്ത ബന്ധം

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



ഇതിൽ $AP \times PB = CP \times PD$ എന്നറിയാമല്ലോ.

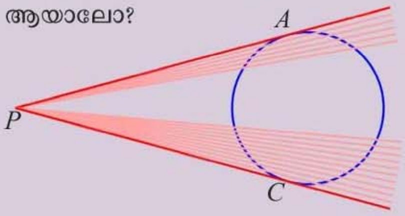
താഴത്തെ വര, കറങ്ങി തൊടുവരയായാലോ?



PD എന്നത് PC തന്നെയാകും; നേരത്തെ കണ്ട ബന്ധം

$AP \times PB = CP^2$ എന്നാകും.

മുകളിലത്തെ വരയും തൊടുവര ആയാലോ?

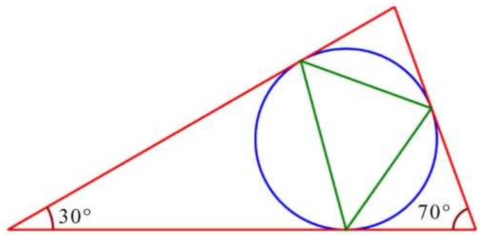


ഈ ബന്ധം $PA^2 = PC^2$ അഥവാ $PA = PC$ എന്നാകും.

ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്നുള്ള തൊടുവരകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണെന്ന് നേരത്തെ കണ്ടല്ലോ.

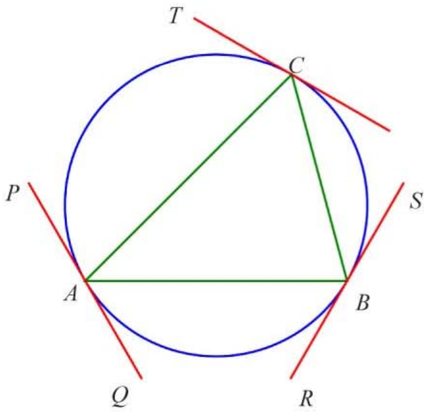
ഇനി ഈ കണക്കുകൾ സ്വയം ചെയ്തുനോക്കൂ:

- 3 സെന്റിമീറ്റർ ആരത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ഒരു കോൺ 40° ആയ ഒരു സമഭുജസാമാന്തരികം, വശങ്ങളെല്ലാം ഈ വൃത്തത്തെ തൊടുന്ന രീതിയിൽ വരയ്ക്കുക.
- 4 സെന്റിമീറ്റർ ആരത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരച്ച്, വശങ്ങളെല്ലാം അതിനെ തൊടുന്ന ഒരു സമപഞ്ചഭുജം വരയ്ക്കുക.
- ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഏതു രണ്ടു തൊടുവരകളും, തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന ഞാണുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകൾ തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.
- ചിത്രത്തിലെ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളെല്ലാം വൃത്തത്തിലാണ്; വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം ഈ ബിന്ദുക്കളിൽ വൃത്തത്തെ തൊടുന്നു.



ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ മൂന്നും കണ്ടുപിടിക്കുക.

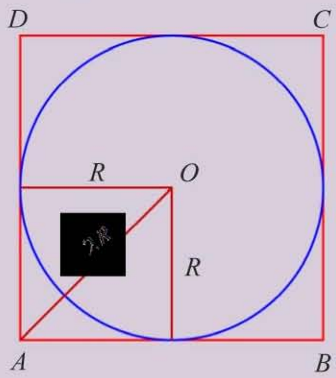
- ചിത്രത്തിൽ വൃത്തത്തിലെ A, B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലെ തൊടുവരകളാണ് PQ, RS, T എന്നിവ.



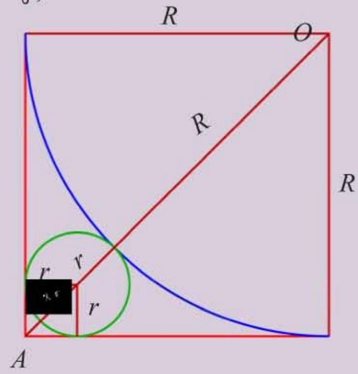
ഇതിൽ ഒരേ അളവുള്ള എത്ര ജോടി കോണുകളുണ്ട്?

മൂലപ്രശ്നം – ഉത്തരം

വലിയ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം R എന്നെടുക്കാം. അതിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന്, സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളിലേക്കു ലംബം വരച്ചാൽ ചുവടെക്കാണുന്ന ചിത്രം കിട്ടും:



ഇനി ചെറിയ വൃത്തത്തിനും ഇതുപോലെ വരയ്ക്കാം; അതിന്റെ ആരം r എന്നെടുക്കാം. (കാര്യങ്ങൾ വ്യക്തമാകാൻ, ചിത്രത്തിന്റെ ഒരു ഭാഗം മാത്രം വലുതാക്കി കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.)



രണ്ടു ചിത്രത്തിൽ നിന്നും OA യുടെ നീളം കണക്കാക്കിയാൽ,

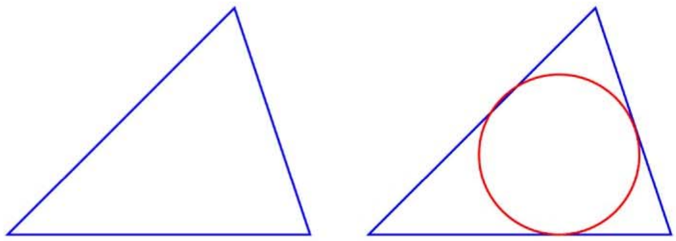
$$\sqrt{2}R = \sqrt{2}r + r + R$$

എന്നു കാണാം. ഇതിൽ നിന്ന്

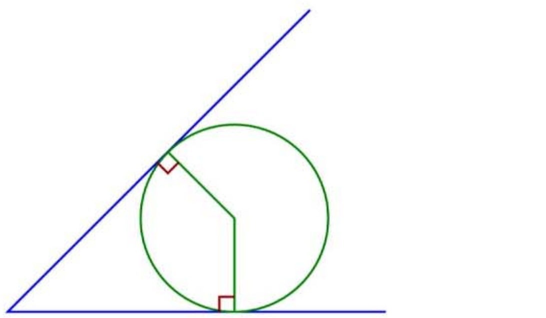
$$\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

ഉള്ളിലെ വൃത്തങ്ങൾ

ഒരു വൃത്തത്തിനെ തൊടുന്ന ത്രികോണം വരയ്ക്കുന്നതു കണ്ടല്ലോ. ഇനി ഒരു ത്രികോണത്തിനുള്ളിൽ, അതിന്റെ വശങ്ങളെയെല്ലാം തൊട്ടുകൊണ്ട് വൃത്തം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം.

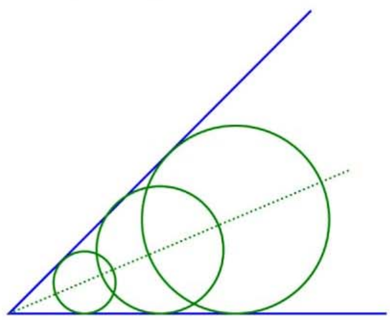


വൃത്തം ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു വശങ്ങളേയും തൊടണം. ഒരു വശത്തെ തൊടുന്ന ഒരുപാടു വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കാം അല്ലേ? രണ്ടു വശങ്ങളെ തൊടുന്നതോ?



ചിത്രത്തിലെ വൃത്തത്തിന്റെ ആരങ്ങൾ ഈ വശങ്ങൾക്കു ലംബമാണ്. അതായത്, വൃത്തകേന്ദ്രം ഈ രണ്ടു വശങ്ങളിൽ നിന്ന് ഒരേ അകലത്തിലായിരിക്കണം. അപ്പോൾ അത് ഇവയുടെ ഇടയിലുള്ള കോണിന്റെ സമഭാജിയിലാകണമല്ലോ. (എട്ടാം ക്ലാസിലെ **സർവസമത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **സമദൂരസമഭാജി** എന്ന ഭാഗം)

കോണിന്റെ സമഭാജിയിൽ എവിടെ കേന്ദ്രം എടുത്താലും, രണ്ടു വശങ്ങളേയും തൊടുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ കഴിയും:



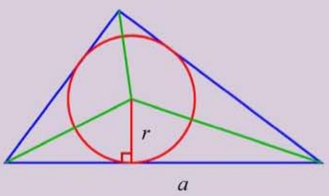
നമുക്കാവശ്യമായ വൃത്തം, മൂന്നാമത്തെ വശത്തേയും തൊടണമല്ലോ. അതിനെന്തു ചെയ്യും?

അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരം

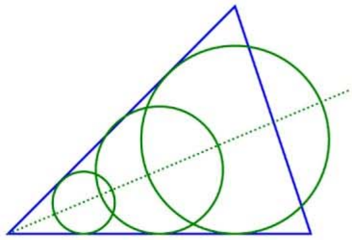
ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു വശങ്ങളുടേയും നീളം അറിയാമെങ്കിൽ, അതിന്റെ അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരം കണ്ടുപിടിക്കാം.

അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം, ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ മൂന്നു ത്രികോണങ്ങൾ കിട്ടും. ഇവയുടെ പരപ്പളവുകളുടെ തുകയാണ്, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്.

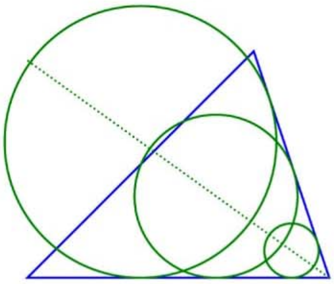
ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



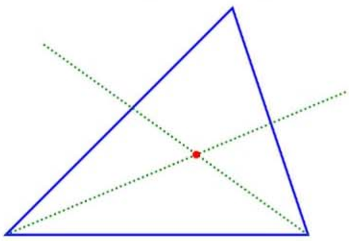
അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരം r എന്നും, ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തിന്റെ നീളം a എന്നുമെടുത്താൽ, താഴത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\frac{1}{2}ar$ ആണല്ലോ. ഇതുപോലെ ത്രികോണത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം , എന്നെടുത്താൽ, മറ്റു രണ്ടു ചെറുത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവുകൾ $\frac{1}{2}\ r$, $\frac{1}{2}\ r$ എന്നു കാണുമല്ലോ. അപ്പോൾ വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $\frac{1}{2}(a+\ \ +\ \ )r$ എന്നു കിട്ടും. അതായത്, ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവിനെ, ചുറ്റളവിന്റെ പകുതി കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരം കിട്ടും.



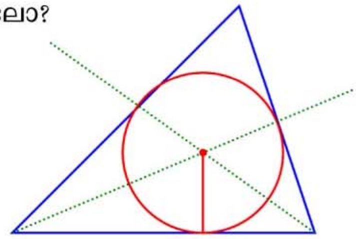
താഴത്തേയും വലത്തേയും വശങ്ങൾക്കിടയിലെ കോണിന്റെ സമഭാജിയിലെ ഏതു ബിന്ദു എടുത്താലും, ആ രണ്ടു വശങ്ങളെ തൊടുന്ന വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കാമല്ലോ.



അപ്പോൾ ഈ രണ്ടു സമഭാജികളിലുമുള്ള ബിന്ദു, എടുത്താലോ? അതായത്, അവ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദു.



ഈ ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് മൂന്നു വശങ്ങളിലേക്കുമുള്ള ലംബങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമല്ലേ? ഈ നീളം ആരമായി, ഈ ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി വൃത്തം വരച്ചാലോ?

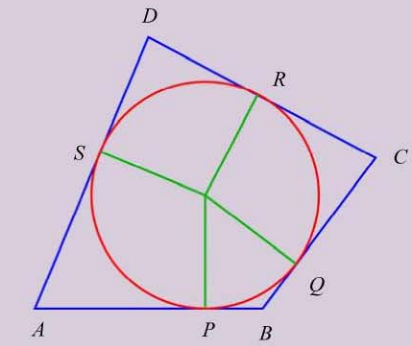


ഈ വൃത്തത്തിന് ത്രികോണത്തിന്റെ അന്തർവൃത്തം (*n r e*) എന്നാണു പേര്.

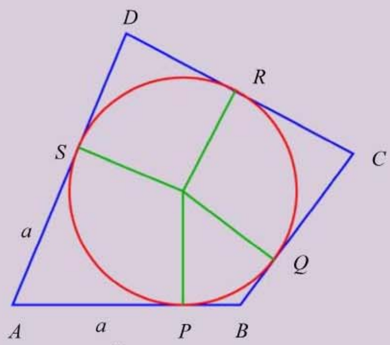
ഇവിടെ മറ്റൊരു കാര്യം കൂടി കാണാം. അന്തർവൃത്തം, ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതും വലതുമുള്ള വശങ്ങളെ സ്പർശിക്കുന്നതിനാൽ, ആ വശങ്ങളിൽ നിന്നും അതിന്റെ കേന്ദ്രത്തിലേക്കുള്ള ലംബങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമാണ്; അതായത്, വൃത്തകേന്ദ്രം, ഈ വശങ്ങൾ ചേരുന്ന കോണിന്റേയും സമഭാജിയിലാണ്.

ചതുർഭുജവും വൃത്തവും

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



$ABCD$ എന്ന ചതുർഭുജത്തിന് അന്തർവൃത്തമുണ്ട്. അതിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് വരച്ച ലംബങ്ങളുടെ ചുവടുകളാണ് P, Q, R, S. തൊടുവരകൾ തമ്മിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നത്, തൊടുന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്ന് തുല്യ അകലത്തിലാണ് എന്നതുപയോഗിച്ചാൽ, ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ നീളങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്താമല്ലോ.



ഇതിൽ നിന്ന്

$$AB + CD = a + \quad + \quad + \quad = AD + BC$$

എന്നു കാണാം. അതായത്, ഒരു ചതുർഭുജത്തിന് അന്തർവൃത്തമുണ്ടെങ്കിൽ, എതിർവശങ്ങളുടെ തുക തുല്യമാണ്.

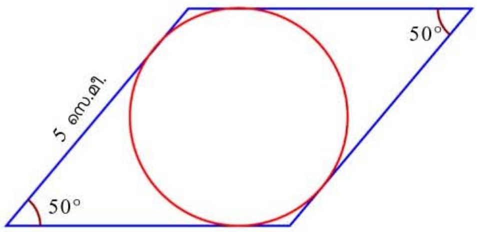
മറിച്ച്, എതിർവശങ്ങളുടെ തുക തുല്യമായ ഏതു ചതുർഭുജത്തിനും അന്തർവൃത്തം വരയ്ക്കാം എന്നും തെളിയിക്കാം (ശ്രമിച്ചുനോക്കൂ)

ഇത് ഏതു ത്രികോണത്തിനും ശരിയാണല്ലോ.

ഏതു ത്രികോണത്തിലും, മൂന്നു കോണുകളുടെ സമഭാജികൾ ഒരേ ബിന്ദുവിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു.

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്യാമല്ലോ:

- വശങ്ങളുടെ നീളം 4, 5, 6 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ത്രികോണം വരച്ച്, അതിന്റെ അന്തർവൃത്തം വരയ്ക്കുക.
- 6 സെന്റിമീറ്റർ വശമുള്ള സമഭുജത്രികോണം വരച്ച് അതിന്റെ അന്തർവൃത്തവും, പരിവൃത്തവും വരയ്ക്കുക.
- ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും, അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും ഒരേ ബിന്ദുവാണെന്നു തെളിയിക്കുക. പരിവൃത്തത്തിന്റെ ആരവും, അന്തർവൃത്തത്തിന്റെ ആരവും തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എത്രയാണ്?
- ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്റർ ആയ സമചതുരം വരച്ച്, അതിന്റെ പരിവൃത്തവും, അന്തർവൃത്തവും വരയ്ക്കുക.
- ചുവടെക്കാണുന്ന ചിത്രം, പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന അളവുകളിൽ വരയ്ക്കുക.

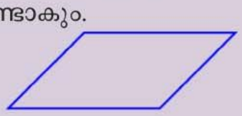


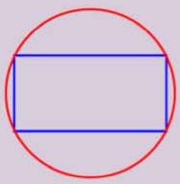
പ്രോജക്ട്

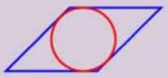
- $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ തുടങ്ങിയ അഭിന്നകനീളമുള്ള വരകൾ നിർമിക്കുന്ന വിവിധ രീതികൾ ചുവടെപ്പറയുന്ന ആശയങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടെത്തുക.
    - പൈഥഗോറസ് സിദ്ധാന്തം
    - വൃത്തത്തിന്റെ ഞാണുകളെ സംബന്ധിക്കുന്ന തത്വങ്ങൾ.
    - തൊടുവരകളെ സംബന്ധിക്കുന്ന തത്വങ്ങൾ.

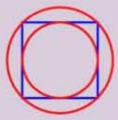
പരിവൃത്തവും അന്തർവൃത്തവും

ഏതു ത്രികോണത്തിനും പരിവൃത്തവും അന്തർവൃത്തവും വരയ്ക്കാം. എന്നാൽ ചതുർഭുജങ്ങളെടുത്താൽ, ചിലതിന് രണ്ടുമുണ്ടാകില്ല, ചിലതിന് ഏതെങ്കിലും ഒന്നുമാത്രം, ചിലതിന് രണ്ടുമുണ്ടാകും.

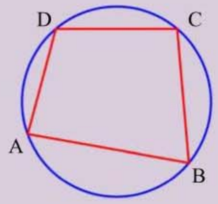






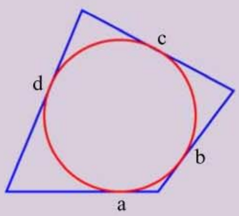


പരിവൃത്തം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുന്ന ചതുർഭുജങ്ങളിലെല്ലാം എതിർകോണുകളുടെ തുക 180° ആണെന്നു കണ്ടല്ലോ. മറ്റൊരു വിധത്തിൽപ്പറഞ്ഞാൽ രണ്ടു ജോടി എതിർകോണുകളുടെയും തുക തുല്യമാണ്.



$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$

അന്തർവൃത്തം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുന്ന ചതുർഭുജങ്ങളിലോ? രണ്ടുജോടി എതിർവശങ്ങളുടെയും തുക തുല്യമാണ്.



$a +$ $=$ $+$

9 ബഹുപദങ്ങൾ

പുതിയ സമവാക്യങ്ങൾ

7 എന്ന എണ്ണൽസംഖ്യ, 315 എന്ന എണ്ണൽസംഖ്യയുടെ ഘടക മാണോ?

ഹരിച്ചുനോക്കണം, അല്ലേ?

$$315 \div 7 = 45$$

അപ്പോൾ 7 എന്ന സംഖ്യ 315 ന്റെ ഘടകമാണ്.

മുകളിലെ ഹരണത്തിൽ നിന്ന് $315 = 45 \times 7$ എന്നെഴുതാം.

316 ആയാലോ?

7 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 1 ശിഷ്ടം വരുമല്ലോ; അപ്പോൾ ഘടകമല്ല.

$316 = 45 \times 7 + 1$ എന്നെഴുതാം.

ഇതുപോലെ $x^2 - 1$ എന്ന ബഹുപദത്തിനെ $x - 1$ എന്ന ബഹു പദം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാലോ?

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

ആയതിനാൽ $x^2 - 1$ നെ $x - 1$ കൊണ്ട് ശിഷ്ടമില്ലാതെ ഹരിക്കാം. മറ്റൊരു രീതിയിൽ

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

എന്നും എഴുതാം.

അപ്പോൾ $x - 1$ എന്ന ബഹുപദം $x^2 - 1$ ന്റെ ഘടകം (*factor*) ആണെന്നു പറയാം.

ഇതുപോലെ $x + 1$ ഉം $x^2 - 1$ ന്റെ ഘടകം തന്നെ.

$x - 1$ എന്ന ബഹുപദം, $x^2 + 1$ ന്റെ ഘടകമാണോ?

$x^2 + 1$ എന്ന ബഹുപദത്തെ $x - 1$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാലോ?

$x^2 + 1 = (x - 1)(x + 1) + 2$ ആണല്ലോ. അപ്പോൾ $x^2 + 1$ നെ $(x - 1)$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം 2.

അതുകൊണ്ടു തന്നെ $x - 1$ എന്ന ബഹുപദം, $x^2 + 1$ എന്ന ബഹു പദത്തിന്റെ ഘടകമല്ല.

ഘടകമെന്നാൽ

എണ്ണൽ സംഖ്യകളിൽ കണ്ട ഘടകം എന്ന ആശയം, എല്ലാ പൂർണസംഖ്യ കളിലേക്കുമായി വ്യാപിപ്പിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, $-12 = 3 \times (-4)$ ആയതിനാൽ, -4 എന്ന സംഖ്യ -12 ന്റെ ഘടകമാണെന്നു പറയാം.

ഭിന്നകസംഖ്യകളായാലോ? പൂജ്യമല്ലാത്ത ഏതു രണ്ടു ഭിന്നകസംഖ്യകളെടുത്താലും, യുക്തമായ ഒരു ഭിന്നകസംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ച്, ഒന്നിനെ മറ്റൊന്നാക്കാം. ഉദാഹരണമായി, $\frac{2}{3}, \frac{5}{7}$ എന്ന രണ്ടു സംഖ്യകളെടുത്താൽ $\frac{2}{3} = \frac{14}{15} \times \frac{5}{7}$ എന്നെഴുതാമല്ലോ. (ഒരു സംഖ്യ പൂജ്യമായാലോ?)

അതായത് ഭിന്നകസംഖ്യകൾ മൊത്തത്തിൽ എടുത്താൽ ഘടകം എന്ന ആശയത്തിന് പ്രസക്തി ഇല്ല.

ഇതുപോലെ, ബഹുപദങ്ങളുടെ കാര്യത്തിലും, ഘടകം എന്നു പറയുന്നത്, ബഹുപദങ്ങളുടെ കൂട്ടത്തെ മാത്രം അടിസ്ഥാനമാക്കിയാണ്; എല്ലാ ബീജഗണിത വാചകങ്ങളുടേയും അടിസ്ഥാനത്തിലല്ല.

$$x^2 + 1 = (x - 1)\left(x + 1 + \frac{2}{x - 1}\right)$$

എന്നെഴുതാമെന്നതുകൊണ്ട്, $x - 1$ എന്ന ബഹുപദം, $x^2 + 1$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണ് എന്നു പറയില്ല.

ഇനി $x - 1$ എന്ന ബഹുപദം $x^3 - 1$ ന്റെ ഘടകമാണോ എന്നെങ്ങനെ പരിശോധിക്കും?

ശിഷ്ടം വരുമോ എന്നു ഹരിച്ചുനോക്കണം. ഹരിക്കുന്നത് $x - 1$ എന്ന ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദം കൊണ്ടായതിനാൽ, ശിഷ്ടം ഒരു സംഖ്യ മാത്രമായിരിക്കും. ഹരണഫലമോ?

അപ്പോൾ, ഒമ്പതാംക്ലാസിൽ ചെയ്തതുപോലെ

$$x^3 - 1 = (x - 1)(ax^2 + bx + c) + d$$

എന്നെഴുതി, a, b, c, d ഇവ കണ്ടുപിടിക്കാം.

മുകളിലെഴുതിയ സമവാക്യത്തിന്റെ വലതുവശത്തുള്ള ഗുണനക്രിയ എങ്ങനെ ചെയ്യും? ആദ്യത്തെ ബഹുപദത്തിലെ പദങ്ങളോരോന്നുകൊണ്ടും, രണ്ടാമത്തെ ബഹുപദത്തിലെ പദങ്ങളോരോന്നിനേയും ഗുണിച്ച്, കൂട്ടിയാൽ മതിയല്ലോ. അപ്പോൾ,

$$x^3 - 1 = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x + (d - c)$$

ഇതു ശരിയാകാൻ,

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b - a &= 0 \\ c - b &= 0 \\ d - c &= -1 \end{aligned}$$

എന്നെടുത്താൽ മതി. അതായത്,

$$a = 1$$

$$b = 1$$

$$c = 1$$

$$d = 0$$

ഇതിൽ നിന്ന്

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

എന്നു കിട്ടും.

ശിഷ്ടമൊന്നും ഇല്ലാത്തതിനാൽ, $x - 1$ എന്ന ബഹുപദം, $x^3 - 1$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകം തന്നെയാണെന്നു കാണാം.

അപ്പോഴൊരു ചോദ്യം: $2x - 2$ എന്ന ബഹുപദം $x^3 - 1$ ന്റെ ഘടകമാണോ?

$$2x - 2 = 2(x - 1)$$

എന്നെഴുതാമല്ലോ. അതായത്

$$x - 1 = \frac{1}{2}(2x - 2)$$

അപ്പോൾ $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ എന്നതിനെ

ബഹുപദങ്ങളും സംഖ്യകളും

ബഹുപദങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള സാമാന്യ തത്വങ്ങൾ പറയുമ്പോൾ പലപ്പോഴും സംഖ്യകളേയും ഉൾപ്പെടുത്തേണ്ടി വരും. ഉദാഹരണമായി, രണ്ടു ബഹുപദങ്ങളുടെ തുക, ഒരു സംഖ്യയാകാം;

$$(x^2 + x + 1) + (-x^2 - x + 1) = 2$$

അതുപോലെ, ഒരു ബഹുപദത്തെ മറ്റൊരു ബഹുപദംകൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ ഹരണഫലം സംഖ്യയാകാം.

$$\frac{2x + 4}{x + 2} = 2$$

“ബഹുപദമോ, സംഖ്യയോ” എന്നെപ്പോഴും പറയുന്നതിലെ അസൗകര്യം ഒഴിവാക്കാൻ, സംഖ്യകളേയും ബഹുപദങ്ങളായി എടുക്കാറുണ്ട്. ($2 = 2x^0$ എന്നെഴുതാമല്ലോ.) പൂജ്യമൊഴിച്ചുള്ള സംഖ്യകളെയെല്ലാം, പൂജ്യം കൃതി ബഹുപദങ്ങൾ എന്നാണ് പറയുന്നത്.

0 എന്ന സംഖ്യയെ കൃതിയില്ലാത്ത ബഹുപദമായാണ് എടുക്കുന്നത്. ഏതു ബഹുപദത്തേയും 0 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത്, 0 തന്നെയാണല്ലോ. അപ്പോൾ 0 എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ കൃത്യങ്കം ഏതു സംഖ്യയായെടുത്താലും, “ഗുണനഫലത്തിന്റെ കൃത്യങ്കം, ഘടകങ്ങളുടെ കൃത്യങ്കങ്ങളുടെ തുകയാണ്” എന്ന സാമാന്യ തത്വം ഈ ഗുണനത്തിന് ശരിയാകില്ല.

$$x^3 - 1 = \frac{1}{2}(2x - 2)(x^2 + x + 1)$$

$$= (2x - 2)\frac{1}{2}(x^2 + x + 1)$$

$$= (2x - 2)\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)$$

എന്നെഴുതാം. ഇതിൽ നിന്ന് എന്തുപറയാം?

$2x - 2$ എന്ന ബഹുപദവും $x^3 - 1$ ന്റെ ഘടകം തന്നെ.

$3x - 3$ ആയാലോ?

$\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$ നെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം?

$1 - x$ ന്റെ കാര്യമോ?

ഇനി ചുവടെയുള്ള ഓരോ ജോടി ബഹുപദങ്ങളിലും, ആദ്യത്തേത് രണ്ടാമത്തേതിന്റെ ഘടകമാണോ എന്നു കണ്ടുപിടിക്കൂ:

- $x + 1, x^3 - 1$
- $x - 1, x^3 + 1$
- $x + 1, x^3 + 1$
- $x^2 - 1, x^4 - 1$
- $x - 1, x^4 - 1$
- $x + 1, x^4 - 1$
- $x - 2, x^2 - 5x + 1$
- $x + 2, x^2 + 5x + 6$
- $\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}, x^2 - 5x + 6$
- $1.3x - 2.6,\ x^2 - 5x + 6$

ഒന്നാംകൃതി ഘടകങ്ങൾ

$x - 2$ എന്ന ബഹുപദം, $4x^3 - 3x^2 + x - 1$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണോ എന്നെങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

ഹരിച്ച് നോക്കി ശിഷ്ടം പൂജ്യമാണോ എന്നു നോക്കാം. ഹരണ ഫലം രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദവും, ശിഷ്ടം ഒരു സംഖ്യയുമായതിനാൽ

$$4x^3 - 3x^2 + x - 1 = (x - 2)(ax^2 + bx + c) + d$$

ഇനി a, b, c, d ഇവ കണ്ടുപിടിക്കണം.

ഘടകമാണോ എന്നറിയാൻ ഇവയെല്ലാം കണ്ടുപിടിക്കണോ?

ബഹുപദഘടകങ്ങൾ

സംഖ്യകളേയും ബഹുപദങ്ങളുടെ കൂട്ടത്തിൽ പരിഗണിച്ചാൽ, പൂജ്യമല്ലാത്ത ഏതു സംഖ്യയും ഏതു ബഹുപദത്തിന്റേയും ഘടകമാണ്.

ഉദാഹരണമായി,

$$x^2 - 2x + 3 = 2\left(\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}\right)$$

$$2x^3 + 5x + 7 = \frac{1}{5}\left(10x^3 + 25x + 35\right)$$

എന്നെല്ലാം എഴുതാമല്ലോ.

മാത്രവുമല്ല, ഒരു ബഹുപദത്തിന്റെ ഏതു ഘടകത്തേയും സംഖ്യകൾകൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, അസംഖ്യം മറ്റു ഘടകങ്ങളുണ്ടാക്കാം. അതായത്, $p(x)$ എന്ന ബഹുപദം, $q(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണെങ്കിൽ, പൂജ്യമല്ലാത്ത ഏതു സംഖ്യ a എടുത്താലും, $ap(x)$ എന്ന ബഹുപദവും $q(x)$ ന്റെ ഘടകം തന്നെ.

ശിഷ്ടം മാത്രം കണ്ടുപിടിച്ചാൽ പോരേ?

മുകളിലെഴുതിയ സമവാക്യത്തിന്റെ വലതുഭാഗത്തു നിന്ന് d മാത്രമായി കിട്ടാൻ എന്താണൊരു വഴി? ബാക്കിയുള്ളത് പൂജ്യമാക്കിയാൽ മതി. x ഏതു സംഖ്യയായെടുത്താലും ഈ സമവാക്യം ശരിയാണ് എന്നും അറിയാം.

ഉദാഹരണമായി $x = 1$ എന്നെടുത്താൽ

$$(4 \times 1^3) - (3 \times 1^2) + 1 - 1 = (1 - 2)(a \times 1^2 + b \times 1 + c) + d$$

ഇതു തിരിച്ച് വായിച്ചാൽ

$$-(a + b + c) + d = 1$$

എന്നു കാണാം.

$x = 2$ എന്നെടുത്താലോ?

$$(4 \times 2^3) - (3 \times 2^2) + 2 - 1 = (2 - 2)((a \times 2^2) + (b \times 2) + c) + d$$

അഥവാ, $0 \times (4a + 2b + c) + d = 21$

അതായത്, $d = 21$

എന്താണിതിന് അർത്ഥം? $4x^3 - 3x^2 + x - 1$ എന്ന ബഹുപദത്തിനെ $x - 2$ കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം 21. അപ്പോൾ $x - 2$ എന്നത് $4x^3 - 3x^2 + x - 1$ ന്റെ ഘടകമല്ല.

ഇതുപോലെ $x - 3$ എന്ന ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദം $2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണോ എന്നു പരിശോധിച്ചു നോക്കാം.

ഹരണഫലത്തിന്റെ ആവശ്യം ഇല്ലാത്തതിനാൽ അതിനെ $q(x)$ എന്നുമാത്രം ചുരുക്കി എഴുതാം. ശിഷ്ടമായി വരുന്ന സംഖ്യയെ r എന്നുമെഴുതാം. അപ്പോൾ

$$2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = (x - 3)\, q(x) + r$$

ഇനി r പൂജ്യമാണോ എന്നു മാത്രം നോക്കിയാൽ മതി. r ന്റെ വില കാണുന്നതിന് $x = 3$ എന്ന് എടുത്താൽ പോരേ? അപ്പോൾ,

$$(2 \times 3^3) - (5 \times 3^2) - (4 \times 3) + 3 = (3 - 3)\, q(3) + r$$

എന്നു കിട്ടും. അതായത്,

$$54 - 45 - 12 + 3 = 0 \times q(3) + r$$

ഇതിൽ നിന്ന്

$$r = 0$$

എന്നു കാണാമല്ലോ.

എന്താണിതിന്റെ അർത്ഥം?

ആശയവും അർത്ഥവും

പലതരം അളവുകളെ സൂചിപ്പിക്കാനാണ് എണ്ണൽ സംഖ്യകളും ഭിന്നകസംഖ്യകളും അഭിന്നകസംഖ്യകളും ഉണ്ടാക്കിയതെന്നു കണ്ടു; മാത്രമല്ല ഈ അളവുകൾ ഉപയോഗിക്കുന്ന ഭൗതിക സാഹചര്യങ്ങൾ തന്നെയാണ് ഈ സംഖ്യകളുടെ ക്രിയകൾക്ക് ആധാരമെന്നും കണ്ടിട്ടുണ്ട്.

14 മിഠായി, 3 പേർക്കു തുല്യമായി വീതിക്കാൻ ശ്രമിക്കുമ്പോൾ, മുഴുവനായി കൊടുക്കാൻ പറ്റാതെ 2 മിഠായി ശേഷിക്കുന്നതും, 14 മീറ്റർ നീളമുള്ള ചരട്, 3 മീറ്റർ നീളമുള്ള കഷണങ്ങളാക്കാൻ ശ്രമിക്കുമ്പോൾ, നീളം തികയാതെ 2 മീറ്ററിന്റെ ഒരു കഷണം ബാക്കി വരുന്നതുമൊക്കെയാണ്, 14 നെ 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽക്കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം 2 ആണ് എന്ന ഗണിത പ്രസ്താവനയാകുന്നത്.

ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കുമ്പോൾ,

-14 നെ -3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടമെന്താണ്?

എന്ന ചോദ്യത്തിനെന്താണർത്ഥം?

$2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണ് $x - 3$.

ഈ രീതിയെ ഒരു സാമാന്യ തത്വമായി എങ്ങനെ എഴുതാമെന്ന് നോക്കാം. $x - a$ എന്ന ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദം, $p(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണോ എന്നാണ് പരിശോധിക്കേണ്ടത്. അതിന് $p(x)$ നെ $x - a$ കൊണ്ടു ഹരിച്ചു കിട്ടുന്ന ഹരണഫലമായ ബഹുപദത്തെ $q(x)$ എന്നും ശിഷ്ടമായി കിട്ടുന്ന സംഖ്യയെ r എന്നും എഴുതാം. അപ്പോൾ,

$$p(x) = (x - a)q(x) + r$$

എന്ന സർവസമവാക്യം കിട്ടും. x ഏതു സംഖ്യയായെടുത്താലും ഇതു ശരിയാണ്. അപ്പോൾ $x = a$ എന്നെടുത്താൽ,

$$p(a) = (a - a)q(a) + r$$

$$p(a) = r$$

എന്നു കിട്ടും. അതായത്,

$p(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തെ, $x - a$ എന്ന ബഹുപദം കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം $p(a)$ ആണ്.

ഇനി $p(a) = 0$ ആയാലോ? $x - a$ കൊണ്ട് $p(x)$ നെ ഹരിച്ചപ്പോഴുള്ള ശിഷ്ടം പൂജ്യമാണ്; അതായത് $x - a$ എന്നത്, $p(x)$ ന്റെ ഘടകമാണ്. മറിച്ച് $p(a) \neq 0$ ആയാലോ? ശിഷ്ടം പൂജ്യമല്ലാത്തതിനാൽ $x - a$ എന്നത്, $p(x)$ ന്റെ ഘടകമല്ല.

$p(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ $x = a$ എന്നെടുക്കുമ്പോൾ $p(a) = 0$ ആണെങ്കിൽ, $x - a$ എന്ന ബഹുപദം $p(x)$ ന്റെ ഘടകമാണ്; $p(a) \neq 0$ ആണെങ്കിൽ $x - a$ എന്ന ബഹുപദം, $p(x)$ ന്റെ ഘടകമല്ല.

ഇതിൽ ആദ്യം പറഞ്ഞ തത്വത്തിന്, ശിഷ്ടസിദ്ധാന്തം (*Remainder Theorem*) എന്നും, രണ്ടാമതു പറഞ്ഞതിന്, ഘടകസിദ്ധാന്തം (*Factor Theorem*) എന്നുമാണ് പേര്.

ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കാം:

- $x - 2$ എന്ന ബഹുപദം, $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണോ?

  ഇതു പരിശോധിക്കാൻ $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$ ൽ $x = 2$ എന്നെടുത്താൽകിട്ടുന്നത് പൂജ്യമാണോ എന്നു നോക്കിയാൽ മതി, എന്നാണ് ഘടകസിദ്ധാന്തം പറയുന്നത്,

  $$2^4 - 2^3 - 2^2 - 2 - 2 = 16 - 8 - 4 - 2 - 2 = 0$$

  അപ്പോൾ $x - 2$ എന്ന ബഹുപദം $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണ്.

ശിഷ്ടമെന്നാൽ

ശിഷ്ടം എന്ന ആശയം, പൂർണസംഖ്യകൾക്കെല്ലാമായി വികസിപ്പിക്കാൻ, ആദ്യം എണ്ണൽ സംഖ്യകളിൽത്തന്നെ ഈ ആശയം ഗണിതപരമായി വ്യാഖ്യാനിക്കണം.

a എന്ന എണ്ണൽ സംഖ്യയെ b എന്ന എണ്ണൽസംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ, ഹരണഫലം q, ശിഷ്ടം r എന്നു പറയുന്നത്, ചുവടെപ്പറയുന്ന നിബന്ധനകൾ അനുസരിക്കുന്ന സംഖ്യകളെയാണ്:

1. $a = qb + r$ ആയിരിക്കണം
2. q, r ഇവ പൂജ്യമോ, എണ്ണൽസംഖ്യകളോ ആയിരിക്കണം
3. $r < b$ ആയിരിക്കണം

ഈ നിർവചനംതന്നെ അൽപം ഭേദഗതികളോടെ പൂർണസംഖ്യകളിലേക്ക് വ്യാപിപ്പിക്കാം:

a എന്ന പൂർണസംഖ്യയെ b എന്ന പൂർണസംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ, ഹരണഫലം q, ശിഷ്ടം r എന്നു പറയുന്നത്, ചുവടെപ്പറയുന്ന നിബന്ധനകൾ അനുസരിക്കുന്ന സംഖ്യകളെയാണ്:

1. $a = qb + r$ ആയിരിക്കണം
2. q, r ഇവ പൂർണസംഖ്യകളായിരിക്കണം
3. $r = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $0 < r < |b|$ ആയിരിക്കണം

ഉദാഹരണമായി, -14, -3 എന്നീ സംഖ്യകളെടുത്താൽ

1. $-14 = 5 \times (-3) + 1$ എന്നെഴുതാം.
2. 5, 1 പൂർണസംഖ്യകളാണ്
3. $0 < 1 < |-3|$ ആണ്.

അതിനാൽ, -14 നെ -3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ, ഹരണഫലം 5, ശിഷ്ടം 1 എന്നാണ് എടുക്കുന്നത്.

ബഹുപദഹരണം

സംഖ്യകളേയും ബഹുപദങ്ങളുടെ കൂട്ടത്തിൽ ഉൾപ്പെടുത്തിക്കഴിഞ്ഞാൽ, പൂർണസംഖ്യകളിലെ ഹരണഫലം, ശിഷ്ടം എന്നിവയുടെ നിർവചനം ഏതാണ്ട് അതുപോലെതന്നെ ബഹുപദങ്ങളിലേക്കും നീട്ടാം.

$a(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തിനെ $b(x)$ എന്ന ബഹുപദംകൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ, ഹരണഫലം $q(x)$, ശിഷ്ടം $r(x)$ എന്നു പറയുന്നത്, ചുവടെപ്പറയുന്ന നിബന്ധനകൾ അനുസരിക്കുന്ന ബഹുപദങ്ങളെയാണ്:

1. $a(x) = q(x)b(x) + r(x)$ ആയിരിക്കണം
2. $q(x)$, $r(x)$ ഇവ ബഹുപദങ്ങളായിരിക്കണം
3. ഒന്നുകിൽ $r(x) = 0$, അല്ലെങ്കിൽ $\deg r(x) < \deg b(x)$ ആയിരിക്കണം

ഇതിൽ deg കൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കുന്നത്, ബഹുപദത്തിന്റെ കൃത്യങ്കം (*degree*) ആണ്.

- $x + 3$ എന്ന ബഹുപദം, $2x^2 + 3x - 5$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണോ?

ഘടകസിദ്ധാന്തത്തിൽ $x - a$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള ഘടകങ്ങളെക്കുറിച്ചാണ് പറഞ്ഞിരിക്കുന്നത്. ഇവിടെ പരിശോധിക്കേണ്ടത് $x + 3$ ഉം.

$x + 3$ നെ ഈ രൂപത്തിലും എഴുതിക്കൂടേ?

$$x + 3 = x - (-3)$$

അപ്പോൾ, $2x^2 + 3x - 5$ ൽ $x = -3$ എന്നെടുത്ത്, 0 കിട്ടുന്നുണ്ടോ എന്നു നോക്കിയാൽ മതി.

$$\left(2 \times (-3)^2\right) + \left(3 \times (-3)\right) - 5 = 18 - 9 - 5 = 4$$

ഇവിടെ പൂജ്യം കിട്ടാത്തതിനാൽ, $x + 3$ എന്ന ബഹുപദം, $2x^2 + 3x - 5$ ന്റെ ഘടകമല്ല.

- $2x - 3$ എന്ന ബഹുപദം $2x^2 - x - 3$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണോ?

ഘടകസിദ്ധാന്തമുപയോഗിക്കാൻ പാകത്തിൽ $2x - 3$ നെ മാറ്റിയെഴുതുന്നതെങ്ങനെ?

$$2x - 3 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

ഇനി $x - \frac{3}{2}$ എന്ന ബഹുപദം $2x^2 - x - 3$ ന്റെ ഘടകമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കാം. (അതുമതിയോ?)

ഇതിന് $2x^2 - x - 3$ ൽ $x = \frac{3}{2}$ എന്നെടുത്തു നോക്കണം.

$$2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} - 3 = \left(2 \times \frac{9}{4}\right) - \frac{3}{2} - 3 = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} - 3 = 0$$

അപ്പോൾ $x - \frac{3}{2}$ എന്ന ബഹുപദം $2x^2 - x - 3$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണ്. അതിനാൽ $2x - 3$ എന്ന ബഹുപദവും $2x^2 - x - 3$ ന്റെ ഘടകമാണ്. (എന്തുകൊണ്ട്?)

ഇനി ചുവടെയുള്ള കണക്കുകൾ സ്വയം ചെയ്തു നോക്കൂ:

- ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ബഹുപദങ്ങൾ ഓരോന്നും, $3x^3 - 2x^2 - 3x + 2$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക. ഘടകമല്ലെങ്കിൽ, ഹരിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം എഴുതുക.

  - $x - 1$
  - $3x - 2$
  - $2x - 3$
  - $x + 1$
  - $3x + 2$
  - $2x + 3$

- $p(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തെ $ax + b$ എന്ന ബഹുപദം കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം എന്താണ്? $ax+b$ എന്ന ബഹുപദം, $p(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാകാനുള്ള നിബന്ധന എന്താണ്?
- $x - 1$ എന്ന ബഹുപദം $x^{100} - 1$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണോ? $x + 1$ ആയാലോ?
- $x - 1$ എന്ന ബഹുപദം $x^{101} - 1$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണോ? $x + 1$ ആയാലോ?
- n ഏതു എണ്ണൽസംഖ്യയായാലും $x - 1$ എന്ന ബഹുപദം, $x^n - 1$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.
- n ഏതു ഇരട്ടസംഖ്യയായാലും $x + 1$ എന്ന ബഹുപദം, $x^n - 1$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.
- n ഏതു ഒറ്റസംഖ്യയായാലും $x^n - 1$ ന്റെ ഒരു ഘടകം അല്ല $x + 1$ എന്നു തെളിയിക്കുക.
- $3x^3 - 2x^2 + 5x$ എന്ന ബഹുപദത്തോട് ഏതു സംഖ്യ കൂട്ടിയാലാണ്, $x - 1$ ഘടകമായ ഒരു ബഹുപദം കിട്ടുക?
- $3x^3 - 2x^2$ എന്ന ബഹുപദത്തോട് ഏത് ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദം കൂട്ടിയാലാണ്, $x - 1$, $x + 1$ ഇവ രണ്ടും ഘടകങ്ങളായ ഒരു ബഹുപദം കിട്ടുക?

ഘടകക്രിയ

$x^2 + x - 12$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകങ്ങൾ എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

$x - 2$ എന്നോ, $2x + 1$ എന്നോ തന്നിട്ടുള്ള ഒരു ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദം $x^2 + x - 12$ ന്റെ ഘടകമാണോ എന്നു കണ്ടുപിടിക്കാൻ എളുപ്പമാണ്. ഇങ്ങനെയല്ലാതെ, ഒരു ഘടകം തന്നെ നേരിട്ടു കണ്ടുപിടിക്കുന്നതെങ്ങനെ?

ഘടകസിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്, $x^2 + x - 12$ ന്റെ ഒന്നാംകൃതി ഘടകങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന്, $x^2 + x - 12$ പൂജ്യമാക്കാൻ x ഏതു സംഖ്യയായി എടുക്കണമെന്നു കണ്ടുപിടിച്ചാൽ മതി.

അതായത്,

$$x^2 + x - 12 = 0$$

എന്ന രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യം പരിഹരിച്ചാൽ മതി.

അതറിയാമല്ലോ.

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = 3 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } -4$$

കൃതികളുടെ തുക

n ഏതു എണ്ണൽ സംഖ്യയായാലും, $x - 1$ എന്ന ബഹുപദം $x^n - 1$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകമാണെന്നു കണ്ടല്ലോ. ഇതിലെ ഹരണഫലം എന്താണ്?

$n = 2$ ആയാൽ $\dfrac{x^2-1}{x-1} = x+1$ എന്നും

$n = 3$ ആയാൽ $\dfrac{x^3-1}{x-1} = x^2+x+1$

എന്നും കണ്ടല്ലോ. ഇതുപോലെ

$$\frac{x^4-1}{x-1} = x^3+x^2+x+1$$

എന്നു കാണാനും വിഷമമില്ല. പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, n ഏത് എണ്ണൽ സംഖ്യയായാലും

$$\frac{x^n-1}{x-1} = x^{n-1}+x^{n-2}+.......+x^2+x+1$$

ഇതു തിരിച്ചു വായിച്ചാൽ

$$1+x+x^2+.........+x^{n-1} = \frac{x^n-1}{x-1}$$

1 അല്ലാത്ത ഏതു സംഖ്യ x ആയി എടുത്താലും ഈ സമവാക്യം ശരിയാണല്ലോ.

$x = 2$ എന്നെടുത്താൽ

$$1+2+2^2+........+2^{n-1}$$

$$= \frac{2^n-1}{2-1} = 2^n - 1$$

(**സമാന്തരശ്രേണി** എന്ന പാഠത്തിലെ **വളരുന്ന ത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം നോക്കുക.) ഇതുപോലെ.

$$1+3+3^2+........+3^{n-1}$$

$$= \frac{3^n-1}{3-1} = \frac{3^n-1}{2}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+......+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2^n}-1}{\frac{1}{2}-1} = 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

അതായത്, $x = 3$ എന്നോ, $x = -4$ എന്നോ എടുത്താൽ $x^2 + x - 12$ പൂജ്യമാകും. അപ്പോൾ ഘടകസിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച് $x - 3$, $x - (-4) = x + 4$ ഇവ $x^2 + x - 12$ ന്റെ ഘടകങ്ങളാണ്.

ഇവ തമ്മിൽ ഗുണിച്ചു നോക്കിയാൽ

$$(x - 3)(x + 4) = x^2 + x - 12$$

എന്നു കിട്ടുന്നുമുണ്ടല്ലോ.

ഇതുപോലെ $3x^2 + 5x + 2$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

മുമ്പു ചെയ്തതുപോലെ ആദ്യം

$$3x^2 + 5x + 2 = 0$$

എന്ന രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യം പരിഹരിക്കാം.

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{6} = \frac{-5 \pm 1}{6} = -\frac{2}{3} \text{ അല്ലെങ്കിൽ } -1$$

ആദ്യത്തെ കണക്കിലെപ്പോലെ, ഘടകസിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച് $x + \frac{2}{3}$, $x + 1$ എന്നീ ബഹുപദങ്ങൾ $3x^2 + 5x + 2$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ഘടകങ്ങളാണെന്നും കാണാം.

ഇവ തമ്മിൽ ഗുണിച്ചാലോ?

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)(x + 1) = x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}$$

ഇത് തുടങ്ങിയ ബഹുപദം $3x^2 + 5x + 2$ അല്ലല്ലോ. പക്ഷേ

$$x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(3x^2 + 5x + 2)$$

എന്നെഴുതാം. അപ്പോൾ

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)(x + 1) = \frac{1}{3}(3x^2 + 5x + 2)$$

ഇതിൽ നിന്ന്

$$3x^2 + 5x + 2 = 3\left(x+\frac{2}{3}\right)(x + 1) = (3x + 2)(x + 1)$$

എന്നു കിട്ടും.

ഇതുപോലെ $6x^2 - 7x - 3$ എന്ന ബഹുപദത്തെ ഘടകങ്ങളാക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം.

മറ്റൊരു മാർഗം

$x^2 + ax + b$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള ചില രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളെ എളുപ്പത്തിൽ ഘടകങ്ങളാക്കാം. ഉദാഹരണമായി $x^2 + 5x + 6$ എന്ന ബഹുപദം നോക്കുക. ഇതിന്റെ ഘടകങ്ങൾ $x + a$, $x + b$ എന്നെടുത്താൽ

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 6 &= (x + a)(x + b) \\ &= x^2 + (a + b)x + ab \end{aligned}$$

ഇതു ശരിയാകാൻ,

$$a + b = 5$$

$$ab = 6$$

എന്നെടുത്താൽ മതിയല്ലോ. അതായത്, തുക 5 ഉം, ഗുണനഫലം 6 ഉം ആയ രണ്ടു സംഖ്യകൾ വേണം. അൽപം ആലോചിച്ചാൽ, 3, 2 എന്ന ഉത്തരം കിട്ടും. അപ്പോൾ

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

ഈ രീതിയിൽ $x^2 + 10x + 24$ നെ ഘടകങ്ങളാക്കാമോ എന്നു നോക്കൂ.

$x^2 - 10x + 24$ ആയാലോ?

ആദ്യം

$$6x^2 - 7x - 3 = 0$$

എന്ന സമവാക്യം പരിഹരിക്കണം (അതെന്തിന്?)

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49+72}}{12} = \frac{7 \pm 11}{12} = \frac{3}{2} \text{ അല്ലെങ്കിൽ } -\frac{1}{3}$$

ഇനി $x - \frac{3}{2}$, $x + \frac{1}{3}$ ഇവയുടെ ഗുണനഫലം കണ്ടുപിടിക്കണം.

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) = x^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right)x - \left(\frac{3}{2} \times \frac{1}{3}\right)$$

$$= x^2 - \frac{7}{6}x - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{6}(6x^2 - 7x - 3)$$

ഇതു തിരിച്ചെഴുതിയാൽ കാര്യം കഴിഞ്ഞല്ലോ.

$$6x^2 - 7x - 3 = 6\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$$

$$= 2\left(x - \frac{3}{2}\right) \times 3\left(x + \frac{1}{3}\right)$$

$$= (2x - 3)(3x + 1)$$

ഒരു ഉദാഹരണം കൂടി നോക്കാം:

$x^2 - 2x - 1$ നെ ഘടകങ്ങളാക്കുന്നതെങ്ങനെ?

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം,

$$x = 1 \pm \sqrt{2}$$

എന്നാണല്ലോ കിട്ടുന്നത്. അതായത് $1 + \sqrt{2}$, $1 - \sqrt{2}$ എന്നീ സംഖ്യകളാണ് ഈ സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരങ്ങൾ.

ഇവയോരോന്നും x ൽ നിന്നു കുറച്ചു കിട്ടുന്ന ബഹുപദങ്ങൾ ഗുണിച്ചുനോക്കിയാലോ?

$$\left(x - (1 + \sqrt{2})\right)\left(x - (1 - \sqrt{2})\right)$$

$$= x^2 - \left((1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2})\right)x + (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})$$

$$= x^2 - 2x + (1^2 - (\sqrt{2})^2)$$

$$= x^2 - 2x - 1$$

ഘടകപരിഹാരം

$p(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തിനെ ഘടകങ്ങളാക്കാൻ $p(x) = 0$ എന്ന സമവാക്യം പരിഹരിച്ചാൽ മതി എന്നു കണ്ടല്ലോ. മറിച്ച്, $p(x)$ എന്ന ബഹുപദത്തെ ഘടകങ്ങളാക്കാൻ കഴിഞ്ഞാൽ, $p(x) = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിനു പരിഹാരവുമാകും.

ഉദാഹരണമായി

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

എന്ന സമവാക്യം നോക്കുക

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3)$$

എന്നു കിട്ടിക്കഴിഞ്ഞാൽ, ഈ സമവാക്യത്തെ

$$(x + 2)(x + 3) = 0$$

എന്നെഴുതാം. ഇതു ശരിയാകാൻ $(x + 2)$, $(x + 3)$ എന്നീ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം പൂജ്യമാകുന്നതരത്തിൽ x എന്ന സംഖ്യകണ്ടുപിടിക്കണം.

ഗുണനഫലം പൂജ്യമാകാൻ, ഏതെങ്കിലും ഒരു ഘടകം പൂജ്യമായാൽ മതിയല്ലോ. അപ്പോൾ $x + 2$, $x + 3$ ഇവയിലേതെങ്കിലും ഒന്ന് പൂജ്യമാകുന്നവിധം x കണ്ടുപിടിച്ചാൽ മതി. അതായത്,

$x + 2 = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $x + 3 = 0$

$x = -2$ അല്ലെങ്കിൽ $x = -3$

അതായത്,

$$x^2 - 2x - 1 = (x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$$

എല്ലാ ബഹുപദങ്ങളേയും ഇങ്ങനെ ഘടകങ്ങളാക്കി പിരിച്ചെഴുതാൻ കഴിയുമോ?

$x^2 + 1$ എന്ന ബഹുപദം നോക്കുക. ഇതിന് ഒന്നാംകൃതി ഘടകങ്ങൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ $x^2 + 1 = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിനു പരിഹാരം വേണം; അതില്ലാത്തതിനാൽ, (എന്തുകൊണ്ട്?) ഈ ബഹുപദത്തിന് ഒന്നാംകൃതി ഘടകങ്ങൾ ഇല്ല.

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ:

- ചുവടെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ബഹുപദങ്ങളോരോന്നിനേയും, ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതുക
  - $2x^2 + 5x + 3$
  - $x^2 + 2x - 1$
  - $x^2 + 3x + 2$
  - $x^2 - 2$
  - $4x^2 + 20x + 25$
  - $x^2 - x - 1$
- ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ബഹുപദങ്ങളോരോന്നിനും, ഒന്നാംകൃതി ഘടകങ്ങൾ ഇല്ല എന്നു തെളിയിക്കുക
  - $x^2 + x + 1$
  - $x^4 + 1$
  - $x^2 - x + 1$
  - $x^4 + x^2 + 1$

പ്രോജക്ട്

- $x - 1,\ x + 1, x^2 - 1$ ഇവയിലേതെങ്കിലും ഘടകങ്ങളായി വരുന്ന ബഹുപദങ്ങളിലെ ഗുണകങ്ങളുടെ സവിശേഷതകൾ വെവ്വേറെ കണ്ടുപിടിക്കുക.

മൂന്നാംകൃതി ബഹുപദം

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ ന്റെ ഘടകങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതെങ്ങനെ? ഘടകസിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിക്കണമെങ്കിൽ

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

എന്ന സമവാക്യം പരിഹരിക്കണം. അതിനു പൊതുവായ മാർഗമൊന്നും അറിയില്ലല്ലോ.

ചില സാധ്യതകൾ പരീക്ഷിച്ചു നോക്കാം. ഈ ബഹുപദത്തിൽ $x = 1$ എന്നെടുത്താൽ $1 - 6 + 11 - 6 = 0$ എന്നു കാണാമല്ലോ. അപ്പോൾ $x - 1$ ഇതിന്റെ ഘടകമാണ്. മറ്റു ഘടകങ്ങൾ എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ നെ $x - 1$ കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ $x^2 - 5x + 6$ കിട്ടും. (ചെയ്തുനോക്കൂ) ഇനി $x^2 - 5x + 6 = 0$ എന്ന സമവാക്യം ശരിയാകാൻ $x = 2$ അല്ലെങ്കിൽ $x = 3$ എന്നെടുക്കണം എന്നും കണ്ടുപിടിക്കാം. അപ്പോൾ എന്തുകിട്ടി?

$$\begin{aligned} & x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \\ &= (x - 1)(x^2 - 5x + 6) \\ &= (x - 1)(x - 2)(x - 3) \end{aligned}$$

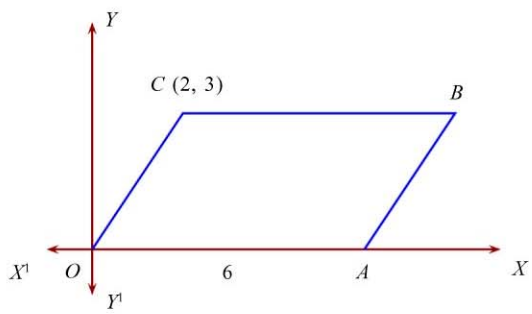
ഇതുപോലെ $x^3 - 4x^2 + x + 6$ നെ ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനഫലമായി എഴുതാമോ?

10 ജ്യാമിതിയും ബീജഗണിതവും

അകലങ്ങൾ

ലംബമായ രണ്ട് രേഖകൾ വരച്ച്, നീളമളക്കാൻ ഒരു ഏകകവും എടുത്തു കഴിഞ്ഞാൽ, ഒരു തലത്തിലെ ബിന്ദുക്കളെയെല്ലാം സംഖ്യാജോടികൾകൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാം എന്നു കണ്ടല്ലോ.

ഈ ചിത്രത്തിൽ $OABC$ ഒരു സാമാന്തരികമാണ്.

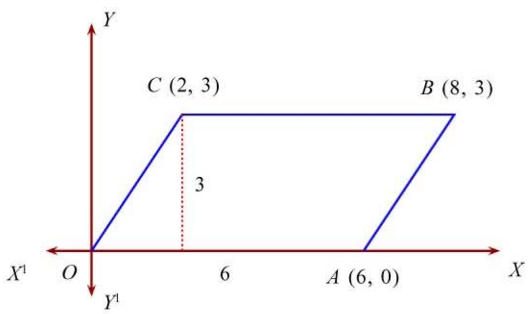


A, B എന്നീ മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

A എന്ന മൂല x-അക്ഷത്തിൽത്തന്നെയാണ്; ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള അകലം 6 ഉം. അപ്പോൾ, അതിന്റെ സൂചകബിന്ദുക്കൾ എന്താണ്?

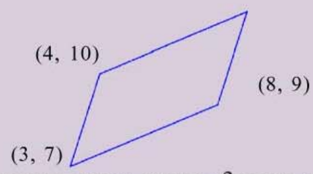
B യുടെ കാര്യമോ? BC എന്ന വര x-അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമാണ്; അതിലെ C എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ y-സൂചകസംഖ്യ 3 ഉം. അപ്പോൾ B യുടെ y-സൂചകസംഖ്യ എന്താണ്?

ഇനി BC യുടെ നീളവും 6 ആണല്ലോ. (എങ്ങനെ കിട്ടി?) അപ്പോൾ B യുടെ x-സൂചകസംഖ്യ എത്രയാണ്?

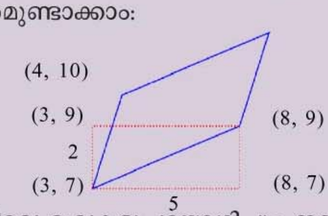


നാലാംമൂല

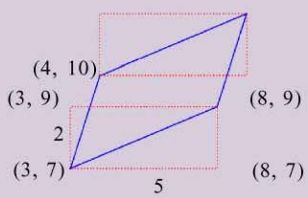
ചിത്രത്തിലെ സാമാന്തരികത്തിന്റെ നാലാംമൂലയുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്താണ്?



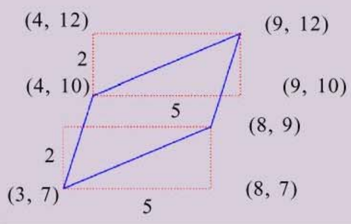
താഴത്തെ രണ്ടു മൂലകളിലൂടെ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തര വരകൾ വരച്ച്, ഒരു ചതുരമുണ്ടാക്കാം:



മുകളിലെ മൂലകളുപയോഗിച്ചും ഇതുപോലൊരു ചതുരം വരയ്ക്കാം.

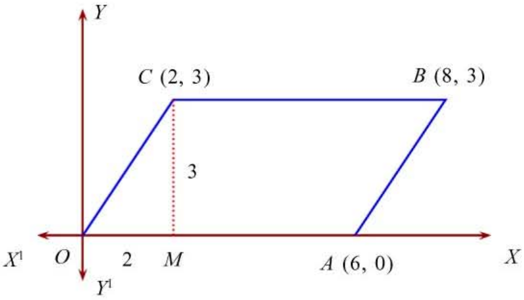


ഇതിന്റെ നീളവും വീതിയും, താഴത്തെ ചതുരത്തിന്റേതുതന്നെ ആണല്ലോ. (എന്തുകൊണ്ട്?)



ഇനി മറ്റൊരു ചോദ്യം: ഈ സാമാന്തരികത്തിന്റെ രണ്ടാമത്തെ വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ.



എങ്ങനെയാണ് $OM = 2$ എന്നു കിട്ടിയത്?

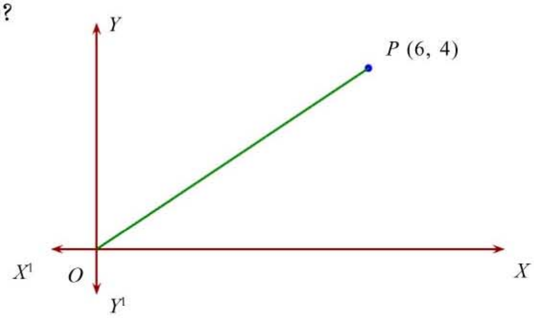
ഇനി COM എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽ നിന്ന് OC കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ.

$$OC^2 = OM^2 + MC^2 = 13$$

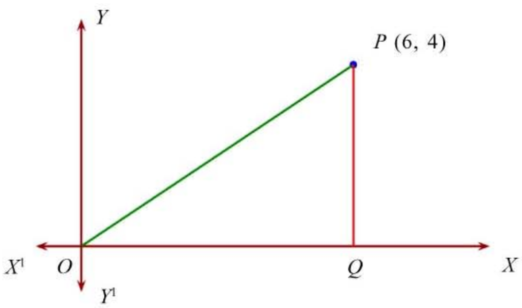
അതായത്, സാമാന്തരികത്തിന്റെ രണ്ടാമത്തെ വശത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{13}$.

ഇവിടെ OC യുടെ നീളം കാണാൻ, C യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ മാത്രമല്ലേ ഉപയോഗിച്ചുള്ളു.

ഇതുപോലെ ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ OP യുടെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കാമോ?



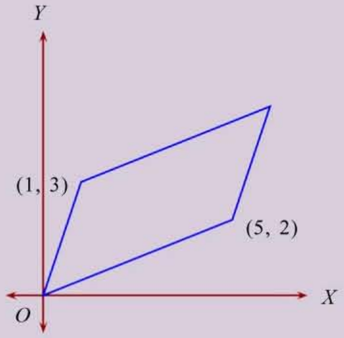
P യിൽ നിന്ന് x-അക്ഷത്തിലേക്ക് ലംബം വരച്ചാലോ?



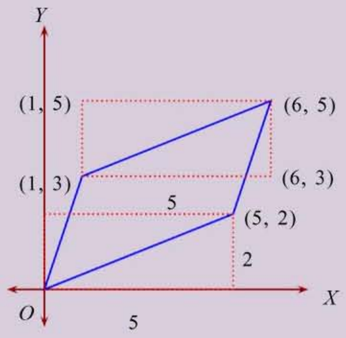
OPQ എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാണ്? അപ്പോൾ OP യുടെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ.

സമാന്തരസങ്കലനം

ഈ സാമാന്തരികത്തിന്റെ നാലാംമൂല എന്താണ്?



നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ ചതുരങ്ങൾ വരയ്ക്കാം



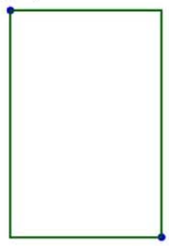
(1, 3), (5, 2) ഇവയ്ക്കു പകരം, മറ്റു ബിന്ദുക്കളെടുത്ത് ഇതു ചെയ്തു നോക്കൂ. തുടങ്ങുന്ന മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകളും, നാലാംമൂലയുടെ സൂചകസംഖ്യകളും തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധം കാണുന്നുണ്ടോ?

തുടങ്ങുന്ന മൂലകൾ (x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നെടുത്ത് ചെയ്തുനോക്കൂ.

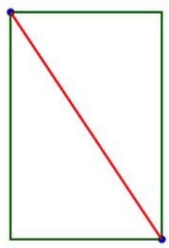
ഇനി അക്ഷങ്ങൾ ചിത്രത്തിൽ കാണിക്കാതെ, സൂചകസംഖ്യകൾ മാത്രം തന്നാൽ, ആധാരബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള അകലം കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

ഉദാഹരണമായി, $(2, -3)$ എന്ന ബിന്ദുവും, ആധാരബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള അകലം എന്താണ്?

അതിന് ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ഒരു ചതുരം, വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്കു സമാന്തരമായി, വരയ്ക്കാം:



ഇതിന്റെ മറ്റു മൂലകൾ എന്തൊക്കെയാണ്? വശങ്ങളുടെ നീളമോ? അപ്പോൾ വികർണം കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ.

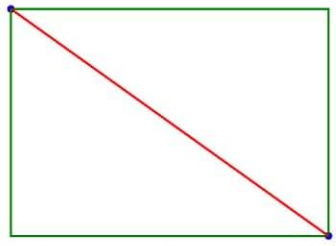


അതായത്, നമുക്കാവശ്യമായ അകലം

$$\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$$

ഏതു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലവും, ഇതേ രീതിയിൽ കണ്ടുപിടിച്ചുകൂടേ?

ഉദാഹരണമായി, $(2, -1)$, $(-5, 4)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെടുക്കാം. അപ്പോൾ വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്കു സമാന്തരമായി, ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ഒരു ചതുരം വരയ്ക്കാം:



ജ്യാമിതിയുടെ ബീജഗണിതം

സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള പൊതുവായ ബന്ധങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചാണല്ലോ. അധിസംഖ്യകളുടെ ഇത്തരം ചില ബന്ധങ്ങളെ ജ്യാമിതീയമായി വിശദീകരിക്കാമെന്നും കണ്ടിട്ടുണ്ട്.

ഒരു തലത്തിലെ ബിന്ദുക്കളെയെല്ലാം, സംഖ്യാജോടികൾകൊണ്ടു സൂചിപ്പിച്ചാൽ, ഈ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള പൊതുവായ ബന്ധങ്ങളേയും, ബിന്ദുക്കൾ ചേർന്നുണ്ടാകുന്ന ചിത്രങ്ങളേയുമെല്ലാം ബീജഗണിതഭാഷയിൽ എഴുതാം.

ഒരു മൂല $(0, 0)$ ഉം, അതിനോടടുത്ത രണ്ടു മൂലകൾ (x_1, y_1) ഉം (x_2, y_2) ഉം ആയ സാമാന്തരികത്തിന്റെ നാലാം മൂല $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ ആണെന്ന (നേരത്തെ കണ്ട) കാര്യം, ജ്യാമിതീയ ഗുണങ്ങളെ ബീജഗണിതഭാഷയിൽ എഴുതുന്നതിന്റെ ഒരുദാഹരണമാണ്.

നമുക്കാവശ്യമായ അകലം, ഈ ചതുരത്തിന്റെ വികർണമാണ്; അതാകട്ടെ

$$\sqrt{7^2+5^2}=\sqrt{74}$$

എന്നു കാണാം.

ഇനി $(2, -1)$, $(-5, 4)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾക്ക് പകരം (x_1, y_1), (x_2, y_2) $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ എടുക്കാം. അപ്പോഴും ഇവ എതിർമൂലകളായ ഒരു ചതുരം വരയ്ക്കാമല്ലോ. ഈ ചതുരത്തിന്റെ ഒരു ജോടി സമീപവശങ്ങൾ, (x_1, y_1), (x_2, y_1) യോജിപ്പിച്ച വരയും (x_1, y_1), (x_1, y_2) യോജിപ്പിച്ച വരയുമാണ്; അവയുടെ നീളം $|x_1 - x_2|$ ഉം $|y_1 - y_2|$ ഉം ആണ്. അതിനാൽ ഈ ചതുരത്തിന്റെ വികർണത്തിന്റെ വർഗം $= |x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

(ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗവും, അതിന്റെ കേവലവിലയുടെ വർഗവും തുല്യമാണെന്ന്, ഒമ്പതാംക്ലാസിലെ **രേഖീയസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടതോർക്കുക)

അതായത് (x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

ഇങ്ങനെ ചതുരം വരയ്ക്കണമെങ്കിൽ, ആദ്യമെടുക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, ഏതെങ്കിലും അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമാകരുത്. അങ്ങനെ സമാന്തരമായി വരുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ കാര്യത്തിൽ നീളം കണ്ടുപിടിക്കുന്നത്, നേരത്തെ കണ്ടതാണല്ലോ. (**സൂചകസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠം)

ഇവയും ബീജഗണിതഭാഷയിൽ എഴുതാം:

- (x_1, y), (x_2, y) എന്നിങ്ങനെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ y-സൂചകസംഖ്യകൾ തുല്യമാണെങ്കിൽ, അവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര x-അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമാണ്; അവ തമ്മിലുള്ള അകലം, x_1, x_2 ഇവയിലെ വലുതിൽ നിന്നു ചെറുതു കുറച്ചത്; അതായത് $|x_1 - x_2|$
- (x, y_1), (x, y_2) എന്നിങ്ങനെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ x-സൂചകസംഖ്യകൾ തുല്യമാണെങ്കിൽ, അവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര y-അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമാണ്; അവ തമ്മിലുള്ള അകലം, y_1, y_2 ഇവയിലെ വലുതിൽ നിന്നു ചെറുതു കുറച്ചത്; അതായത് $|y_1 - y_2|$

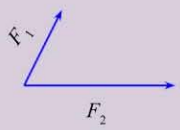
ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനമനുസരിച്ച്, അകലം കണ്ടുപിടിക്കാൻ മൂന്നു ബീജഗണിതവാചകങ്ങൾ കണ്ടല്ലോ.

$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ എന്ന ബീജഗണിതവാചകത്തിൽ $y_1 = y_2$ എന്നെടുത്താൽ എന്തുകിട്ടും?

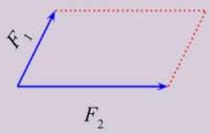
ബലസാമാന്തരികം

ഒരേ വസ്തുവിൽ രണ്ടു ബലങ്ങൾ, രണ്ടു ദിശയിൽ പ്രയോഗിക്കുമ്പോഴുണ്ടാകുന്ന അതേ മാറ്റം, ഒരൊറ്റ നിശ്ചിത ബലം, നിശ്ചിത ദിശയിൽ പ്രയോഗിക്കുന്നതിലൂടെ വരുത്താൻ കഴിയും.

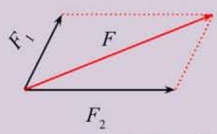
ഈ ബലം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന്, പരീക്ഷണങ്ങളിലൂടെ തിരിച്ചറിഞ്ഞ ഒരു മാർഗമുണ്ട്. ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന്, ആദ്യത്തെ രണ്ടു ബലങ്ങളുടെ അളവുകൾക്ക് ആനുപാതികമായ നീളമുള്ള വരകൾ (ഒരു ന്യൂട്ടൻ ബലത്തിന് ഒരു സെന്റിമീറ്റർ എന്നോ മറ്റോ) അവ പ്രയോഗിക്കുന്ന ദിശയ്ക്കനുസരിച്ച് വരയ്ക്കുക.



ഇനി ഇവ സമീപവശങ്ങളായി സാമാന്തരികം വരയ്ക്കുക.



ഈ സാമാന്തരികത്തിന്റെ വികർണത്തിന്റെ ദിശയിലാണ്, ഈ രണ്ടു ബലങ്ങൾക്കും പകരമായ ഒറ്റ ബലം; അതിന്റെ അളവ്, ആദ്യം എടുത്ത തോതനുസരിച്ച്, വികർണത്തിന്റെ നീളവുമായിരിക്കും.



ബലങ്ങളുടെ സാമാന്തരിക തത്വം (Parallelogram Law of Forces) എന്നാണ് ഇതറിയപ്പെടുന്നത്.

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2} = |x_1 - x_2|$$

(ഒമ്പതാംക്ലാസിലെ **രേഖീയസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **വർഗമൂലവും കേവലവിലയും** എന്ന ഭാഗം നോക്കുക)

ഇതുപോലെ ഈ ബീജഗണിതവാചകത്തിൽ $x_1 = x_2$ എന്നെടുത്താൽ $|y_1 - y_2|$ ഉം കിട്ടും.

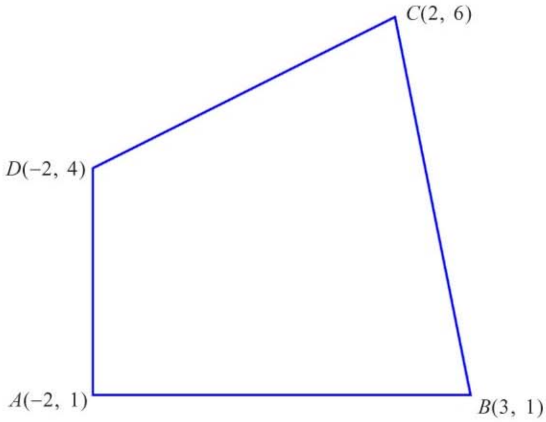
അപ്പോൾ അകലം കണക്കാക്കാൻ ഒറ്റ ബീജഗണിതവാചകം മതിയല്ലോ.

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ എന്ന ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെടുത്താലും, അവ തമ്മിലുള്ള അകലം

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കൂ.

- ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ചതുർഭുജത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കണ്ടുപിടിക്കുക?



ഇവിടെ A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ y-സൂചകസംഖ്യകൾ തുല്യമാണ്. അതിനാൽ AB എന്ന വരയുടെ നീളം $= 3 - (-2) = 5$

A, D എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ x - സൂചകസംഖ്യകൾ തുല്യമാണ്.

AD എന്ന വരയുടെ നീളം $= 4 - 1 = 3$

B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ x-സൂചകസംഖ്യകളും y - സൂചകസംഖ്യകളും വ്യത്യസ്തമാണ്.

അപ്പോൾ BC എന്ന വരയുടെ നീളം $= \sqrt{(2-3)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{26}$

അതുപോലെ CD എന്ന വരയുടെ നീളം $= \sqrt{(2-(-2))^2 + (6-4)^2} = \sqrt{20}$

ഇനി ചുറ്റളവ് കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ?

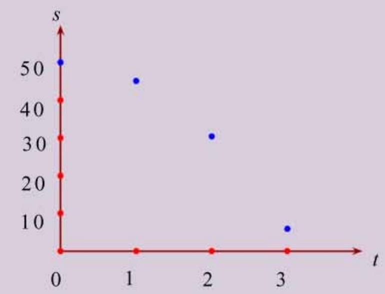
ചുറ്റളവ് $= 5 + 3 + \sqrt{26} + \sqrt{20} = 8 + \sqrt{26} + 2\sqrt{5}$

ഭൗതികബന്ധങ്ങൾ

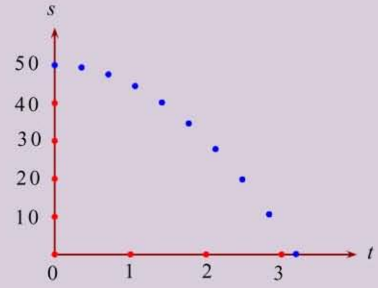
അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കാനും ബീജഗണിതം ഉപയോഗിക്കുന്നുണ്ടെന്ന് പറഞ്ഞല്ലോ. ഉദാഹരണമായി, 50 മീറ്റർ ഉയരത്തിൽ നിന്ന് ഭൂമിയിലേക്കു വീഴുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്, t സെക്കന്റു കഴിഞ്ഞ് ഭൂമിയിൽ നിന്നുള്ള ഉയരം s മീറ്ററാണെങ്കിൽ

$$s = 50 - 4.9t^2$$

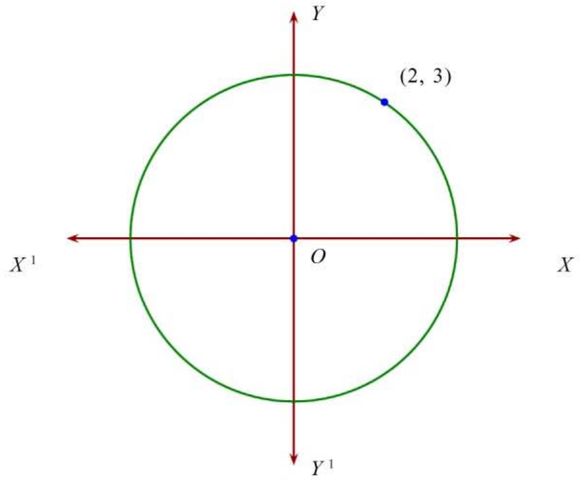
ഇതിൽ $t = 0, 1, 2, 3$ എന്നെടുത്താൽ $s = 50, 45.1, 30.4, 5.9$ എന്നിങ്ങനെ കിട്ടും. പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ടു വരകളിൽ, സൗകര്യമായ തോതെടുത്ത്, t, s ഇവ അടയാളപ്പെടുത്തി, $(0, 50), (1, 45.1), (2, 30.4), (3, 5.9)$ എന്നിവയെ ബിന്ദുക്കളായി അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ഒരു ചിത്രം കിട്ടും



t ആയി കുറേക്കൂടി സംഖ്യകളെടുത്ത്, കൂടുതൽ ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ, ചിത്രം ഇങ്ങനെയാകും



- ചിത്രത്തിലെ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം ആധാരബിന്ദുവാണ്. ആരം എത്രയാണ്?



O വൃത്തകേന്ദ്രവും, (2, 3) വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവും ആയതിനാൽ, ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലമാണ് ആരം.

O യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്താണ്?

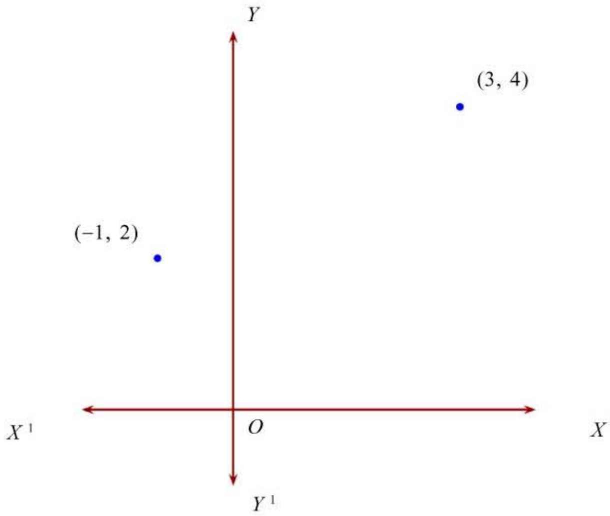
അപ്പോൾ

ആരം $= \sqrt{(2-0)^2+(3-0)^2} = \sqrt{13}$

ഇവിടെ മറ്റൊരു കാര്യം കൂടി കാണാം. (3, 2) എന്ന ബിന്ദുവും, ആധാരബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള അകലവും $\sqrt{13}$ തന്നെയാണല്ലോ. (എങ്ങനെ?) അപ്പോൾ ഈ ബിന്ദുവും വൃത്തത്തിൽത്തന്നെയാണ്.

ഇതുപോലെ വൃത്തത്തിലെ മറ്റേതെങ്കിലും ബിന്ദുക്കൾ കൂടി പെട്ടെന്നു പറയാമോ? ഈ ബിന്ദുക്കളെല്ലാം വൃത്തത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിനോക്കൂ.

- ചിത്രത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്നും തുല്യ അകലത്തിൽ ഒരു ബിന്ദു x-അക്ഷത്തിൽ കണ്ടുപിടിക്കണം.



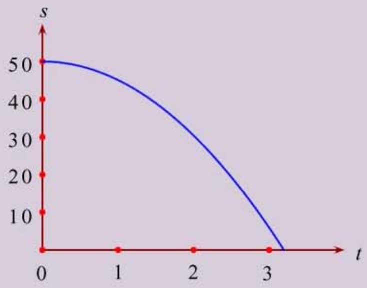
യന്ത്രസഹായം

സമയവും ഉയരവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തെ ജ്യാമിതീയമായി ചിത്രീകരിച്ചത് കണ്ടല്ലോ. ഇത്തരം ചിത്രങ്ങൾ വരയ്ക്കാൻ, വ്യത്യസ്ത സംഖ്യകളെടുത്തു കണക്കുകൂട്ടി ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുന്നത് ബുദ്ധിമുട്ടാണ്.

ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ, ഉപയോഗിക്കാനായി കമ്പ്യൂട്ടറിൽ GeoGebra, Gnuplot, KmPlot തുടങ്ങിയ അനേകം applications ഉണ്ട്. ബന്ധത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സമവാക്യം മാത്രം കൊടുത്താൽ, ഇവയെല്ലാം അതിന്റെ ചിത്രം വരച്ചുതരും. ഉദാഹരണമായി, മുമ്പു കണ്ട

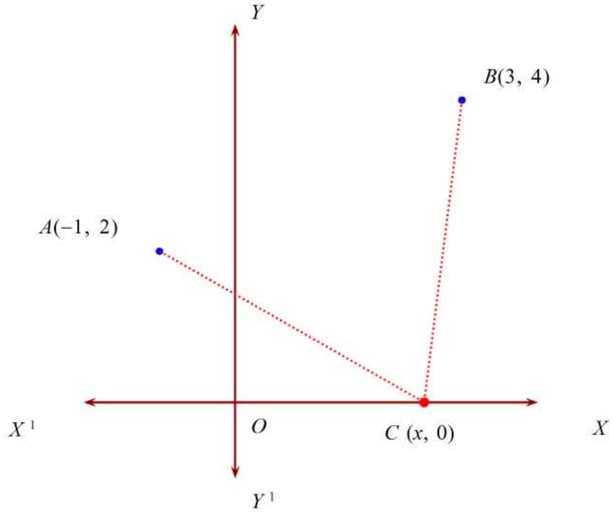
$$s = 50 - 4.9t^2$$

എന്ന ബന്ധത്തിന്റെ ചിത്രം PostScript പ്രോഗ്രാം ഉപയോഗിച്ചു വരച്ചതാണ് ഇത്:



ഈ ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്, ഉയരം കുറഞ്ഞുവരുന്നതിന്റെ രീതിയും, എപ്പോഴാണ് ഭൂമിയിൽ പതിക്കുന്നത് എന്നതുമെല്ലാം കാണാമല്ലോ.

ആവശ്യമുള്ള ബിന്ദു x-അക്ഷത്തിലായതിനാൽ, അതിന്റെ y-സൂചകസംഖ്യ, പൂജ്യമാണ്. ഇതിന്റെ x-സൂചകസംഖ്യ x എന്നെടുത്താൽ, സൂചകസംഖ്യകൾ $(x, 0)$ എന്നാകും.



$AC = BC$ ആയതിനാൽ, $AC^2 = BC^2$. അതായത്,

$$(x + 1)^2 + (0 − 2)^2 = (x − 3)^2 + (0 − 4)^2$$

ഇതിൽ നിന്ന്

$$(x + 1)^2 − (x − 3)^2 = 12$$

എന്നു കിട്ടും.
അതായത്

$$8x − 8 = 12$$

ഇതിൽനിന്ന് $x = \frac{5}{2}$ എന്നു കാണാം. അപ്പോൾ, ആവശ്യമായ ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$.

ഇനി ചുവടെയുള്ള കണക്കുകൾ സ്വയം ചെയ്തു നോക്കൂ:

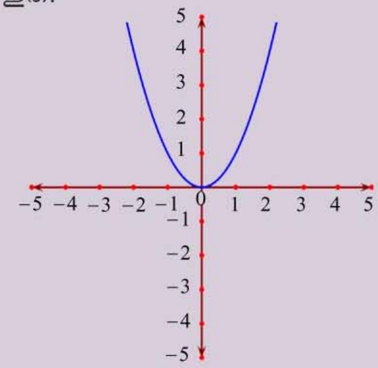
- ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം (3, 4); ഇത് (2, 5) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു പോകുന്നു. ഈ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്രയാണ്?
- കേന്ദ്രം (−2, 1) ഉം, ആരം 3 ഉം ആയ വൃത്തം വരയ്ക്കുന്നു. സൂചകസംഖ്യകൾ (4, 1) ആയ ബിന്ദു, ഈ വൃത്തത്തിൽത്തന്നെയാണോ, അല്ലെങ്കിൽ അകത്തോ, പുറത്തോ എന്നു കണ്ടുപിടിക്കുക.
- (2, 1), (3, 4), (−3, 6) എന്നി ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ, ഒരു മട്ടത്രികോണം കിട്ടുമെന്ന് തെളിയിക്കുക.
- (1, 3) എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നുള്ള അകലം 5 ആയ എത്ര ബിന്ദുക്കൾ x-അക്ഷത്തിലുണ്ട്? അവ ഏതൊക്കെയാണ്? y-അക്ഷത്തിലോ?

സമവാക്യചിത്രങ്ങൾ

കേവലസംഖ്യാബന്ധങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബീജഗണിതവാക്യങ്ങളുടെ ചിത്രങ്ങൾ കമ്പ്യൂട്ടറിൽ വരയ്ക്കാം. ഉദാഹരണമായി,

$$y = x^2$$

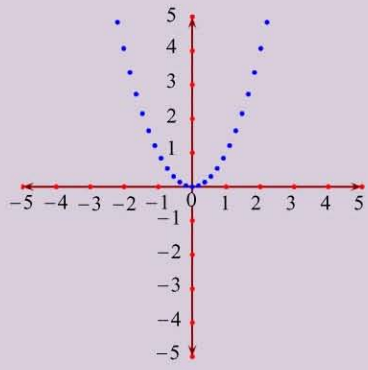
എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ ചിത്രം Postscript ഭാഷയുപയോഗിച്ച് വരച്ചതാണ് ഇത്.



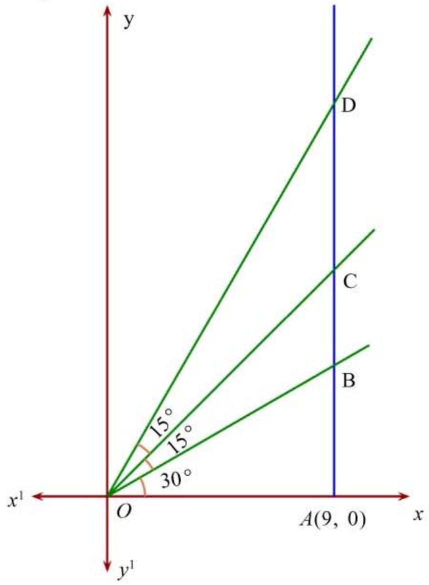
എന്താണിതിന്റെ അർത്ഥം?

x ആയി പലപല സംഖ്യകൾ എടുത്ത് x^2 കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ. അങ്ങനെ കിട്ടുന്ന കുറേയധികം (x, x^2) എന്ന സംഖ്യാജോടികൾ (ഉദാഹരണമായി, (1.5, 2.25) പോലുള്ളവ) സൂചകസംഖ്യകളായ ബിന്ദുക്കൾ ചേർത്താണ് ഈ ചിത്രം ഉണ്ടായിരിക്കുന്നത്.

മുകളിലെ ചിത്രത്തിൽ, ഇത്തരം 50 ബിന്ദുക്കളാണ് എടുത്തിരിക്കുന്നത്. ബിന്ദുക്കളുടെ എണ്ണം 25 ആക്കിയാൽ ചിത്രം ഇങ്ങനെയാകും:



- ചിത്രത്തിൽ B, C, D എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.



AB, BC, CD എന്നീ നീളങ്ങളെ വലിപ്പക്രമത്തിൽ എഴുതുക.

- $(2, 3)$ എന്ന ബിന്ദു കേന്ദ്രവും ആരം 5 ഉം ആയ വൃത്തം x-അക്ഷത്തെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക. ഈ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന ഞാണിന്റെ നീളം കണക്കാക്കുക.

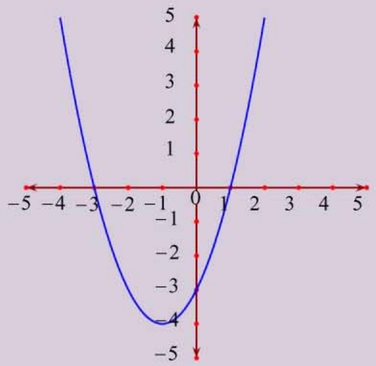
- ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ $(1, 2), (2, 3), (3, 1)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളാണ്. ഇതിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും ആരവും കണ്ടുപിടിക്കുക.

രണ്ടാംകൃതി ചിത്രം

കമ്പ്യൂട്ടർ ഉപയോഗിച്ചു വരച്ച

$$y = x^2 + 2x - 3$$

എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ ചിത്രമാണ് ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്:



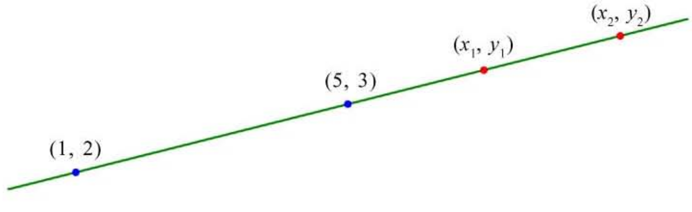
നേരത്തെ വരച്ച $y = x^2$ എന്ന ചിത്രവുമായി എന്താണ് വ്യത്യാസം?

ഇതുപോലെ വ്യത്യസ്ത രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളെടുത്ത്, വരച്ചു നോക്കൂ.

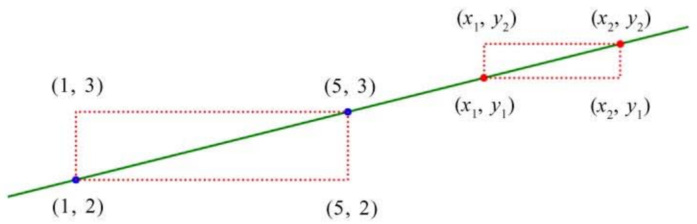
വരയുടെ ചരിവ്

അക്ഷങ്ങൾക്കു സമാന്തരമായ വരകളുടെ സൂചകസംഖ്യകളുടെ സവിശേഷതകൾ കണ്ടല്ലോ: x-അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായ ഏതു വരയിലെ ബിന്ദുക്കളുടെയും y-സൂചകസംഖ്യ തുല്യമാണെന്നും, y-അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായ ഒരു വരയിലെ ബിന്ദുക്കളുടെയെല്ലാം x-സൂചകസംഖ്യ തുല്യമാണെന്നും.

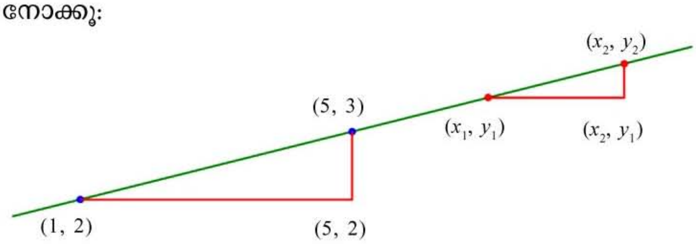
അക്ഷങ്ങളൊന്നിനും സമാന്തരമല്ലാത്ത വരയായാലോ? ഉദാഹരണമായി, $(1, 2), (5, 3)$ എന്നി ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയും, അതിലെ മറ്റു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളും നോക്കുക:



അപ്പോൾ ചുവടെക്കാണുന്ന രീതിയിൽ ചതുരങ്ങൾ വരയ്ക്കാമല്ലോ.



ഇനി ചിത്രത്തിലെ വരയ്ക്കു ചുവടെയുള്ള മട്ടത്രികോണങ്ങൾ മാത്രം നോക്കൂ:



ഇവയുടെ കോണുകൾ തുല്യമാണ് (എന്തുകൊണ്ട്?) അപ്പോൾ തുല്യകോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള വശങ്ങൾ ആനുപാതികമാണ്.

അതായത്

$$\frac{y_2 - y_1}{3 - 2} = \frac{x_2 - x_1}{5 - 1}$$

(ഇതെങ്ങനെ കിട്ടി?) ഇതിൽ നിന്ന്

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{4}$$

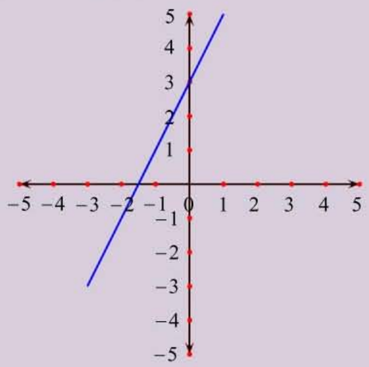
$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ വരയിൽ എവിടെയെടുത്താലും, ത്രികോണങ്ങളുടെ സാദൃശ്യവും, അതുവഴി മുകളിലെഴുതിയ സമവാക്യവും ശരിയാകും.

അതായത്, ഈ വരയിലെ ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെടുത്താലും, y-സൂചകസംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസത്തെ x-സൂചകസംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസം കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ $\frac{1}{4}$ തന്നെ കിട്ടും.

ഇനി (1, 2), (5, 3) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾക്കു പകരം മറ്റേതെങ്കിലും രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെടുത്താലോ? ഉദാഹരണമായി (6, 2), (3, 4) ആയാലോ? ഈ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലെ ഏതു രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ എടുത്താലും, y വ്യത്യാസത്തെ x വ്യത്യാസം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് $\frac{2-4}{6-3} = -\frac{2}{3}$ തന്നെയായിരിക്കും.

ഒന്നാംകൃതി ചിത്രം

കമ്പ്യൂട്ടർ ഉപയോഗിച്ച്, $y = 2x + 3$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ ചിത്രം വരച്ചാൽ, ഇങ്ങനെ കിട്ടും:



മറ്റു ചില ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ചിത്രം വരച്ചു നോക്കൂ. എല്ലാം വര തന്നെയാണോ?

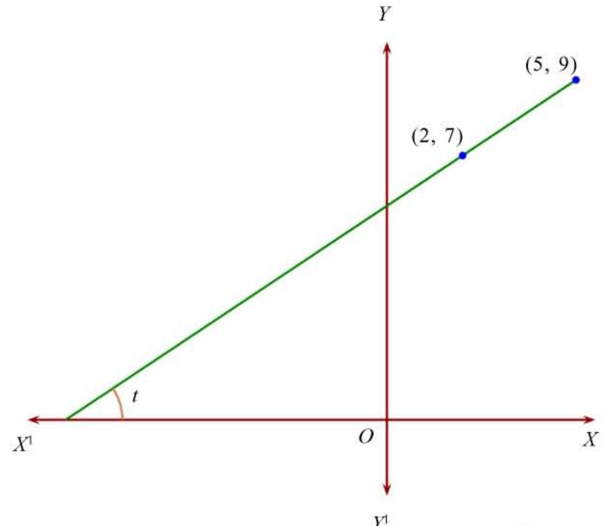
പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ,

y-അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമല്ലാത്ത ഏതു വരയിലെയും രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുടെ y-സൂചകസംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസത്തെ x-സൂചകസംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഒരേ സംഖ്യതന്നെ കിട്ടും.

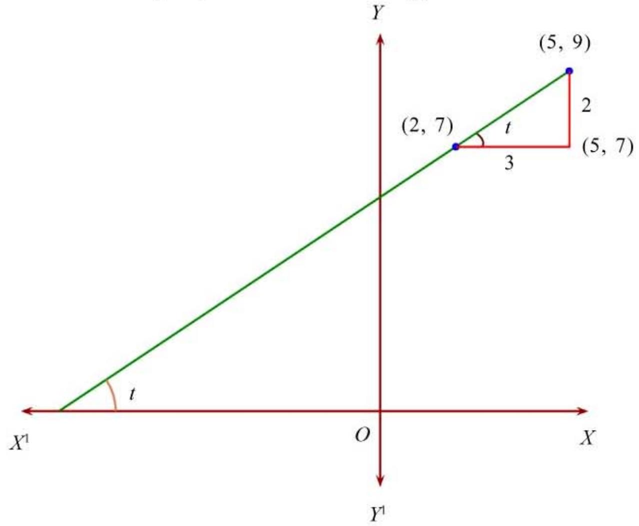
x-അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായ വരകളിലെല്ലാം ഈ സംഖ്യ പൂജ്യമാണല്ലോ (കാരണം?)

y-അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായ വരകൾക്ക് ഇത്തരം ഒരു സംഖ്യ പറയാൻ കഴിയില്ല. (എന്തുകൊണ്ട്?)

ഇനി ഈ സംഖ്യയെ ജ്യാമിതീയ രീതിയിൽക്കാണാം. ഉദാഹരണമായി $(2, 7)$, $(5, 9)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര നോക്കൂ: ഈ വര x-അക്ഷത്തെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന കോൺ t എന്നെടുക്കാം.



ലംബവശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്കു സമാന്തരമായി, ഒരു ചെറിയ മട്ടത്രികോണം മുകളിൽ വരയ്ക്കാമല്ലോ.



മുകളിലെ കോണും t തന്നെ ആകുന്നത് എന്തുകൊണ്ടാണ്?

ഈ മട്ടത്രികോണത്തിൽ നിന്ന്

ചരിവും നിരക്കും അനുപാതവും

അക്ഷങ്ങൾക്കു സമാന്തരമല്ലാത്ത ഒരു വരയിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് വേറൊരു ബിന്ദുവിലേക്കു പോകുമ്പോൾ x-സൂചകസംഖ്യകളും y-സൂചകസംഖ്യകളും മാറും.

ഉദാഹരണമായി, $(2, 7)$, $(5, 9)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര നോക്കൂ. ആദ്യം പറഞ്ഞ ബിന്ദുവിൽ നിന്ന്, രണ്ടാമതു പറഞ്ഞ ബിന്ദുവിലേക്കെത്തുമ്പോൾ x-സൂചകസംഖ്യ 3 കൂടി. y-സൂചകസംഖ്യ 2 ഉം. ഈ വരയിലെ തന്നെ മറ്റേതു സ്ഥാനത്തുള്ള ബിന്ദുക്കളിലും, x-സൂചകസംഖ്യ 3 കൂടുമ്പോൾ. y-സൂചകസംഖ്യ 2 കൂടും എന്ന കാര്യമാണ്, വരയുടെ ചരിവ് $\frac{2}{3}$ ആണെന്നു പറയുന്നതിലൂടെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

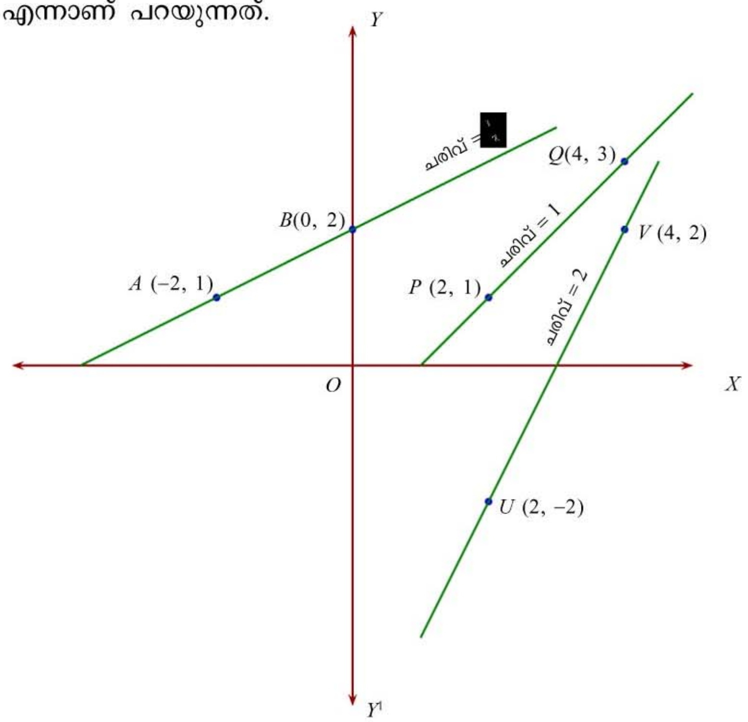
മറ്റൊരു രീതിയിൽപ്പറഞ്ഞാൽ, ഈ വരയിൽ എവിടെയും x-സൂചകസംഖ്യ 1 കൂടുമ്പോൾ y-സൂചകസംഖ്യ $\frac{2}{3}$ കൂടും. അതയാത്, x-സൂചകസംഖ്യക്കനുസരിച്ച് y-സൂചകസംഖ്യ മാറുന്നതിന്റെ നിരക്കാണ് $\frac{2}{3}$ എന്ന സംഖ്യ.

ഇക്കാര്യം ഇങ്ങനെയും പറയാം; ഈ വരയിലെ ഏതു സ്ഥാനത്തും, y-സൂചകസംഖ്യയിലെ വ്യത്യാസം, x-സൂചകസംഖ്യയിലെ വ്യത്യാസത്തിന് ആനുപാതികമാണ്; ആനുപാതികസ്ഥിരം $\frac{2}{3}$ ഉം.

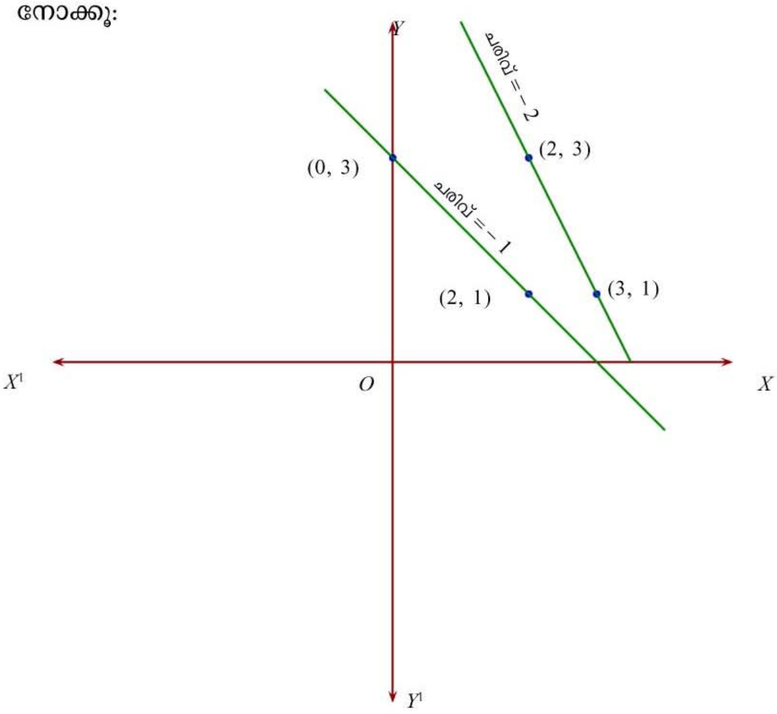
$$\tan t = \frac{2}{3}$$

എന്നു കാണാം.

അപ്പോൾ y - അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമല്ലാത്ത ഒരു വരയിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുടെ y വ്യത്യാസത്തെ x വ്യത്യാസംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യ, ആ വര x-അക്ഷവുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണിന്റെ tan അളവാണ്. ഈ കോൺ മാറുന്നതിനനുസരിച്ചാണ്, സംഖ്യയും മാറുന്നത്. അതിനാൽ, ഈ സംഖ്യയെ വരയുടെ ചരിവ് (*slope*) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

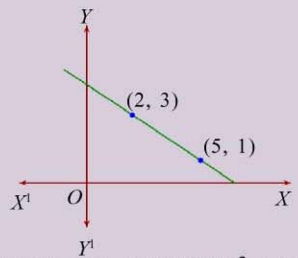


ചില വരകളുടെ ചരിവ് ന്യൂനസംഖ്യ ആകാം. ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:



ന്യൂന ചരിവുകൾ

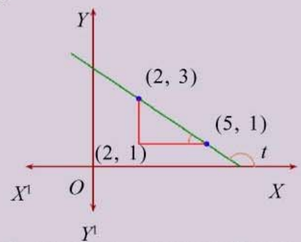
ചില വരകളുടെ ചരിവ് ന്യൂനസംഖ്യയാണല്ലോ. ഉദാഹരണമായി, (2, 3), (5, 1) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ ചരിവ് $-\frac{2}{3}$.



x-സൂചകസംഖ്യ കൂടുമ്പോൾ y-സൂചകസംഖ്യ കുറയുന്നതിനാലാണ് ചരിവ് ന്യൂനമാകുന്നത്.

ജ്യാമിതീയമായിപ്പറഞ്ഞാൽ, ഇത്തരം വരകൾ OX എന്ന ദിശയിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ മട്ടത്തിനേക്കാൾ വലുതാണ്.

ഇത്തരം വരകൾക്കും, ഈ കോണിന്റെ tan അളവ്, ചരിവിനു തുല്യമാണോ?



ചിത്രത്തിലെ രണ്ടു സദൃശത്രികോണങ്ങളിൽ നിന്ന്

$$\tan(180 - t) = \frac{2}{3}$$

എന്നു കാണാം. നിർവചനമനുസരിച്ച്, $\tan(180 - t) = -\tan t$ ആയതിനാൽ

$$-\tan t = \frac{2}{3}$$

അതുകൊണ്ട്

$$\tan t = -\frac{2}{3}$$

അപ്പോൾ ഇവിടെയും വരയുടെ ചരിവ് $\tan t$ തന്നെ.

ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കാം:

- $(3,\ 1)$, $(2,\ -1)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര x-അക്ഷത്തെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദു എന്താണ്? y-അക്ഷത്തെയോ?

  ഈ വരയുടെ ചരിവ്

$$\frac{1-(-1)}{3-2}=2$$

അതായത് ഈ വരയിലെ ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെടുത്താലും y-വ്യത്യാസത്തിനെ x-വ്യത്യാസം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 2 കിട്ടും.

അപ്പോൾ ഈ വര x-അക്ഷത്തെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദു $(x,\ 0)$ എന്നെടുത്താൽ

$$\frac{0-1}{x-3}=2$$

ഇതിൽ നിന്ന്

$$x-3=-\frac{1}{2}$$

എന്നും, തുടർന്ന്

$$x=\frac{5}{2}$$

എന്നും കാണാം. അതായത്, ഈ വര x അക്ഷത്തെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദു $\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$

ഇതുപോലെ, ഈ വര y-അക്ഷത്തെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദു $(0,\ -5)$ എന്നു കണ്ടുപിടിക്കാം. ചെയ്തുനോക്കൂ.

ഈ കണക്ക് ബീജഗണിതസഹായമില്ലാതെ ചെയ്യാമോ?

- $(3, 5)$, $(1, 7)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര $(5, 3)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുമെന്നു തെളിയിക്കുക.

  ആദ്യം പറഞ്ഞ വരയുടെ ചരിവ്

$$\frac{5-7}{3-1}=-1$$

$(3, 5)$, $(5, 3)$ ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ ചരിവോ?

$$\frac{5-3}{3-5}=-1$$

ചരിവുകൾ തുല്യമായതിനാൽ, ഈ വരകൾ x-അക്ഷവുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകളും തുല്യമാണ്. കൂടാതെ അവ രണ്ടും $(3, 5)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നുമുണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ അവ ഒരേ വര തന്നെയാണ്.

ഭൗതികം, ബീജഗണിതം, ജ്യാമിതി

ഒരു വസ്തു സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം, ആദ്യത്തെ സെക്കന്റിൽ 10 മീറ്റർ, അടുത്ത സെക്കന്റിൽ 15 മീറ്റർ, അതിനടുത്ത സെക്കന്റിൽ 20 മീറ്റർ എന്നിങ്ങനെ ക്രമമായി കൂടുന്നു എന്നു കരുതുക. അപ്പോൾ ഓരോ സെക്കന്റിലും അതിന്റെ വേഗവും മാറുന്നുണ്ടല്ലോ. അതായത്, ആദ്യത്തെ സെക്കന്റിലെ വേഗം 10 മീറ്റർ/സെക്കന്റ്, രണ്ടാമത്തെ സെക്കന്റിലെ വേഗം 15 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്നിങ്ങനെയാണ്.

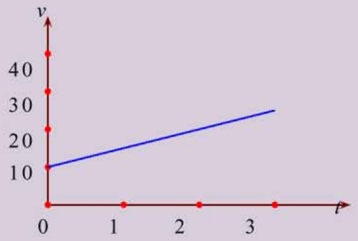
കുറേക്കൂടി ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ, വേഗം ഓരോ സെക്കന്റിലും 5 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിൽ കൂടുന്നു എന്നു പറയാം. ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിന്റെ ഭാഷയിൽ ത്വരണം *(acceleration)* 10 മീറ്റർ/സെക്കന്റ്/സെക്കന്റ് എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഈ വസ്തുവിന്റെ t സെക്കന്റിലെ വേഗം v കണ്ടുപിടിക്കാൻ

$$v=10+5t$$

എന്ന ബീജഗണിതവാക്യം ഉപയോഗിക്കാം.

ഇനി ലംബമായ രണ്ടു അക്ഷങ്ങളിൽ t യും v യും അടയാളപ്പെടുത്തി, ഈ വേഗവും, സമയവുമായുള്ള ബന്ധത്തിന്റെ ചിത്രം വരച്ചാലോ? (**ഭൗതിക ബന്ധങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം നോക്കുക).



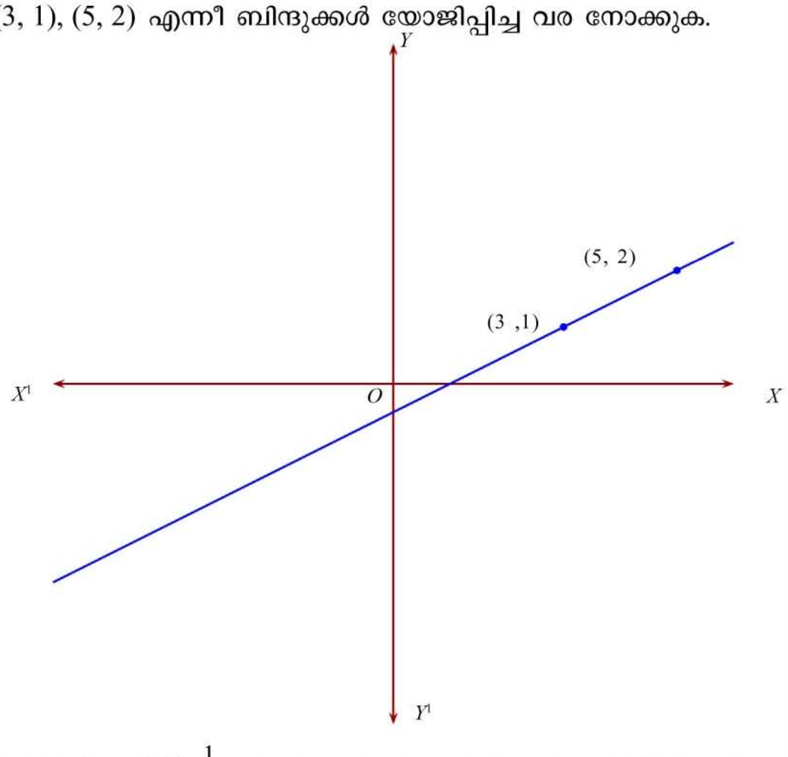
ഈ വരയുടെ ചരിവ് 5 ആണ്. ഇവിടെ ചരിവ് എന്നത്, t കൂടുന്നതനുസരിച്ച് v കൂടുന്നതിന്റെ നിരക്കാണല്ലോ; അതായത്, ത്വരണം.

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ സ്വയം ചെയ്തു നോക്കൂ:

- (2, 3), (3, –1) ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര (5, 6) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുമോ? (5, –9) ആയാലോ?
- (1, 4), (4, 1), $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ വരയിലാണെന്നു തെളിയിക്കുക.
- (2, 3), (7, 5), (9, 8), (4, 6) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ മൂലകളാണ് എന്നു തെളിയിക്കുക.
- (2, 1), (1, 2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയും, (3, 5), (4, 7) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയും സമാന്തരമല്ലെന്നു തെളിയിക്കുക. ഇവ തമ്മിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്താണ്?
- (1, 3) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ, ചരിവ് $\frac{1}{2}$ ആയി വരയ്ക്കുന്ന വരയിലെ മറ്റു രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ എഴുതുക.
- (1, 3) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ, ചരിവ് $\frac{1}{2}$ ആയി വരയ്ക്കുന്ന വരയിലേയും, അതേ ബിന്ദുവിലൂടെ ചരിവ് –2 ആയി വരയ്ക്കുന്ന വരയിലേയും മറ്റോരോ ബിന്ദു കൂടി എഴുതുക. ഈ വരകൾ പരസ്പരം ലംബമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

വരയുടെ സമവാക്യം

(3, 1), (5, 2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച വര നോക്കുക.



ഇതിന്റെ ചരിവ് $\frac{1}{2}$ ആണല്ലോ. അപ്പോൾ, ഈ വരയിലെ ഏതു ബിന്ദു (x, y) എടുത്താലും,

ചരിവും സമാന്തരവും

രണ്ടു വരകൾക്ക് ഒരേ ചരിവാകാം. ഉദാഹരണമായി, (3, 4), (2, 1) ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടേയും, (1, 2), (3, 8) ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെയും ചരിവ് 3 തന്നെയാണല്ലോ.
രണ്ടു വരകളുടെ ചരിവ് തുല്യമാണെങ്കിൽ, അവ x-അക്ഷത്തിന്റെ അധിസംഖ്യാഭാഗവുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ തുല്യമാണ്; അതിനാൽ അവ സമാന്തരമാണ്. മറിച്ച്, സമാന്തരമായ രണ്ടു രേഖകളുടെ ചരിവുകൾ തുല്യവുമാണ് (എന്തുകൊണ്ട്?)

$$\frac{y-1}{x-3} = \frac{1}{2}$$ ആയിരിക്കണം.

ഇതിൽ നിന്ന്

$$2(y - 1) = x - 3$$ എന്നും,

തുടർന്ന്

$$x - 2y - 1 = 0$$

എന്നും എഴുതാം.

അതായത്, ഈ വരയിലെ ഏതു ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ (x, y) എന്നെടുത്താലും ഈ സമവാക്യം അനുസരിക്കും.

മറിച്ചു ചിന്തിച്ചാലോ? ഈ സമവാക്യം അനുസരിക്കുന്ന ഒരു ജോടി സംഖ്യകൾ (x, y) എടുത്തുവെന്നു കരുതുക. (x, y) എന്ന ബിന്ദു, മുൻപറഞ്ഞ വരയിലാണോ?

$x - 2y - 1 = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ നിന്ന് $x = 2y + 1$ എന്നു കിട്ടുമല്ലോ. അപ്പോൾ

$$\frac{y-1}{x-3} = \frac{y-1}{(2y+1)-3} = \frac{y-1}{2y-2} = \frac{1}{2}$$

അതായത്, (x, y), $(3, 1)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയ്ക്കും, $(3, 1)$, $(5, 2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയ്ക്കും ഒരേ ചരിവാണ്. അതിനാൽ, അവ x-അക്ഷവുമായി ഉണ്ടാകുന്ന കോൺ തുല്യമാണ്. അവ രണ്ടും $(3, 1)$ എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നു. ഇതെല്ലാം വച്ചു നോക്കുമ്പോൾ, ഇവ ഒരേ വരയാണെന്നു കാണാം. അതായത്, (x, y) നമ്മുടെ വരയിൽത്തന്നെയാണ്.

എന്നാൽ $(3, 4)$ എന്ന ബിന്ദു, ഈ വരയിലാണോ?

$$3 - (2 \times 4) - 1 = -6 \neq 0$$

അതിനാൽ, ഈ ബിന്ദു നമ്മുടെ വരയിലല്ല.

$(3, 1)$ ആയാലോ?

$$3 - (2 \times 1) - 1 = 0$$

അതിനാൽ, ഈ ബിന്ദു നമ്മുടെ വരയിലാണ്.

വരയും, സമവാക്യവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ഒന്നുകൂടി നോക്കാം:

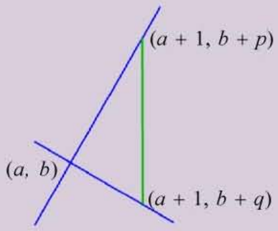
- $(3, 1)$, $(5, 2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലെ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകളാണ് (x, y) എങ്കിൽ $x - 2y - 1 = 0$ ആണ്.
- $x - 2y - 1 = 0$ ആയ രണ്ടു സംഖ്യകളാണ് x, y എങ്കിൽ, (x, y) സൂചകസംഖ്യകളായ ബിന്ദു, $(3, 1)$, $(5, 2)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലാണ്.

ചരിവും ലംബവും

സമാന്തര വരകളുടെ ചരിവുകൾ തുല്യമാണെന്നു കണ്ടല്ലോ. പരസ്പരം ലംബമായി ഖണ്ഡിക്കുന്ന രണ്ടു വരകളുടെ ചരിവുകൾ തമ്മിലെന്താണു ബന്ധം?

ചരിവുകൾ p, q ആയ രണ്ടു വരകൾ പരസ്പരം ഖണ്ഡിക്കുന്നു എന്ന് കരുതുക. ഇവ കൂട്ടി മുട്ടുന്ന ബിന്ദു (a, b) എന്നെടുക്കാം.

അപ്പോൾ $(a + 1, b + p)$ എന്ന ബിന്ദു, ആദ്യത്തെ വരയിലാണ്; $(a + 1, b + q)$ എന്ന ബിന്ദു രണ്ടാമത്തെ വരയിലും. (കാരണം?)



വരകൾ ലംബമായതിനാൽ

$$(a, b), (a+1, b+p), (a+1, b+q)$$

എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളാണ്; രണ്ടാമത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചതാണ് കർണം. ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങളുടെ നീളങ്ങളുടെ വർഗം $p^2 + 1, q^2 + 1$ എന്നിവയും, കർണത്തിന്റെ നീളം $|p - q|$ ഉം ആയതിനാൽ.

$$(p^2+1) + (q^2+1) = (p-q)^2$$

എന്നു കിട്ടും. ഇതു ലഘൂകരിച്ചാൽ

$$2 = -2pq$$

അഥവാ

$$pq = -1$$

അതായത്,

പരസ്പരം ലംബമായ വരകളിൽ ഒരു വരയുടെ ചരിവ്, മറ്റേ വരയുടെ ചരിവിന്റെ വ്യുൽക്രമത്തിന്റെ ന്യൂനമാണ്.

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ

(3, 1), (5, 2) എന്നിവ സൂചകസംഖ്യകളായ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലെ ബിന്ദുക്കളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യാജോടികളുടെ കൂട്ടവും, $x - 2y - 1 = 0$ എന്ന സമവാക്യം അനുസരിക്കുന്ന സംഖ്യാജോടികളുടെ കൂട്ടവും ഒന്നു തന്നെയാണ്.

ഇത് അൽപംകൂടി ചുരുക്കി

(3, 1), (5, 2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ സമവാക്യം $x - 2y - 1 = 0$

എന്നാണ് പറയുക.

ഇതുപോലെ (2, 5), (−1, 4) ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ സമവാക്യം കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കാം:

- (2, 5) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ, ചരിവ് $\frac{2}{3}$ ആയി വരയ്ക്കുന്ന വരയുടെ സമവാക്യമെന്താണ്?

  ഈ വരയിലെ ഏതു ബിന്ദു (x, y) എടുത്താലും

$$\frac{y-5}{x-2} = \frac{2}{3}$$

  ആകണമല്ലോ. (എന്തുകൊണ്ട്?) ഇതുതന്നെയാണ് വരയുടെ സമവാക്യം. ഇതു ലഘൂകരിച്ച്,

$$2x - 3y + 11 = 0$$

  എന്നെഴുതാം.

- $2x - 3y + 4 = 0$ സമവാക്യമായ വരയുടെ ചരിവ് എത്രയാണ്?

  ഈ വരയിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ (x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നെടുത്താൽ

$$2x_1 - 3y_1 + 4 = 0$$
$$2x_2 - 3y_2 + 4 = 0$$

  എന്നു കിട്ടും. അപ്പോൾ

$$(2x_1 - 3y_1 + 4) - (2x_2 - 3y_2 + 4) = 0$$

  ആകണമല്ലോ. അതായത്,

$$2(x_1 - x_2) - 3(y_1 - y_2) = 0$$

  ഇതിൽ നിന്ന്

$$2(x_1 - x_2) = 3(y_1 - y_2)$$

  എന്നും,

വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം

കേന്ദ്രം (1, 2) എന്ന ബിന്ദുവും, ആരം 4 ഉം ആയ ഒരു വൃത്തം വരച്ചുവെന്നു കരുതുക. ഇതിലെ ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകളുടെ സവിശേഷത എന്താണ്?

വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് അതിലെ ഏതു ബിന്ദുവിലേക്കുമുള്ള അകലം, ആരത്തിനു തുല്യമാണല്ലോ.

അപ്പോൾ (x, y) എന്ന ബിന്ദു ഈ വൃത്തത്തിലാണെങ്കിൽ,

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$$

ആയിരിക്കണം; മറിച്ച്, ഈ സമവാക്യം അനുസരിക്കുന്ന ഏതു സംഖ്യകൾ x, y എടുത്താലും, (x, y) എന്ന ബിന്ദു ഈ വൃത്തത്തിലായിരിക്കും.

അതായത്

കേന്ദ്രം (1, 2) എന്ന ബിന്ദുവും, ആരം 4 ഉം ആയ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$

തുടർന്ന്,

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{2}{3}$$

എന്നും കാണാം. അതായത്, വരയുടെ ചരിവ് $\frac{2}{3}$ ആണ്.

മറ്റൊരു രീതിയിലും ആലോചിക്കാം. ആദ്യം ഈ വരയിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ കണ്ടുപിടിക്കണം. അതിന് $2x - 3y + 4 = 0$ എന്ന സമവാക്യം അനുസരിക്കുന്ന രണ്ടു ജോടി സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിച്ചാൽ മതി. ഉദാഹരണമായി, $(1, 2)$, $(4, 4)$ എന്നിവ വരയിലെ ബിന്ദുക്കളായതിനാൽ, വരയുടെ ചരിവ് $= \frac{4-2}{4-1} = \frac{2}{3}$

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ സ്വയം ചെയ്തുനോക്കൂ:

- ആധാരബിന്ദുവും $(4, 2)$ എന്ന ബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയിലെ ബിന്ദുക്കളുടെയെല്ലാം x-സൂചകസംഖ്യ y-സൂചകസംഖ്യയുടെ രണ്ടുമടങ്ങാണെന്നു തെളിയിക്കുക. ഈ വരയുടെ സമവാക്യം എന്താണ്?
- $(1, 3)$, $(2, 7)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയുടെ സമവാക്യം എന്താണ്? (x, y) എന്ന ബിന്ദു ഈ വരയിലാണെങ്കിൽ, $(x+1, y+4)$ എന്ന ബിന്ദുവും ഈ വരയിൽത്തന്നെയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.
- $2x + 4y - 1 = 0$ എന്ന വര x-അക്ഷത്തെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദു എന്താണ്? y-അക്ഷത്തെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുവോ?
- $3x + 2y + 5 = 0$ ഉം $3x + 2y - 1 = 0$ ഉം സമവാക്യങ്ങളായ വരകൾ സമാന്തരമാണെന്നു തെളിയിക്കുക. ഇവ x-അക്ഷത്തെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ എന്താണ്? y-അക്ഷത്തെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളോ?
- $3x + 2y + 5 = 0$ ഉം $2x - 3y - 1 = 0$ ഉം സമവാക്യങ്ങളായ വരകൾ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദു എന്താണ്? ഓരോ വരയിലേയും മറ്റൊരു ബിന്ദു കൂടി എഴുതുക. ഈ വരകൾ പരസ്പരം ലംബമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ഗണിതസമന്വയം

ബിന്ദുക്കളെ സംഖ്യാജോടികളാക്കുന്നതിലൂടെ, ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങളെ ബീജഗണിത സമവാക്യങ്ങളാക്കിയും, മറിച്ചും, പഠിക്കുന്ന രീതിയാണ് ദേക്കാർത്ത് തുടങ്ങി വച്ചത്. അതുവരെ ഗണിതത്തിലെ രണ്ടു വ്യത്യസ്ത ശാഖകളായിരുന്ന ബീജഗണിതത്തേയും, ജ്യാമിതിയേയും യോജിപ്പിക്കുന്ന ഈ രീതിക്ക്, വിശകലനജ്യാമിതി (Analytic Geometry) എന്നാണ് പേര്.

ഗണിതചിന്തയിലും, ഗണിതം ഉപയോഗിക്കുന്ന മറ്റു ശാസ്ത്രങ്ങളിലുമെല്ലാം വമ്പിച്ച മാറ്റങ്ങളുണ്ടാക്കിയ കലനം (Calculus) എന്ന ഗണിതശാഖയുടെ അടിസ്ഥാനം, ജ്യാമിതിയെക്കുറിച്ചുള്ള ഈ പുതിയ വീക്ഷണമാണ്. ദ്വന്ദ്വങ്ങളുടെ സമന്വയത്തിലൂടെയാണല്ലോ പുരോഗതി ഉണ്ടാകുന്നത്.

11 സ്ഥിതിവിവരക്കണക്ക്

ആവൃത്തിപ്പട്ടികയും മാധ്യവും

ഒരു ക്ലാസിലെ കുട്ടികളുടെ പഠനനിലവാരമറിയാനും, ഒരു പ്രദേശത്തെ ആളുകളുടെ സാമ്പത്തികനിലവാരമറിയാനുമെല്ലാം മാധ്യം, മധ്യമം മുതലായ സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നതു കണ്ടല്ലോ. ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

- ഒരു തൊഴിൽശാലയിൽ പലതരം ജോലി ചെയ്യുന്നവരുടെ എണ്ണവും ദിവസക്കൂലിയും ചുവടെയുള്ള പട്ടികയിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

ദിവസക്കൂലി (രൂപ)	ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം
210	2
225	4
250	6
270	2
300	1

മാധ്യമായ ദിവസക്കൂലി എത്രരൂപയാണ്?

ഇവിടെ മാധ്യമെന്നത്, ആകെ കൂലിയെ തൊഴിലാളികളുടെ എണ്ണം കൊണ്ടു ഹരിച്ചുകിട്ടുന്ന സംഖ്യയാണല്ലോ. പട്ടികയിൽ ആകെ കൂലി കണ്ടുപിടിച്ചിരിക്കുന്നത് നോക്കൂ.

ദിവസക്കൂലി (രൂപ)	ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം	ആകെ കൂലി (രൂപ)
210	2	420
225	4	900
250	6	1500
270	2	540
300	1	300
ആകെ	**15**	**3660**

ആവർത്തനസങ്കലനം

ഒരു കൂട്ടം സംഖ്യകളുടെ മാധ്യം കണ്ടുപിടിക്കാൻ അവയുടെ തുകയെ, എണ്ണം കൊണ്ടു ഹരിക്കണം. ഇതിൽ ചില സംഖ്യകൾ ആവർത്തിച്ചു വരുന്നുണ്ടെങ്കിൽ, അവയുടെ തുക ഗുണിച്ചു കണ്ടുപിടിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, 10 കുട്ടികളുടെ വയസ് എഴുതിവച്ചത്, ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നതു പോലെയാണെന്നു കരുതുക:

13	13	14	15	13
15	14	15	13	15

ഇവയുടെ തുക

$$(4 \times 13) + (2 \times 14) + (4 \times 15) = 140$$

എന്നു കണക്കുകൂട്ടുന്നതല്ലേ എളുപ്പം?

ഇതിൽ നിന്ന്, മാധ്യം

$$\frac{140}{10} = 14$$

എന്നു കണ്ടുപിടിക്കുകയും ചെയ്യാം.

അപ്പോൾ മാധ്യം

$$3660 \div 15 = 244$$

ഇനി ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

- ഒരു പ്രദേശത്തു താമസിക്കുന്ന 50 പേരെ ദിവസവരുമാനത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ തരംതിരിച്ച പട്ടികയാണ് ചുവടെയുള്ളത്?

ദിവസവരുമാനം (രൂപ)	ആളുകളുടെ എണ്ണം
145 - 155	7
155 - 165	9
165 - 175	14
175 - 185	11
185 - 195	7
195 - 205	2

മാധ്യമായ ദിവസവരുമാനം എത്രയാണ്?

ഇതിലെ 50 പേരുടെ ഒരു ദിവസത്തെ ആകെ വരുമാനം എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

ഈ പട്ടികയ്ക്ക് ആദ്യത്തെ പട്ടികയിൽ നിന്ന് എന്താണ് വ്യത്യാസം?

ഉദാഹരണമായി, ഇതിലെ ആദ്യത്തെ വരിയിൽനിന്ന് 145 രൂപ മുതൽ 155 രൂപ വരെ ദിവസവരുമാനം ഉള്ള 7 പേരുണ്ടെന്നു മാത്രമേ കിട്ടുന്നുള്ളു; 145 രൂപ വരുമാനമുള്ളവർ എത്രയുണ്ടെന്നോ, 155 രൂപ വരുമാനമുള്ളവർ എത്രയുണ്ടെന്നോ കിട്ടുന്നില്ല. അപ്പോൾ ഈ 7 പേരുടെ ആകെ ദിവസവരുമാനം എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

ആകെ ദിവസവരുമാനം കിട്ടാൻ, ഈ 7 പേരുടെയും വരുമാന വിവരങ്ങൾ വെവ്വേറെ വേണമെന്നില്ല; അവരുടെ മാധ്യവരുമാനം കിട്ടിയാലും മതി. ഇവിടെ, മാധ്യം ഏതായാലും 145 നും 155 നും ഇടയ്ക്കായിരിക്കുമല്ലോ. (**ചെറുതും വലുതും മാധ്യവും** എന്ന ഭാഗം നോക്കുക) മാത്രവുമല്ല, ഇത് 150 നോടടുത്ത ഒരു സംഖ്യയുമായിരിക്കും. അതിനാൽ ഈ മാധ്യം 150 എന്നെടുത്താണ് കണക്കു തുടരുന്നത്.

ഇതുപോലെ 155 രൂപയ്ക്കും 165 രൂപയ്ക്കുമിടയിൽ ദിവസവരുമാനമുള്ള 9 പേരുടെ മാധ്യവരുമാനം, 155 ന്റേയും 165 ന്റേയും മധ്യത്തുള്ള 160 ആയി എടുക്കാം.

ചെറുതും വലുതും മാധ്യവും

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ മാധ്യം അവയുടെ കൃത്യം നടുക്കുള്ള സംഖ്യയാണല്ലോ. ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ചു പറഞ്ഞാൽ, a, b എന്ന രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ മാധ്യം $\frac{1}{2}(a+b)$.

മൂന്നു സംഖ്യകളായാലോ? അവ ആരോഹണ ക്രമത്തിൽ a, b, c ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. മാധ്യം $\frac{1}{3}(a+b+c)$. ഇതിൽ b, c എന്നിവ a യെക്കാൾ വലുതോ, a യ്ക്ക് തുല്യമോ ആയതിനാൽ, $\frac{1}{3}(a+b+c)$ എന്നത് $\frac{1}{3}(a+a+a)=a$ യേക്കാൾ വലുതോ, a യ്ക്ക് തുല്യമോ ആണ്. മറിച്ച്, a, b എന്നിവ c യെക്കാൾ ചെറുതോ, c യ്ക്ക് തുല്യമോ ആയതിനാൽ, $\frac{1}{3}(a+b+c)$ എന്നത് $\frac{1}{3}(c+c+c)=c$ യേക്കാൾ ചെറുതോ, c യ്ക്ക് തുല്യമോ ആണ്.

അതായത്, മാധ്യം, ഏറ്റവും ചെറിയ സംഖ്യ a യ്ക്കും, ഏറ്റവും വലിയ സംഖ്യ c യ്ക്കും ഇടയിലാണ്.

സംഖ്യകൾ നാലായാലും ഇതു ശരിയല്ലേ? പരിശോധിച്ചു നോക്കൂ. കൂടുതൽ സംഖ്യകളെടുത്താലോ?

ഇങ്ങനെ ആദ്യത്തെ പട്ടിക ചുവടെ കാണുന്നതുപോലെ വലുതാക്കാം.

ദിവസവരുമാനം (രൂപ)	ആളുകളുടെ എണ്ണം	വിഭാഗമാധ്യം (രൂപ)	ആകെ വരുമാനം
145 - 155	7	150	1050
155 - 165	9	160	1440
165 - 175	14	170	2380
175 - 185	11	180	1980
185 - 195	7	190	1330
195 - 205	2	200	400
ആകെ	**50**		**8580**

ഇനി മാധ്യം കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ.

$$8580 \div 50 = 171.6$$

അതായത്, മാധ്യദിവസവരുമാനം 172 രൂപ എന്നെടുക്കാം.

ഇതുപോലെ ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ:

- ഒരു പ്രദേശത്തു ലഭിച്ച മഴയുടെ അളവ് അനുസരിച്ച്, ഒരു മാസത്തെ ദിവസങ്ങളെ തരംതിരിച്ച പട്ടികയാണ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്.

മഴയുടെ അളവ് (മി.മീ.)	ദിവസങ്ങളുടെ എണ്ണം
54	3
56	5
58	6
55	3
50	2
47	4
44	5
41	2

ആ മാസം അവിടെ ഒരു ദിവസം ലഭിച്ച മഴയുടെ മാധ്യഅളവ് കണക്കാക്കുക.

വിതരണവും മാധ്യവും

145 നും 155 നും ഇടയ്ക്കുള്ള 7 സംഖ്യകൾ, ചുവടെപ്പറഞ്ഞിരിക്കുന്നതുപോലെയാണെന്നിരിക്കട്ടെ.

145, 147, 147, 150, 152, 152, 155

ഇവയുടെ മാധ്യം ഏകദേശം 149.71 എന്നുകാണാം.

ഈ സംഖ്യകൾ, മധ്യത്തിലെ സംഖ്യയായ 150ന് ഇരുപുറവും ഏതാണ്ട് ഒരേപോലെ വിതരണം ചെയ്തിരിക്കുകയാണല്ലോ. മാധ്യമായ 149.71 എന്ന സംഖ്യയ്ക്ക് 150 ൽ നിന്ന് ഏറെ വ്യത്യാസമില്ലതാനും.

ഇനി സംഖ്യകൾ ചുവടെപ്പറഞ്ഞിരിക്കുന്നതുപോലെയാണെങ്കിലോ?

145, 145, 145, 146, 146, 148, 155

ഇവയിൽ മിക്കതും 145 നോട് അടുത്തുള്ളവയാണ്. മാധ്യമോ? ഏതാണ്ട് 147.14

സംഖ്യകൾ ഏറിയപങ്കും 155 നോടാണ് അടുത്തിരിക്കുന്നതെങ്കിലോ?

- ഒരു സമിതിയിലെ അംഗങ്ങളെ പ്രായമനുസരിച്ചു എണ്ണം തിരിച്ച പട്ടികയാണിത്.

പ്രായം	ആളുകളുടെ എണ്ണം
25 - 30	6
30 - 35	14
35 - 40	16
40 - 45	22
45 - 50	5
50 - 55	4
55 - 60	3

ഈ സമിതിയിലെ അംഗങ്ങളുടെ മാധ്യവയസ് കണക്കാക്കുക.

- ഒരു സ്കൂളിൽ പത്താംക്ലാസിൽ പഠിക്കുന്ന കുട്ടികളെ ഉയരമനുസരിച്ച് എണ്ണം തിരിച്ച പട്ടികയാണ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്. മാധ്യഉയരം കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഉയരം (സെ.മീ.)	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
120 - 125	19
125 - 130	36
130 - 135	23
135 - 140	23
140 - 145	43
145 - 150	21
150 - 155	23
155 - 160	12

മധ്യവും മാധ്യവും

സമാന്തരശ്രേണിയിലായ ഒരു കൂട്ടം സംഖ്യകളുടെ തുക, ആദ്യപദത്തിന്റേയും അവസാനപദത്തിന്റെയും തുകയുടെ പകുതിയെ എണ്ണം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണല്ലോ. അപ്പോൾ ഈ സംഖ്യകളുടെ മാധ്യം, ആദ്യസംഖ്യയുടേയും അവസാനസംഖ്യയുടേയും തുകയുടെ പകുതിയാണ്; അതായത്, ആദ്യ സംഖ്യയുടേയും അവസാനസംഖ്യയുടേയും മധ്യത്തിലുള്ള സംഖ്യ.

സമാന്തരശ്രേണിയിലായ സംഖ്യകളിൽ, ആദ്യത്തേയും അവസാനത്തെയും സംഖ്യകളുടെ മധ്യത്തിലുള്ള സംഖ്യയുടെ ഇരുപുറവും ഒരേപോലെയാണല്ലോ സംഖ്യകൾ വിതരണം ചെയ്തിരിക്കുന്നത്.

ആവൃത്തിപ്പട്ടികയും മധ്യമവും

ചില സന്ദർഭങ്ങളിൽ വിവരങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള ശരിയായ ധാരണയുണ്ടാക്കാൻ മാധ്യംകൊണ്ടു കഴിയില്ല എന്നു കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. പട്ടികനോക്കൂ. ഇതിൽ, ഒരു പ്രദേശത്തെ 25 കുടുംബങ്ങളെ മാസവരുമാനത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ എണ്ണം തിരിച്ചിരിക്കുന്നു.

മാസവരുമാനം (രൂപ)	കുടുംബങ്ങളുടെ എണ്ണം
4000	2
5000	6
6000	7
7000	3
8000	3
9000	2
10000	2
ആകെ	**25**

ഇതിൽ മാധ്യവരുമാനം 6520 രൂപ എന്നാണ് കിട്ടുന്നത് (ചെയ്തു നോക്കൂ). എന്നാൽ പട്ടികയിൽനിന്ന്, ഇതിലെ അറുപതു ശതമാനം കുടുംബങ്ങളുടെയും വരുമാനം ആറായിരമോ അതിൽ താഴെയോ ആണെന്നു കാണാം. അപ്പോൾ മാധ്യം അത്ര ശരിയായ സൂചനയല്ല.

ഇവിടെ മധ്യമം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതെങ്ങനെയാണ്? നടുക്കു വരുന്നതാണ് മധ്യമം എന്നറിയാമല്ലോ. അതായത്, ഇവിടെ 12 കുടുംബങ്ങളുടെ മാസവരുമാനം മധ്യമവരുമാനത്തേക്കാൾ കുറവായിരിക്കണം; 12 കുടുംബങ്ങളുടേത് കൂടുതലും.

ഇതു കണക്കാക്കാൻ, വരുമാനങ്ങളെ ആരോഹണക്രമത്തിലെഴുതി, പതിമൂന്നാമത്തെ കുടുംബത്തിന്റെ വരുമാനം കണ്ടുപിടിച്ചാൽ മതി. പട്ടികയിൽനിന്ന്, ആദ്യത്തെ 2 കുടുംബങ്ങളുടെ വരുമാനം 4000, അടുത്ത 6 കുടുംബങ്ങളുടേത് 5000; അതായത്, ആദ്യത്തെ 8 കുടുംബങ്ങളെടുക്കുമ്പോൾ, വരുമാനം 5000 വരെയെത്തി. നമുക്കുവേണ്ടത്, ഈ ക്രമത്തിൽ 13-ാം കുടുംബത്തിന്റെ വരുമാനമാണ്. അപ്പോൾ അടുത്ത 5 കുടുംബങ്ങളേയും കൂടി എടുക്കണം. അടുത്ത 7 കുടുംബങ്ങളുടേയും വരുമാനം 6000 ആണല്ലോ. അതായത്, 9 മുതൽ 15 വരെയുള്ള കുടുംബങ്ങളുടെ മാസവരുമാനം 6000 ആണ്. അപ്പോൾ 13-ാം കുടുംബത്തിന്റെ വരുമാനവും ഇതുതന്നെ. അതിനാൽ മധ്യമവരുമാനം 6000 രൂപയാണ്.

മാധ്യവും മധ്യമവും

കുറെയേറെ സംഖ്യകളായി നൽകിയിരിക്കുന്ന വിവരങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള ഒരേകദേശധാരണ പെട്ടെന്നു കിട്ടാൻ വേണ്ടിയാണല്ലോ, മാധ്യം മധ്യമം മുതലായ സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നത്. (ഒമ്പതാംക്ലാസിലെ **സ്ഥിതിവിവരക്കണക്ക്** എന്ന പാഠത്തിലെ **സാംഖ്യിക രീതി** എന്ന ഭാഗം നോക്കുക.)

ഒരു ആവൃത്തിപ്പട്ടികയിൽ, നടുക്കുള്ള ആവൃത്തി താരതമ്യേന കൂടുതലായിരിക്കുകയും, അതിനിരുപുറത്തുമുള്ള ആവൃത്തികൾ ഏതാണ്ടൊരുപോലെ കുറഞ്ഞിരിക്കുകയും ചെയ്യുന്ന അവസരങ്ങളിൽ, മാധ്യം ഈ സംഖ്യകളുടെ വിതരണത്തെക്കുറിച്ച് ഏറെക്കുറെ ശരിയായ ചിത്രം തരുന്നുണ്ട്.

എന്നാൽ, ഏതെങ്കിലും ഒരറ്റത്തുള്ള ആവൃത്തി വളരെ കൂടിയിരിക്കുന്ന സന്ദർഭങ്ങളിൽപോലും മാധ്യം ആ ഭാഗത്തേയ്ക്ക് കൂടുതൽ നീങ്ങും; അത് വിവരങ്ങളുടെ ശരിയായ സൂചന ആകുകയുമില്ല. അത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ മധ്യമമാണ് കുറേക്കൂടി നന്നായി പട്ടികയിലെ വിവരങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

ഈ കണക്കുകൂട്ടൽ എളുപ്പമാക്കാൻ, നമ്മുടെ പട്ടിക ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ മാറ്റിയെഴുതാം.

മാസവരുമാനം (രൂപ)	കുടുംബങ്ങളുടെ എണ്ണം
4000 വരെ	2
5000 വരെ	8
6000 വരെ	15
7000 വരെ	18
8000 വരെ	21
9000 വരെ	23
10000 വരെ	25

ഇനി പട്ടികപ്പെടുത്തിയത്, വിഭാഗങ്ങളായിട്ടാണെങ്കിലോ?

ഈ പട്ടിക നോക്കുക. ഒരു ക്ലാസിലെ കുട്ടികളെ ഉയരമനുസരിച്ച് എണ്ണം തിരിച്ചതാണ് ഇതിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.

ഉയരം (സെ.മീ.)	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
135 - 140	4
140 - 145	7
145 - 150	18
150 - 155	11
155 - 160	6
160 - 165	5
ആകെ	**51**

ഇതിലും ആദ്യം, ആവൃത്തികൾ കൂട്ടിക്കൂട്ടി, ഓരോ നിശ്ചിത നീളത്തേക്കാൾ ഉയരം കുറവായ കുട്ടികളുടെ എണ്ണം കാണിക്കുന്ന വിധം പട്ടിക മാറ്റിയെഴുതാം:

ഉയരം (സെ.മീ.)	കുട്ടികളുടെ എണ്ണം
140 നേക്കാൾ കുറവ്	4
145 നേക്കാൾ കുറവ്	11
150 നേക്കാൾ കുറവ്	29
155 നേക്കാൾ കുറവ്	40
160 നേക്കാൾ കുറവ്	46
165 നേക്കാൾ കുറവ്	51

സഞ്ചിതാവൃത്തി

വിഭാഗങ്ങളും അവയിലോരോന്നിലേയും ആവൃത്തികളുമായി ചിട്ടപ്പെടുത്തിയ ഒരു പട്ടികയിൽ, ഓരോ വിഭാഗത്തിലേയും ഉയർന്ന പരിധി വരെയുള്ള ആവൃത്തികൾ കൂട്ടിയെഴുതുന്നതു കണ്ടല്ലോ. ഇവയെ സഞ്ചിതാവൃത്തികൾ *(cumulative frequencies)* എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഓരോ ഘട്ടത്തിലും, വിഭാഗത്തിലെ സംഖ്യകളുടെ മാറ്റവും, സഞ്ചിതാവൃത്തികളുടെ മാറ്റവും ആനുപാതികമാണെന്ന സങ്കൽപത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ, സഞ്ചിതാവൃത്തി മൊത്തം ആവൃത്തിയുടെ നേർപകുതിയാകുന്ന സംഖ്യയാണ് മധ്യമമായി എടുക്കുന്നത്.

സാധ്യതാസിദ്ധാന്തവുമായി ബന്ധപ്പെട്ടാണ് ഇത്തരമൊരു ആശയം ആദ്യം പ്രത്യക്ഷപ്പെടുന്നത്. ആയുർദൈർഘ്യത്തെക്കുറിച്ചുള്ള ഒരു പട്ടികയിൽ നിന്ന്, ഒരാൾ തുടർന്നു ജീവിക്കാനും, മരിച്ചുപോകാനും തുല്യസാധ്യതയുള്ള പ്രായം കണ്ടുപിടിക്കാമോ എന്നതായിരുന്നു പ്രശ്നം. ഇതിന് ആ പ്രായം വരെയുള്ളവരുടേയും, അതു കഴിഞ്ഞുള്ളവരുടേയും എണ്ണം തുല്യമാകണമല്ലോ.

ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ മധ്യമത്തിന്റെ അർത്ഥം തന്നെ തികച്ചും ഗണിതപരമായ രീതിയിലാണ്. മുകളിലെ ഉദാഹരണത്തിൽ, ആദ്യത്തെ നിരയിലെ 140, 145, 150, ... എന്നിങ്ങനെയുള്ള സംഖ്യകളും രണ്ടാംനിരയിലെ 4, 11, 29, ... എന്നിങ്ങനെയുള്ള സംഖ്യകളും ചുവടെ കാണുന്നതുപോലെ പട്ടികയാക്കാം:

x	140	145	150	155	160	165
y	4	11	29	40	46	51

x ആയി എടുത്ത സംഖ്യകളുടേയെല്ലാം ഇടയിൽ മറ്റു സംഖ്യകൾ ഉണ്ടല്ലോ. ഇവയുമായി ബന്ധപ്പെട്ട y സംഖ്യകൾ ഏതെന്നു നമുക്കറിയില്ല. അതു കണ്ടുപിടിക്കാൻ, ഓരോ ഘട്ടത്തിലും x ലെ മാറ്റവും, y ലെ മാറ്റവും ആനുപാതികമാണെന്നാണ് സങ്കൽപിക്കുന്നത്.

ഉദാഹരണമായി, x എന്ന ചരം 140 ൽ നിന്ന് 145 ലേക്കു മാറുമ്പോൾ y എന്ന ചരം 4 ൽനിന്ന് 11 ആകുന്നു. അപ്പോൾ $x = 141$ എന്നതിന്റെ y കണ്ടുപിടിക്കാൻ, ആനുപാതിക സങ്കൽപം ഉപയോഗിച്ച്,

$$\frac{y-4}{141-140} = \frac{11-4}{145-140}$$

എന്നെടുക്കുന്നു. ഇതിൽ നിന്ന്

$$y - 4 = \frac{7}{5}$$

എന്നും തുടർന്ന്

$$y = \frac{27}{5} = 5.4$$

എന്നും കിട്ടും. മറിച്ച്, y ഒരു നിശ്ചിതസംഖ്യ ആകാൻ x എന്തായിരിക്കുമെന്നു കണ്ടുപിടിക്കാനും ഇതേ മാർഗം ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, $y = 41.5$ ആകാൻ,

$$\frac{x-155}{160-155} = \frac{41.5-40}{46-40}$$

എന്ന സമവാക്യം അനുസരിക്കുന്ന x എടുക്കണം.

അതായത്

$$x = 155 + 5 \times \frac{1.5}{6} = 156.25$$

ഇനി മധ്യമത്തിന്റെ കാര്യം. മുകളിൽപറഞ്ഞ ബന്ധമനുസരിച്ച്, $y = \frac{51}{2} = 25.5$ ആകാനുള്ള x ആണ് ഇവിടെ മധ്യമമായി എടുക്കുന്നത്.

ആനുപാതികതയുടെ ബഹുപദം

രണ്ട് അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം $y = ax + b$ എന്ന ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദമാണെങ്കിൽ, x ആയി വരുന്ന രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസവും, അവയുമായി ബന്ധപ്പെട്ട y സംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസവും ആനുപാതികമായിരിക്കും. കാരണം, $y_1 = ax_1 + b$ ഉം $y_2 = ax_2 + b$ യും ആണെങ്കിൽ

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = a$$

ആണ്.

മറിച്ച്, പരസ്പരം ബന്ധപ്പെട്ട രണ്ടളവുകളെ x, y എന്നീ ചരങ്ങൾകൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കുന്നു എന്നു കരുതുക. x ആയി വരുന്ന ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസവും, അവയുമായി ബന്ധപ്പെട്ട y സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസവും ആനുപാതികമാണെങ്കിൽ, ഈ അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തിന്റെ ബീജഗണിതവാചകം, ഒരു ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദമായിരിക്കും. ഇതു തെളിയിക്കാൻ, ഈ ബന്ധത്തിന്റെ ആനുപാതികസ്ഥിരം a എന്നെടുക്കുക. x_1 എന്ന സംഖ്യയോട് ബന്ധപ്പെട്ട സംഖ്യ y_1 എന്നും എടുക്കുക. ഇനി, പരസ്പരം ബന്ധപ്പെട്ട മറ്റേതൊരു ജോടി (x, y) എടുത്താലും

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = a$$

ആകണം. അതായത്

$$y = ax + (y_1 - ax_1)$$

ഇതിലെ $y_1 - ax_1$ നെ b എന്നെഴുതിയാൽ

$$y = ax + b$$

എന്നു കിട്ടും

അപ്പോൾ, മധ്യമം കണ്ടുപിടിക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്നത്, പട്ടികയിലെ അളവുകളും, സഞ്ചിതാവൃത്തികളും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ഓരോ വിഭാഗത്തിലും ഒരു ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദമാണ് എന്ന സങ്കൽപമാണെന്നും പറയാം.

$y = 25.5$ എന്നത്, $y = 11$ നും $y = 29$ നും ഇടയ്ക്കാണല്ലോ. ഈ രണ്ടു y സംഖ്യകളുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നത്, $x = 145$ ഉം $x = 150$ ഉം ആണ്. അപ്പോൾ ഉദാഹരണങ്ങളിൽ കണ്ടതുപോലെ $y = 25.5$ ആകണമെങ്കിൽ,

$$\frac{x-145}{150-145} = \frac{25.5-11}{29-11}$$

ആകണം. അതായത്,

$$x = 145 + 5 \times \frac{14.5}{18} \approx 149.03$$

അപ്പോൾ നമ്മുടെ കണക്കിലെ കുട്ടികളുടെ മധ്യമഉയരം 149 സെന്റിമീറ്റർ.

ഇനി ഈ കണക്കുനോക്കൂ. ഒരു സ്ഥാപനത്തിൽ പണിയെടുക്കുന്നവരുടെ എണ്ണം, പ്രായമനുസരിച്ചു പട്ടികപ്പെടുത്തിയതാണ് ചുവടെകാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.

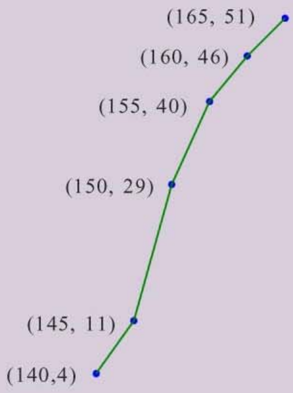
പ്രായം	ജോലിക്കാരുടെ എണ്ണം
25 - 30	6
30 - 35	8
35 - 40	12
40 - 45	20
45 - 50	16
50 - 55	6
ആകെ	**68**

ഇവരുടെ മധ്യമപ്രായം കണ്ടുപിടിക്കാം. ആദ്യം ഓരോ നിശ്ചിത വയസിനേക്കാളും പ്രായം കുറവായവരുടെ പട്ടിക ഉണ്ടാക്കാം.

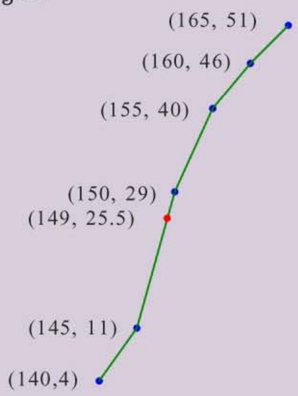
പ്രായം	ആളുകളുടെ എണ്ണം
30 നേക്കാൾ കുറവ്	6
35 നേക്കാൾ കുറവ്	14
40 നേക്കാൾ കുറവ്	26
45 നേക്കാൾ കുറവ്	46
50 നേക്കാൾ കുറവ്	62
55 നേക്കാൾ കുറവ്	68

മധ്യമചിത്രം

ഉയരക്കണക്കിലെ (x, y) ജോടികൾ സൂചകസംഖ്യകളായി ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തി, അവ വരകൾകൊണ്ടു യോജിപ്പിച്ചാൽ, ചുവടെകാണുന്നതുപോലൊരു ചിത്രം കിട്ടും.



ഇതിൽ y-സൂചകസംഖ്യ 25.5 ആയ ബിന്ദുവിന്റെ x-സൂചകസംഖ്യയാണ് മധ്യമം:



ഇനി ഇതിനെ സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധമായി കാണണം:

x	30	35	40	45	50	55
y	6	14	26	46	62	68

ഇവിടെ മധ്യമമെന്നത്, $y = \frac{68}{2} = 34$ ആകാൻ എടുക്കേണ്ട x ആണ്.

പട്ടികയിൽ $y = 26$ നും $y = 46$ നും ഇടയിലാണ്, $y = 34$ ന്റെ സ്ഥാനം.

പട്ടികയിൽനിന്നുതന്നെ $y = 26$ ന് $x = 40$ ഉം, $y = 46$ ന് $x = 45$ ഉം ആണെന്നു കാണാമല്ലോ. അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ കണക്കിലേതുപോലെ, ആനുപാതികസങ്കൽപം ഉപയോഗിച്ച്

$$\frac{x-40}{45-40} = \frac{34-26}{46-26}$$

$$x = 40 + \left(5 \times \frac{8}{20}\right) = 42$$

അതായത്, മധ്യമപ്രായം 42.

ഇനി ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ:

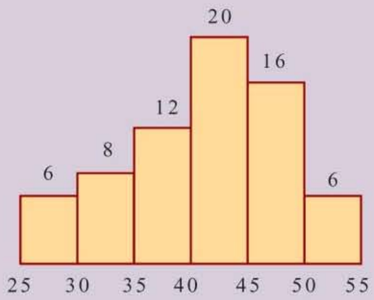
- ഒരു ആശുപത്രിയിൽ, ഒരാഴ്ച പിറന്ന കുട്ടികളുടെ എണ്ണവും ഭാരവുമാണ് ചുവടെയുള്ള പട്ടികയിൽ.

ഭാരം (കി.ഗ്രാം.)	ശിശുക്കളുടെ എണ്ണം
2.500	4
2.600	6
2.750	8
2.800	10
3.000	12
3.150	10
3.250	8
3.300	7
3.500	5

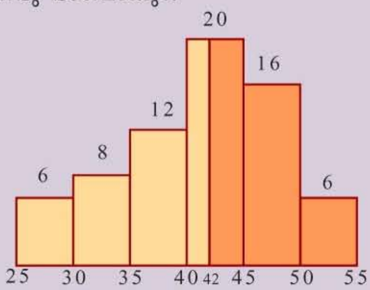
ഭാരത്തിന്റെ മധ്യമം കണക്കാക്കുക.

മധ്യമപരപ്പളവ്

ആവൃത്തിപ്പട്ടികയുടെ ചതുരച്ചിത്രം വരച്ചത് ഓർമയില്ലേ? പ്രായക്കണക്കിലെ ചതുരച്ചിത്രം ഇങ്ങനെയാണ്:



ഇതിൽ, മധ്യമമായ 42 ൽക്കൂടി കുത്തനെ ഒരു വര വരച്ചാൽ, ചിത്രം രണ്ടു ഭാഗമാകും.



ഈ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളുടെയും പരപ്പളവ് തുല്യമാണെന്നു കാണാൻ വിഷമമില്ല (ചെയ്തുനോക്കൂ).

എല്ലാ കണക്കിലും മധ്യമത്തിന് ഈ ഗുണമുണ്ടോ?

- ഒരു സ്ഥാപനത്തിലെ ഉദ്യോഗസ്ഥർ കൊടുത്ത ആദായനികുതിയുടെ പട്ടികയാണ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്.

ആദായനികുതി (രൂപ)	ഉദ്യോഗസ്ഥരുടെ എണ്ണം
1000 - 2000	8
2000 - 3000	10
3000 - 4000	15
4000 - 5000	18
5000 - 6000	22
6000 - 7000	8
7000 - 8000	6
8000 - 9000	3

ആദായനികുതിയുടെ മധ്യമം കണക്കാക്കുക

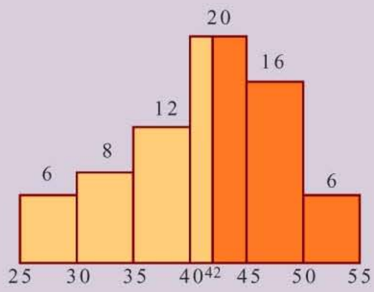
- ഒരു പരീക്ഷ എഴുതിയവർക്ക് കിട്ടിയ മാർക്കിന്റെ പട്ടിക ഇങ്ങനെയാണ്:

മാർക്ക്	പരീക്ഷാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം
0 - 10	44
10 - 20	40
20 - 30	35
30 - 40	20
40 - 50	12
50 - 60	10
60 - 70	8
70 - 80	6
80 - 90	4
90 - 100	1

മാർക്കുകളുടെ മധ്യമം കണക്കാക്കുക.

മധ്യമസാധ്യത

മധ്യമത്തിലൂടെയുള്ള ലംബം, ചതുരത്തെ ഒരേ പരപ്പളവുള്ള രണ്ടു ഭാഗങ്ങളാക്കുമെന്നുകണ്ടല്ലോ:



അപ്പോൾ, ഈ ചിത്രത്തിൽ ഒരു കുത്തിട്ടാൽ, അത് ഇതിലേതെങ്കിലും ഭാഗത്തിലാകാൻ ഒരേ സാധ്യതയാണ് (അഥവാ, സാധ്യത $\frac{1}{2}$).

അതായത്, കണക്കിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന സ്ഥാപനത്തിൽ പ്രത്യേക പരിഗണനയൊന്നുമില്ലാതെ ഒരാളെ എടുത്താൽ, അയാളുടെ പ്രായം 42 ൽകുറവാകാനും, കൂടുതലാകാനും ഒരേ സാധ്യതയാണ്.

അങ്കഗണിതം (Arithmetic)

അക്കം	digit
അധിസംഖ്യ	positive number
അഭാജ്യസംഖ്യ	prime number
അഭിന്നകസംഖ്യ	irrational number
അംശം	numerator
അംശബന്ധം	ratio
ഇരട്ടസംഖ്യ	even number
ഉയരം, ഉന്നതി	height, altitude
എണ്ണൽസംഖ്യ	natural number, counting number
ഏകകം	unit
ഏകദേശവില	approximate value
ഒറ്റസംഖ്യ	odd number
കൂട്ടുപലിശ	compound interest
കൃതി	power
കൃത്യങ്കം	exponent
കൃതീകരണം	exponentiation
കേവലവില	absolute value
ഗുണനം	multiplication
ഗുണിതം	multiple
ഗുണനഫലം	product
ഘടകം	factor
ഘനസെന്റിമീറ്റർ	cubic centimetre
ചതുർമുഖസംഖ്യകൾ	tetrahedral numbers
ഛേദം	denominator
തുക	sum
ദശാംശരൂപം	decimal form
നഷ്ടം	loss
ന്യൂനസംഖ്യ	negative number
പലിശ	interest
പലിശനിരക്ക്	rate of interest
പൂർണസംഖ്യ	integer
പൂർണവർഗസംഖ്യ	perfect square
പൊതുവ്യത്യാസം	common difference
ഭിന്നകസംഖ്യ	rational number
ഭിന്നസംഖ്യ	fraction
മുടക്ക് മുതൽ	investment
മുതൽ	principal
രേഖീയസംഖ്യ	real number
ലാഭം	profit
വർഗം	square
വർഗമൂലം	square root
വാങ്ങിയവില	cost price
വിറ്റവില	selling price
വ്യുൽക്രമം	reciprocal
വ്യവകലനം	subtraction
ശതമാനം	percentage
ശിഷ്ടം	remainder
ശ്രേണി	sequence
സങ്കലനം	addition
സമചതുരസംഖ്യ	square number
സമാന്തരശ്രേണി	arithmetic sequence arithmetic progression
സാധാരണപലിശ	simple interest
സംഖ്യ	number
സംഖ്യാശ്രേണി	number sequence
സ്തൂപികാസംഖ്യകൾ	pyramidal numbers
സ്ഥാനവില	place value
ഹരണം	division
ഹരണഫലം	quotient
ഹാരകം	divisor
ഹാര്യം	dividend

ബീജഗണിതം (Algebra)

അജ്ഞാതസംഖ്യ	unknown number
ചരം	variable
പദം	term
ബഹുപദം	polynomial
ബഹുപദത്തിന്റെ കൃത്യങ്കം	degree of a polynomial
ബീജഗണിതവാചകം	algebraic expression
രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യം	quadratic equation
ലഘൂകരിക്കുക	simplify
വിവേചകം	discriminant
സമവാക്യം	equation
സൂത്രവാക്യം	formula

ജ്യാമിതി (Geometry)

അഗ്രമുഖം, പാദം	base
അനുപാതം	proportion
അനുപൂരകം	supplementary
ആനുപാതികസ്ഥിരം	constant of proportionality
അന്തർവൃത്തം	incircle
അന്തർവൃത്തകേന്ദ്രം	incentre
അർധഗോളം	hemisphere
അർധവൃത്തം	semicircle
അഷ്ടഭുജം	octagon
ആന്തരികകോൺ	internal angle
ആന്തരസഹകോൺ	co-interior angle
ആരം	radius
ഉപരിതലപരപ്പളവ്	total surface area
ഉയരം	height
എതിർകോണുകൾ	opposite angles
എതിർവശം	opposite side
കർണം	hypotenuse
കീഴ്ക്കോൺ	angle of depression
കേന്ദ്രകോൺ	central angle
കോൺ	angle

കോൺമാപിനി	- protractor
കോൺസമഭാജി	- angle bisector
ഖണ്ഡിക്കുക	- intersect
ഗോളം	- sphere
ഘനരൂപങ്ങൾ	- solids
ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ	- square centimetre
ചക്രീയചതുർഭുജം	- cyclic quadrilateral
ചക്രീയഷഡ്ഭുജം	- cyclic hexagon
ചതുരം	- rectangle
ചതുരസ്തംഭം	- rectangular prism
ചതുർഭുജം	- quadrilateral
ചതുർമുഖം	- tetrahedron
ചരിവുയരം	- slant height
ചരിവ്	- slope
ചാപം	- arc
ചാപനീളം	- arc length
ജ്യാമിതിപ്പെട്ടി	- geometry box
ഞാൺ	- chord
തൊടുവര	- tangent
ത്രികോണം	- triangle
ത്രികോണമിതി	- trigonometry
ദശഭുജം	- decagon
നവഭുജം	- nonagon
പഞ്ചഭുജം	- pentagon
പരപ്പളവ്	- area
പരിവൃത്തകേന്ദ്രം	- circumcentre
പരിവൃത്തം	- circumcircle
പാദം	- base
പാർശ്വമുഖം	- lateral face
പാദവക്ക്	- base edge
പാർശ്വവക്ക്	- lateral edge
പൂരകചാപം	- complementary arc
പാർശ്വോന്നതി	- slant height
ബഹുമുഖം	- polyhedron
ബഹുഭുജം	- polygon
ബാഹ്യകോൺ	- exterior angle
ബാഹ്യസഹകോൺ	- co-exterior angle
ബിന്ദു	- point
മട്ടം	- right angle, setsquare
മട്ടത്രികോണം	- right triangle
മധ്യബിന്ദു	- midpoint
മധ്യലംബം,	- perpendicular
മറുകോൺ	- alternate angle
മറുഖണ്ഡം	- alternate segment
മുഖം	- face
മേൽക്കോൺ	- angle of elevation
രേഖീയജോടി	- linear pair
വശം	- side
വക്ക്	- edge
വൃത്തം	- circle
വ്യാസം	- diameter
വികർണം	- diagonal
വൃത്തകേന്ദ്രം	- centre of a circle
വൃത്താംശം	- sector
വൃത്തഖണ്ഡം	- segment of a circle
വര, രേഖ	- line
വൃത്തസ്തൂപിക	- cone
വക്രമുഖം	- curved surface
വൃത്തസ്തംഭം	- cylinder
വക്രതലപരപ്പളവ്	- curved surface area
വ്യാപ്തം	- volume
വൃത്തസ്തൂപികാപീഠം	- frustum of a cone
ലംബം	- perpendicular
ലംബകം	- trapezium
ലംബസമഭാജി	bisector
ശീർഷം	- apex
ശിഷ്ടചാപം, മറുചാപം,	- complementary arc
ഷഡ്ഭുജം	- hexagon
സമാന്തരം	- parallel
സമചതുരം	- square
സർവസമം	- congruent
സർവസമത	- congruence
സപ്തഭുജം	- heptagon
സമഭുജത്രികോണം	- equilateral triangle
സമപാർശ്വത്രികോണം	- isosceles triangle
സഞ്ചാരപാത	- locus
സാമാന്തരികം	- parallelogram
സമഭുജസാമാന്തരികം	- rhombus
സമപാർശ്വലംബകം	- isosceles trapezium
സമാനകോണുകൾ	- corresponding angles
സാദൃശ്യം	- similarity
സദൃശം	- similar
സമചതുരക്കട്ട	- cube
സമീപവശം	- adjacent side
സ്തംഭം	- prism
സ്തൂപികം	- pyramid
സമചതുരസ്തൂപിക	- square pyramid
സമബഹുമുഖം	- regular polyhedron
സമചതുര	- frustum of a square
സ്തൂപികാപീഠം	pyramid

സ്ഥിതിവിവരക്കണക്ക് (statistics)

ആവൃത്തി	- frequency
ആവൃത്തിപ്പട്ടിക	- frequency table
ആവൃത്തിബഹുഭുജം	- frequency polygon
ചതുരചിത്രം	- histogram
മധ്യമം	- median
മഹിതം	- mode
മാധ്യം	- arithmetic mean
വിഭാഗം	- class
വിഭാഗവിസ്താരം	- class width
സഞ്ചിതാവൃത്തി	- cumulative frequency
സാധ്യത	- probability