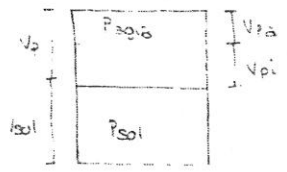
✓ Una muestra de roca pesa 475gr con una humedad del 2% y se satura al absorver 40cm³ de agua. Si la densidad saturada es 2,20 gr/cm³ y el indice de poros e = 43,8% Calcular:

a) Peso de los solidos

b) Volumen de poros accesibles

c) Volumen de poros inaccesibles

d) Densidad de los solidos



P = 475gr
H = 2%
Satura 40 cm³ + agua
γ_{sat} = 2,20 gr/cm³
e = 43,8%

a)

$$H = \frac{P - P_{sol}}{P_{sol}} \quad , \quad P_{sol} \cdot H = P - P_{sol} \quad , \quad P_{sol} \cdot H + P_{sol} = P \quad , \quad P_{sol} \cdot (H+1) = P$$

$$P_{sol} = \frac{P}{H+1} = \frac{475}{0,02 + 1} = 465,69 \text{ gr}$$

b)

$$V_{pa} = \left(\frac{P_{H_2O}\ (2\%)}{\gamma_{H_2O}} \right) + 40cc \qquad H = \frac{P_{H_2O}}{P_{seco}} = \frac{P_{H_2O}}{P - P_{H_2O}} \quad ; \quad HP - HP_{H_2O} = P_{H_2O} \quad , \quad HP = P_{H_2O} + H\,P_{H_2O}$$

$$H\,P = P_{H_2O}\,(1 + H) \quad , \quad P_{H_2O} = \frac{H\,P}{1+H} = \frac{0,02 \cdot 475}{1 + 0,02} = 9,31 \text{ gr}$$

$$V_{pa} = \frac{9,31 \text{ gr}}{1 \text{ gr/cm}^3} + 40 \text{cm}^3 = 49,31 \text{ cm}^3$$

c) 40cc = 40gr porque el peso especifico con dm. agua es 1)

$$\gamma_{sat} = \frac{P_{sat}}{V} = \frac{P + 40cc}{V} = \frac{475 \text{gr} + 40 \text{gr}}{V} \quad ; \quad V = \frac{475 + 40}{\gamma_{sat}} = \frac{515 \text{ gr}}{2,20 \text{ gr/cm}^3} = 234,09 \text{ cm}^3$$

$$e = \frac{V_p}{V_{sol}} \quad , \quad e = \frac{V_p}{V - V_p} \quad , \quad e\,V - e\,V_p = V_p \quad , \quad e\,V = V_p + e\,V_p \quad , \quad e\,V = V_p\,(1 + e)$$

$$V_p = \frac{e\,V}{1 + e} = \frac{0,438 \cdot 234,09}{1 + 0,438} = 71,30 \text{ cc}$$

$$V_{pi} = V_p - V_{pa} = 71,30 \text{cc} - 49,31 = 21,99 \text{cc}$$

d)

$$\gamma_{sol} = \frac{P_{sol}}{V_{sol}} = \frac{465,69}{162,79} = 2,86 \text{ gr/cm}^3$$

$$V_{sol} = V - V_p = 234,09 - 71,30 = 162,79 \text{cc}$$

✓ Se realiza una cata en un suelo de 8m³ y al excavar el material se esponja un 20%. Se pesa el material excavado resultando un peso de 17,6 toneladas, que corresponde a una humedad de 10%. Sabiendo que γ_{sol} = 2,5 T/m³. Se pide:

a) Densidad antes de excavar (en banco)

b) Densidad tras excavar

c) Humedad en el banco

d) Indice de poros en el banco

e) Porosidad tras excavar.

f = 20%
P = 17,6 T
H = 10%
γ_{sol} = 2,5 T/m³

a) $\gamma_{banco} = \frac{P}{V_{cata}} = \frac{17,6\ T}{8\ m^3} = 2,20\ T/m^3$

b) Coeficiente esponjamiento $= \frac{V_{apar}}{V_{banco}} = 1,20$, $V_{apar} = C.esp \cdot V_{banco} = 1,20 \cdot 8 = 9,6\ m^3$

$\gamma_{esp} = \frac{P}{V_{apar}} = \frac{17,6\ T}{9,6\ m^3} = 1,83\ T/m^3$

c) $H = \frac{P_{H_2O}}{P_{seco}} = 10\%$ (dato que nos da el ejercicio)

$H = \frac{P - P_s}{P_s} \cdot 100$, $\frac{H \cdot P_s}{100} = P - P_s$; $\left(\frac{H \cdot P_s}{100}\right) + P_s = P$, $P_s\left(\frac{H}{100} + 1\right) = P$

$P_s = \frac{P}{\frac{H}{100} + 1} = \frac{17,6}{\frac{10}{100} + 1} = 16\ T$

$V_{sol} = \frac{P_{sol}}{\gamma_{sol}} = \frac{16\ T}{2,5\ T/m^3} = 6,4\ T/m^3$

$e = \frac{V_p}{V_{sol}} = \frac{V - V_{sol}}{V_{sol}} = \frac{8 - 6,4}{6,4} = 0,25 \rightarrow 25\%$

e) $n = \frac{V_p}{V} = \frac{V_{apar} - V_{sol}}{V_{apar}} = \frac{9,6 - 6,4}{9,6} = 0,33$

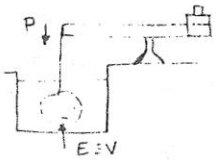
✓ El peso de una roca en balanza hidroestatica es de 106 gr y saturada pesa 204 gr (parafinada), y despues de secada en estufa el peso es de 182 gr, sabiendo que el indice de poros es 0,43. Calcular:

a) Volumen de poros accesibles.

b) Peso especifico de los solidos

c) Volumen de poros inaccesibles

d) Maxima humedad (%) que puede llegar a tener.



$P_{sumergido} = 106\ gr$
$P_{sat} = 204\ gr$
$P_{seco} = 182\ gr$
$e = 0,43$

a) $P_{sat} = P_{seco} + V_{pa} \cdot \gamma_{H_2O}$ (1) , $V_{pa} = P_{sat} - P_{seco} = 204 - 182 = 22\ cm^3$

b) $\gamma_{sol} = \frac{P_{sol}}{V_{sol}}$ $P_{sum} = P_{sat} - V\ \gamma_{H_2O}$ (1) . $V = P_{sat} - P_{sum} = 204 - 106 = 98\ cm^3$

$e = \frac{V_p}{V_{sol}} = \frac{V_p}{V - V_p}$, $eV - eV_p = V_p$, $eV = V_p + eV_p$, $eV = V_p(1 + e)$,

$V_p = \frac{eV}{1 + e} = \frac{0,43 \cdot 98}{1 + 0,43} = 29,47\ cm^3$

$\gamma_{sol} = \frac{P_{sol}}{V_{sol}} = \frac{P_{sol}}{V - V_p} = \frac{182}{98 - 29,47} = 2,65\ gr/cm^3$

c) $V_{ui} = V_p - V_{pa} = 29,47 - 22 = 7,47\ cm^3$

d) $V_{pa} = 22\ cm^3$ Hay H => $P_{H_2O} = V_{pa} \cdot \gamma_{H_2O} = 22\ cc \cdot 1\ gr/cc = 22\ gr$

$H_{max} = \frac{P_{H_2O}}{P_{seco}} = \frac{22}{182} = 0,1209 \rightarrow 12,09\%$

Una muestra de suelo con una humedad del 5% pesa 235,2 kg, en balanza hidrostática 144 kg y saturada de mercurio ($\gamma_{Hg} = 14\ T/m^3$) 504 kg. Calcular:

a) Peso seco

b) Peso saturado de H_2O

c) Porosidad

d) Densidad de los sólidos

e) Densidad seca.

$H = 5\%$ $P_{hum} = 235{,}2$ kg

$P_h = 144$ kg

$P_{sat} = 504$ kg $\gamma_{Hg} = 14\ T/m^3$

a) $H = \frac{P_h - P_s}{P_s} \cdot 100$ $\quad \frac{H \cdot P_s}{100} = P_h - P_s$ $\quad \frac{H \cdot P_s}{100} + P_s = P_h$ $\quad P_s \left(\frac{H}{100} + 1\right) = P_h$ $\quad P_s = \frac{P_h}{\frac{H}{100} + 1}$

$P_s = \frac{235{,}2}{\frac{5}{100} + 1} = 224$ kg

b) $P_{sat}(Hg) = P_s + V_{ps}\,\gamma_{Hg}$, $V_{ps} = \frac{P_{sat} - P_s}{\gamma_{Hg}} = \frac{504 - 224}{14} = 20\ dm^3$

$P_{sat}(H_2O) = P_s + V_{ps}\,\gamma_{H_2O} = 224 + 20 \cdot 1 = 244$ kg

c) $n = \frac{V_v}{V}$ $\quad P_{sum} = P_{sat} - V\,\gamma_{H_2O}$, $V = \frac{P_{sat} - P_{sum}}{\gamma_{H_2O}} = \frac{244 - 224}{1} = 100\ dm^3$

$n = \frac{20\ dm^3}{100\ dm^3} = 0{,}2 = 20\%$

d) $\gamma_{sol} = \frac{P_{sol}}{V_{sol}} = \frac{P_{seco}}{V - V_v} = \frac{224}{100 - 20} = 2{,}80\ kg/dm^3$

e) $\gamma_{seca} = \frac{P_{seco}}{V} = \frac{224}{100} = 2{,}24\ kg/dm^3$

El volumen de poros inaccesibles de una roca es de 70 cm^3, el de sólido es de 200 cm^3, si el peso seco es de 480 gr y la densidad saturada es de 1,66 gr/cm^3. Se pide:

a) Volumen de poros accesibles

b) Índice de poros

c) Densidad de los sólidos

d) Densidad para una humedad de 6,25%.

$V_{pi} = 70\ cm^3$

$V_{sol} = 200\ cm^3$

$P_{seco} = 480$ gr

$\gamma_{sat} = 1{,}66\ gr/cm^3$

a) [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

c) $\gamma_{sol} = \frac{P_{sol}}{V_{sol}} = \frac{480}{200} = 2,4 \ gr/cm^3$

d) $H = \frac{P_{H_2O}}{P_{seco}}$, $P_{H_2O} = H \cdot P_{seco}$; $P_{sol} - V\gamma = H \cdot P_{sol}$, $P_{sol} - (H \cdot P_{sol}) = V\gamma$

$$\gamma = \frac{P_{sol} - (H \cdot P_{sol})}{V} = \frac{P_{sol} - (H \cdot P_{sol})}{V_{sol} + V_{pa} + V_{pi}} \quad \frac{480 - (0,0625 \cdot 480)}{200 + 11,95 + 70} = 1,60 \ gr/cm^3$$

* anteriormente mal calculado.

Se excava un terreno natural para realizar el ensayo Proctor. La densidad en banco es $\gamma_B = 2,67 \ gr/cm^3$. El factor de esponjamiento es 0,75 y al compactar la muestra en la probeta de 120cc aumenta la densidad un 25% sobre la densidad del material suelto. Si la humedad de la muestra compactada es del 12% y la densidad de los solidos 2,9 T/m³. Se pide:

a) Densidad material suelto

b) Densidad de la muestra compactada

c) Peso seco de la muestra

d) Volumen huecos de la muestra compactada

e) Peso de agua en la muestra.

a) $f = \frac{V_{banco}}{V_{suelo}} = \frac{P/\gamma_{banco}}{P/\gamma_{suelo}} = \frac{\gamma_{suelo}}{\gamma_{banco}}$, $\gamma_{suelo} = f \cdot \gamma_{banco} = 0,75 \cdot 2,67 \ gr/cm^3 = 2,00 \ gr/cm^3$

b) $\gamma_{comp} = 1,25 \cdot \gamma_{suelo} = 1,25 \cdot 2,00 \ gr/cm^3 = 2,50 \ gr/cm^3$

c) $P = V \cdot \gamma_{comp} = 120cc \cdot 2,50 = 300 gr$

$H = \frac{P_w}{P_s}$; $H \cdot P_s = P - P_s$; $P_s + P_s = P$; $P_s (H+1) = P$; $P_s = \frac{P}{(H+1)}$

$P_s = \frac{300}{0,12+1} = 267,86 \ gr$

d) $V = V_{sol} + V_{huecos}$, $V_{huecos} = V - V_{sol} = V - \frac{P_{sol}}{\gamma_{sol}} = 120 - \frac{268}{2,9} = 27,64 \ cm^3$

e) $H = \frac{P_{agua}}{P_{seco}}$; $P_{agua} = H \cdot P_{seco} = 0,12 \cdot 267,86 = 32,14 \ gr$

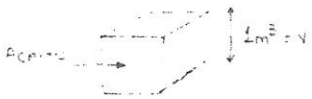
Se analiza $1m^3$ de suelo contaminado de aceite proveniente de una planta de tratamiento y resulta una densidad saturada de $2,18\ T/m^3$, sabiendo que el indice de poros es 0,25 y que la densidad de los solidos es $2,5\ gr/cm^3$ y la del aceite $0,9\ gr/cm^3$. Se pide:

a) Peso seco

b) Volumen poros

c) Peso de aceite en cada m^3 de suelo

d) Si por efecto de la lluvia el 45% de los huecos se llenan de agua ¿Cual seria la nueva densidad del suelo?



$\gamma_{sat} = 2,18\ T/m^3$
$e = 0,25$
$\gamma_{sol} = 2,5\ gr/cm^3$
$\gamma_{aceite} = 0,9\ gr/cm^3$

a) $P_{sol} = \gamma_{sol} \cdot V_{sol}$

$e = \frac{V_p}{V_{sol}} = \frac{V_p}{V - V_p}$ $\quad e \cdot V = (V - V_p) \cdot e = V_p + e \cdot V_p$, $e \cdot V = V_p \cdot (1 + e)$

$V_p = \frac{e \cdot V}{1 + e} = \frac{0,25 \cdot 1}{1 + 0,25} = 0,2\ m^3$

$V_{sol} = V - V_p = 1 - 0,2 = 0,8\ m^3$

$P_{sol} = \gamma_{sol} \cdot V_{sol} = 2,5 \cdot 0,8 = 2\ T$ $\quad P_{seco}$

b) $V_p = 0,2\ m^3$ (obtenido en el apartado anterior)

c) $\gamma_{sat} = \frac{P_{sol} + P_{aceite}}{V}$ $\quad \gamma_{sat} \cdot V = P_{sol} + P_{aceite}$, $P_{aceite} = \gamma_{sat} \cdot V - P_{sol} = 2,18 \cdot 1 - 2 = 0,18\ T$

d) $\gamma = \frac{P_{sol} + P_{aceite} + P_{agua}}{V}$

$P_{aceite} = 0,55 \cdot V_p \cdot \gamma_{aceite} = 0,55 \cdot 0,2 \cdot 0,9 = 0,099\ T$

$P_{agua} = 0,45 \cdot V_p \cdot \gamma_{agua} = 0,45 \cdot 0,2 \cdot 1 = 0,09\ T$

$\gamma = \frac{2 + 0,099 + 0,09}{1} = 2,189\ T$

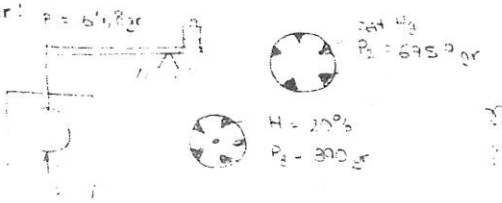
Una roca pesa en balanza hidrostatica 164,8 gr, saturada por mercurio en un porosimetro pesa 675,9 gr y con una humedad del 20% pesa 390 gr si la densidad de los solidos es de $2,5\ gr/cm^3$ y la del mercurio $13,6\ T/m^3$, determinar:

a) Peso de los solidos

b) Volumen de poros accesibles

c) Volumen de poros inaccesibles

d) Indice de poros



$\gamma_{sol} = 2,5\ gr/cm^3$
$\gamma_{Hg} = 13,6\ T/m^3$

a) $H = \frac{P_h - P_{sol}}{P_{sol}}$, $H \cdot P_{sol} = P_h - P_{sol}$; $H \cdot P_{sol} + P_{sol} = P_h$ $\quad P_{sol} \cdot (H + 1) = P_h$

$P_{sol} = \frac{P_h}{H + 1} = \frac{390}{0,20 + 1} = 325\ gr = P_{seco}$

b) $P_{sat} = P_{sol} + V_{cc} \cdot \gamma_{Hg}$, $V_{cc} = \frac{P_{sat} - P_{sol}}{\gamma_{Hg}} = \frac{675,9 - 325}{13,6} = 25,78\ cc$

c) $V_{sol} = \frac{P_{sol}}{\rho_{sol}} = \frac{325}{2,5} = 130\ cc$ $\quad P_1 = P_{sol} + V_{cc} \cdot \gamma_{Hg} = \ldots$

$E = P_{sol} + V_{cc} \cdot \gamma_{Hg} - P_2 = 325\ gr + 25,78 \cdot 13,6 - 675,9\ gr = 164,8\ gr$

$E = V \cdot \gamma_{H_2O}$; $V = \frac{E}{\gamma_{H_2O}} = \frac{186 gr}{1 gr/cc} = 186 cc$

$V_{pi} = V - V_{sol} + V_{pa} = 186 - 130 + 25,80 = 30,2 cc$

e) $e = \frac{V_p}{V_{sol}} = \frac{V_{pi} + V_{pa}}{V_{sol}} = \frac{30,2 + 25,80}{130} = 0,43 \rightarrow 43\%$

El índice de poros de una roca es de 0,3 ; el peso de una muestra seca es de 1000 gr y tras machacarla ocupa un volumen de 400 cc. Si la absorción de agua es del 7%. Determinar:

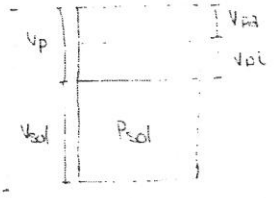
a) Volumen de poros accesibles

b) Volumen de poros inaccesibles

c) Densidad seca

d) Densidad saturada

e) Densidad de los sólidos



$e = 0,3$

$P_{seco} = 1000 gr$

$V_{tot} = 400 cc$

$Ab = 7\%$

a) $Absorción = \frac{P_{sat} - P}{P} \cdot 100 = 7$; $\frac{7P}{100} = P_{sat} - P$; $P_{sat} = \frac{7P}{100} + P = \frac{7 \cdot 1000}{100} + 1000 = 1070 gr$

$V_{pa} = \frac{P_{H_2O}}{\gamma_{H_2O}} = \frac{P_{sat} - P_{seco}}{\gamma_{H_2O}} = \frac{1070 - 1000}{1} = 70 cc$

b) $V_{tot} = V_{sol} = 400 cc$

$e = \frac{V_p}{V_{sol}}$; $V_p = e \cdot V_{sol} = 0,3 \cdot 400 = 120 cc$

$V_{pi} = V_p - V_{pa} = 120 - 70 = 50 cc$

c) $\gamma_{seca} = \frac{P_{seco}}{V} = \frac{P_{seco}}{V_p + V_{sol}} = \frac{1000}{120 + 400} = 1,92 gr/cc$

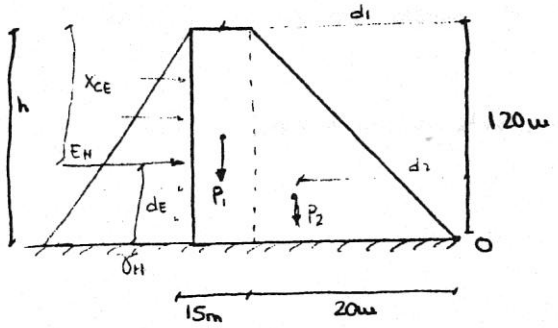
d) $\gamma_{sat} = \frac{P_{sat}}{V} = \frac{1070}{120 + 400} = 2,06 gr/cc$

e) $\gamma_{sol} = \frac{P_{sol}}{V_{sol}} = \frac{1000}{400} = 2,5 gr/cc$

En la presa de la figura, el cuerpo está constituido por hormigón de $\gamma_H = 2{,}37\ T/m^3$ y contiene agua. Calcular:

a) Nivel de agua para que vuelque.

b) Cuanto debería aumentar la densidad del hormigón para poder llenar la presa.



a) $P_1 = V_1 \cdot \gamma_h = (15 \cdot 120 \cdot 1) \cdot \gamma_h = 1800 \cdot \gamma_h\ Tn$ $\qquad d_1\ \ 20m + \frac{1}{2}\ 15m = 27{,}5\ m$

$P_2 = V_2 \cdot \gamma_h = \left(\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 120 \cdot 1\right) \cdot \gamma_h = 1200 \cdot \gamma_h\ Tn$ $\qquad d_2 = \frac{2}{3}\ 20 = 13{,}33\ m$

Empuje $\quad E_H = P_{cg} \cdot A = \left(\gamma \cdot h/2\right)(h \cdot 1) = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot h^2$

$d_E = 1/3\ h$

Equilibrio

$M_{volcador} = M_{estabilizador}$

$M_{volcador} = E_H \cdot d_E = \frac{1}{2}\gamma h^2 \cdot \frac{1}{3} h = 1/6 \cdot \gamma h^3 = 1/6 \cdot 2{,}37 \cdot h^3 =$

$M_{estabilizador} = P_1 \cdot d_1 + P_2 \cdot d_2 = [(1800 \cdot 27{,}5) + (1200 \cdot 13{,}33) \cdot 2{,}37\ T/m^3 =$

$= (49{,}500 + 15{,}996)\ m^4 \cdot 2{,}37\ T/m^3 = 65{,}496\ T\,m^4 \cdot 2{,}37\ T/m^3 = 155{,}226\ T \cdot m$

$0{,}167\ h^3 = 155{,}226\ Tm \Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{155{,}226}{0{,}167}} \qquad h = 97{,}60\ m$

b) $h = 120\ mm \Rightarrow E_H = \frac{1}{2}\gamma h^2 = 1/2 \cdot 1\ T/m^3 \cdot 120^2 = 7200\ T$

$h_{CE} = h/3 = 120/3 = 40\ mm$

$M_{volcador} = E_H \cdot 40\ m$

$M_{estabilizador} = 65{,}496 \cdot \gamma_H$

Equilibrio $\quad M_{volcador} = M_{estabilizador}$

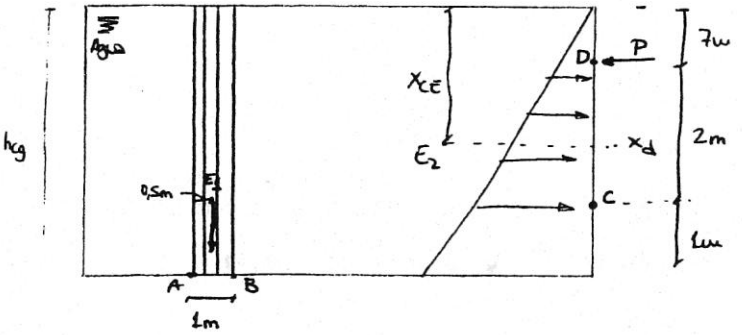
$7200\ T \cdot 40\ m = 65{,}496 \cdot \gamma_H \Rightarrow \gamma_H = \frac{288\,000\ Tm}{65{,}496\ m^4} = 4{,}40\ T/m^3$

El deposito de la figura, dispone de dos compuertas. Un desague de forma circular de 1m de diametro y una compuerta de salida cuadrada de 2m de lado.

El desague de fondo abre girando en A y se asegura mediante una fuerza F = 3,927 T, situada en B. La compuerta gira en C y se asegura con una fuerza P aplicada en D. Se pide:

a) Maxima altura de agua que puede contener el deposito para que no se abra el desague de fondo.

b) Valor de P para mantener cerrada la compuerta en este caso



a)

$E_1 = P_{cg} \cdot A_1 = \gamma \cdot h_{cg} \cdot A_1 = 1\ T/m^3 \cdot h_{cg} \cdot \left(\pi \frac{1^2}{4}\right) = 1 \cdot h_{cg} \cdot 0,785\ m^2 = 0,785 \cdot h_{cg}\ T/m$

$M_{apertura} = E_1 \cdot 0,5m = 0,785\ h \cdot 0,5 = 0,3927\ h\ T/m \cdot m$

$M_{cierre} = F \cdot 1m = 3,927\ T \cdot 1m = 3,927\ T \cdot m$

Equilibrio => $M_{apertura} = M_{cierre}$ => $0,3927\ h = 3,927\ T \cdot m$

$$h_{cg} = \frac{3,927\ T \cdot m}{0,3927\ T/m \cdot m} = 10\ m$$

b) $E_2 = P_{cg} \cdot A_2 = \gamma\ h_{cg} \cdot A_2 = 1\ T/m^3 \cdot 8m \cdot (2 \cdot 2)\ m^2 = 32\ T$

$$x_{CE} = x_{cg} + \frac{I_{cg}}{x_{cg} \cdot A} = 8\ m + \frac{1,33\ m^4}{8m \cdot 4m^2} = 8,04\ m \Rightarrow d = 9 - x_{CE} = 0,96m$$

$$I_{cg} = \frac{1}{12}\ b \cdot h^3 = \frac{1}{12} \cdot 2 \cdot 2^3 = 1,33\ m^4$$

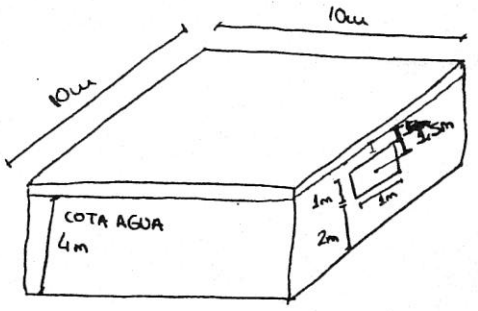
Equilibrio en giros

Momento de cierre $= P \cdot 2m = 2P\ T \cdot m$

Momento de apertura $= E_2 \cdot d = 32\ T \cdot 0,96\ m = 30,72\ T \cdot m$

$M_{apertura} = M_{cierre}$

$$2P\ m = 30,72\ T \cdot m \quad ; \quad P = \frac{30,72\ Tm}{2\ m} = 15,36\ T$$



El deposito de la figura se cierra con una compuerta cuadrada de ~~un~~ 1m de lado. Calcular:

a) Esfuerzo sobre la compuerta y su localización medida ~~sobre~~ desde el fondo del deposito.

b) ¿Cuanto aumenta el esfuerzo si se introduce en el deposito, un cubo de 5m de lado y $\gamma_c = 0,5\ kg/dm^3$?

A) ESFUERZO SOBRE LA COMPUERTA Y LOCALIZACION DESDE EL FONDO.

$$E_c = P_{cdg} \cdot A = (\gamma \cdot h_{cdg}) \cdot A = 1000\ kg/m^3 \cdot 1,5m\ (1 \cdot 1)m^2 = \boxed{1500\ kg}$$

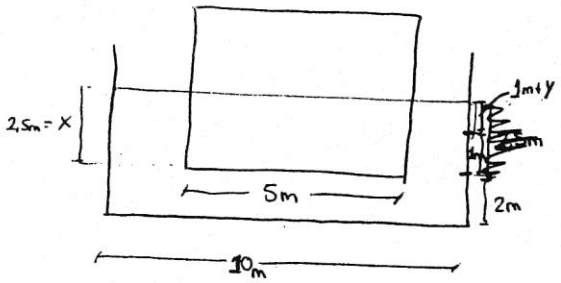
$$X_{CE} = \frac{I_{CG}}{X_{CG} \cdot A} + X_{CG}$$

$$I_{CG} = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 1^3$$

$$X_{CE} = \frac{1/12 \cdot 1 \cdot 1^3}{1,5 \cdot 1m^2} + 1,5 = 1,56\ m$$

$$X_F = 4,00 - 1,56 = \boxed{2,44\ m.}$$

B)



$$P_{ESO\ CUBO} = V \cdot \gamma_c = 50^3\ dm^3 \cdot 0,5\ kg/dm^3 = 62500\ kg$$

$$E_{MPUJE\ (que\ recibe\ el\ cubo)} = V_{agua\ desalojada} = [50 \cdot 50 \cdot x] \cdot 1\ kg/dm^3 = 2500\ x$$

$$FLOTACION\ (Equilibrio) = \downarrow P = E \uparrow$$

$$62500\ kg = 2500 \cdot x \Rightarrow x = \frac{62500\ kg}{2500\ kg/dm} = 25\ dm\ (2,5m)$$

SUBIDA DE NIVEL:

$$V.\ desalojado = 50 \cdot 50 \cdot 25 = 62500\ dm^3$$

$$(100 \cdot 100) - (50 \cdot 50) = 7500\ dm^2 \quad (Solo\ una\ superficie)$$

$$y = \frac{62500\ dm^3}{7500\ dm^2} = 8,33\ dm$$

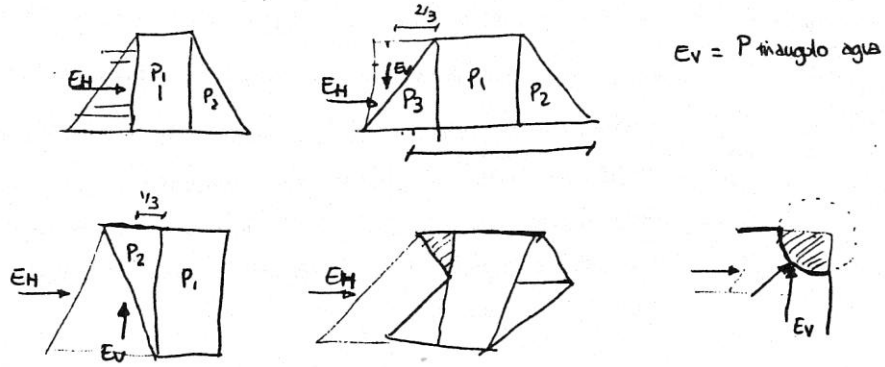
$$Nivel\ de\ agua = 4m + 0,83\ m = 4,83\ m$$

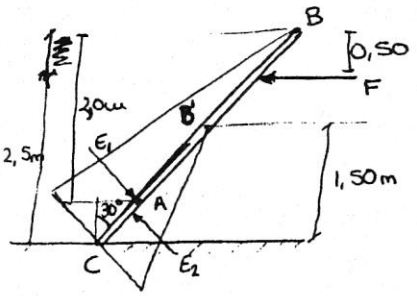
$$E_c' = P_{cdg} \cdot A = (\gamma \cdot h_{cdg}) \cdot A = 1000\ kg/m^3 \cdot (1,833 + 0,5) \cdot 1m^2 =$$

$$E_c' = 2333\ kg$$

$$\boxed{INCREMENTO = 2333 - 1500 = 833\ kg}$$

Diferencias con presas en los ejercicios





Sobre un canal 1m de ancho se coloca una compuerta BC que separa dos niveles de agua y que gira en C, según la figura adjunta, calcular:

a) Las presiones P_1 y P_2 que ejerce el agua sobre el (' to a ambos lados de la compuerta

b) Los empujes a ambos lados sobre la compuerta

c) Los centros de empuje X_{CE} y X'_{CE} medidos desde B.

d) Valor de la fuerza F que mantiene la compuerta en la posición de la figura

$$CB' = \frac{1,5}{\cos 30^\circ} = 1,732\,m$$

$$CB = \frac{2,5}{\cos 30^\circ} = 2,887\,m$$

a) P_1 y P_2 en A

$$P_1 = \gamma \cdot h_1 = 1000\ kg/m^3 \cdot 2,0\,m = 2000\ kg/m^2$$

$$P_2 = \gamma \cdot h_2 = 1000\ kg/m^3 \cdot 1,000\,m = 1000\ kg/m^2$$

b) Empujes

$$E_1 = P_{cdg}\,\Delta_1 = \gamma_1 \cdot h_{cg} \cdot \Delta_1 = 1000\ kg/m^3 \cdot \overset{(\text{mitad } 2,5)}{1,25} \cdot (2,887 \cdot 1m) = 3608\ kg$$

$$E_2 = P_{cdg}\,\Delta_2 = \gamma_2 \cdot h_{cg} \cdot \Delta_2 = 1000\ kg/m^3 \cdot \overset{(\text{mitad } 1,5)}{0,75} (1,732 \cdot 1m) = 1299\ kg$$

c) Centros de empuje

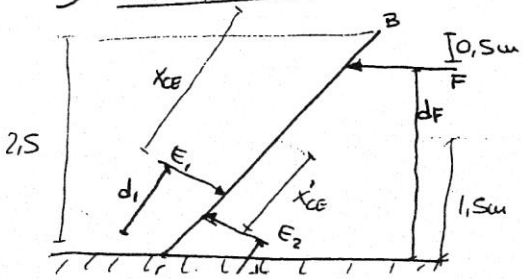
$$X_{CE} = \frac{I_{CG}}{X_{CG} \cdot \Delta} + X_{CG} \qquad I_1 = \frac{1}{12}\,\overset{(\text{base})}{b} \cdot h_1^3 = \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot (2,887)^3 = 2,0\ m^4$$

$$I_2 = \frac{1}{12}\,b\,h_2^3 = \frac{1}{12} \cdot 1\,(1,732)^3 = 0,43\ m^4$$

$$X_{CE} = \frac{2,0}{1,44 \cdot 2,88} + 1,44 = 1,92\,m$$

$$X'_{CE} = \frac{0,43}{0,866 \cdot 1,732} + 0,866 = 1,15\,m$$

d) Valor fuerza F



$$d_1 = 2,887\,m - X_{CE} = 2,887 - 1,92 = 0,967\,m \qquad d_F = 2\,m$$

$$d_2 = 1,732\,m - X'_{CE} = 1,732 - 1,15 = 0,582\,m$$

Equilibrio

$$\Sigma M_C = 0 \qquad E_1 \cdot d_1 - E_2 \cdot d_2 - F \cdot d_F = 0$$

$$F = \frac{E_1 \cdot d_1 - E_2 \cdot d_2}{d_F} = \frac{3608\ kg \cdot 0,967\,m - 1299\ kg \cdot 0,582\,m}{2,0\,m}$$

$$\boxed{F = 1366,46\ kg}$$

$M_A = 2 \cdot 2 - 4 \cdot \quad = -6$

En la viga de la figura, con una sección de 50 × 30 cm, calcular:

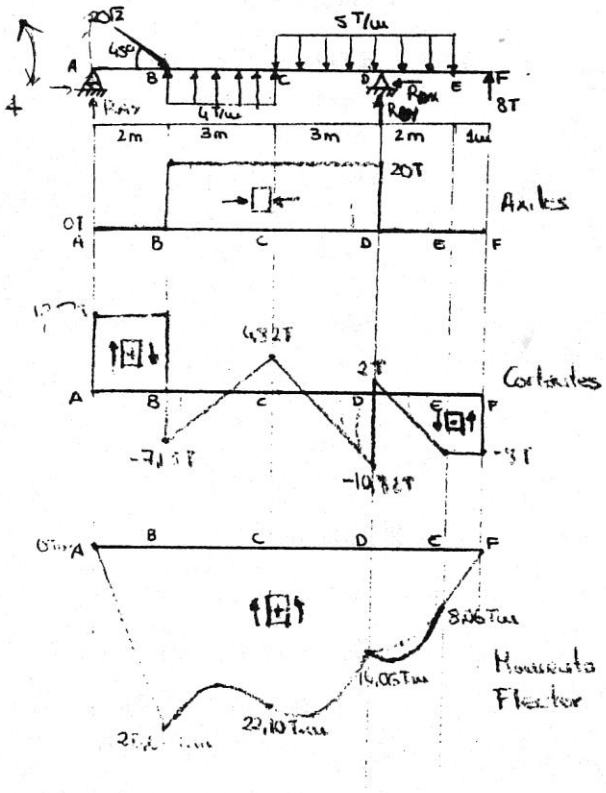
a) Reacciones

b) Ley de esfuerzos axiles (analítica y gráficamente)

c) Ley de esfuerzos cortantes (analítica y gráficamente)

d) Ley de momento flector (analítica y gráficamente)

e) Tensión normal en la fibra superior de la sección C.



$M_E^E\ (x=8,4) = 19,37$ T.m

$M_C^D\ (x=6,5) = 23,70$ T.m

$M'^E_D = 5x + 42 = 0 \ ; \ x = 8,4 \quad M_D^E = 14,46$ T.m

a) Reacciones

$\Sigma F_x = 0 \ ; \ \boxed{R_{Dx} = 20\,T}$

$\Sigma F_y = 0 \ ; \ R_{AY} - 20 + 12 - 25 + R_{DY} + 8 = 0 \ ; \ R_{AY} + R_{DY} = 25 \ ; \ \boxed{R_{AY} = 12,82\,T}$

$\Sigma M_A = 0 \ ; \ 20 \cdot 2 - 12 \cdot 3,5 + 25 \cdot 7,5 - R_{DY} \cdot 8 - 8 \cdot 11 = 0 \ ; \ \boxed{R_{DY} = 12,18\,T}$

b) Axiles

$N_A^B = 0T \ ; \ N_B^D = 20\,T \ ; \ N_D^F = 0T$

c) Cortantes

$Q_A^B = 12,82$ T

$Q_B^C = 12,82 - 20 + 4(x-2) = -7,18 + 4x - 8 = \underline{4x - 15,18} \begin{cases} Q_B = -7,18\,T \\ Q_C = 4,82\,T \end{cases}$

$Q_C^D = -7,18 + 12 - 5(x-5) = 4,82 - 5x + 25 = \underline{-5x + 29,82} \begin{cases} Q_C = 4,82\,T \\ Q_D = -10,18\,T \end{cases}$

$Q_D^E = -5x + 29,82 + 12,18 = \underline{-5x + 42} \begin{cases} Q_D = 2\,T \\ Q_E = -8\,T \end{cases}$

$Q_E^F = 12,82 - 20 + 12 + 12,18 - 25 = -8\,T$

d) Momento flector

$M_A^B = 12,82x \begin{cases} M_A = 0\ T.m \\ M_B = 25,62\ T.m \end{cases}$

$M_B^C = 12,82x - 20(x-2) + 4(x-2)\frac{(x-2)}{2} = 12,82x - 20x + 40 + 2(x-2)^2 =$

$12,82x - 20x + 40 + 2x^2 + 8 - 8x = \underline{2x^2 - 15,18x + 48} \begin{cases} M_B = 25,62\ T.m. \\ M_C = 22,10\ T.m \end{cases}$

$M_C^D = 12,82x - 20(x-2) + 12(x-3,5) - 5(x-5)\frac{(x-5)}{2} = 12,82x - 20x + 40 + 12$

$-42 - 2,5x^2 - 62,5 + 25x = \underline{-2,5x^2 + 29,82x - 64,5} \begin{cases} M_C = 22,10\ T.m \\ M_D = 14,06\ T.m \end{cases}$

$M_D^E = -2,5x^2 + 29,82x - 64,5 + 12,18(x-8) = -2,5x^2 + 29,82x - 64,5$

$+ 12,18x - 97,44 = \underline{-2,5x^2 + 42x - 161,94} \begin{cases} M_D = 14,06\ T.m \\ M_E = 8,06\ T.m \end{cases}$

$M_E^F = 12,82x - 20(x-2) + 12(x-3,5) - 25(x-7,5) + 12,18(x-8) =$

$12,82x - 20x + 40 + 12x - 42 - 25x + 187,5 + 12,18x - 97,44 =$

$\underline{-8x + 88,06} \begin{cases} M_E = 8,06\ T.m \\ M_F = 0,06\ T.m \end{cases}$

e) Tensión normal en la fibra superior de la sección C.

$$\sigma = \frac{M}{I}\,y \pm \frac{N}{S} = \frac{22,10 \cdot 10^5\ kg\,cm}{312500\ cm^4} \cdot 25\,cm \pm \frac{20 \cdot 10^3\ kg}{1500\ cm^2} = 176,8\ kg/cm^2 \pm 13,33\ kg/cm^2$$

$M_C = 22,10$ T.m

$N_C = 20T$

$I = \frac{1}{12}\,b\,h^3 = \frac{1}{12}\,30 \cdot 50^3 = 312500\ cm^4$

$S = 30 \cdot 50 = 1500\ cm^2$

$\sigma = 190,13\ kg/cm^2$ compresión

En la viga de la figura, con una sección de 1,00 x 0,50 m, calcular:

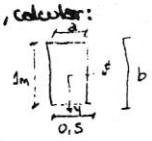
a) Reacciones

b) Ley de esfuerzos axiles (analítica y gráficamente)

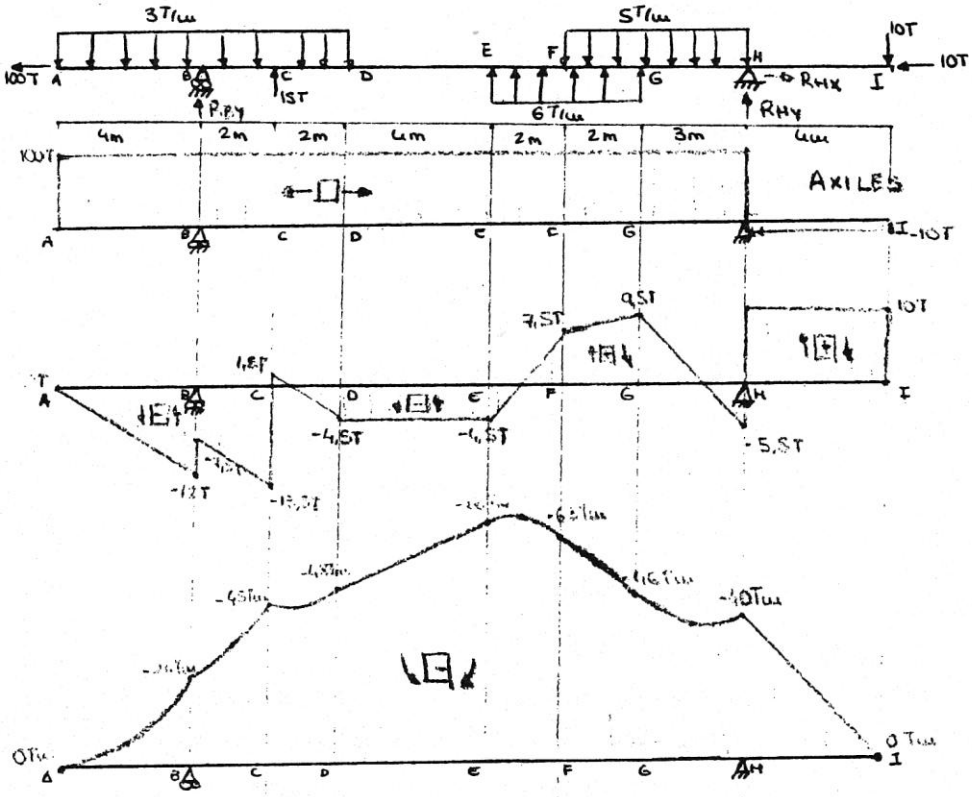
c) Ley de cortantes (analítica y gráficamente)

d) Ley de momento flector (analítica y gráficamente)

e) Máxima tensión tangencial, sección donde se produce



$$H_y = \int_0^{b/2} a\,y\,dy = a\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{b/2} = \frac{a\,b^2}{8}$$



a) Reacciones

$\Sigma F_x = 0$ $\boxed{R_{AX} = 110T}$

$\Sigma F_y = 0$ $24 - R_{BY} - 15 - 24 + 25 - R_{HY} + 1$

$R_{BY} = 20 - R_{HY}$

$\Sigma M_A = 0$ $24 \cdot 4 - R_{BY} \cdot 4 - 15 \cdot 6 - 24 \cdot$

$+ 25 \cdot 16,5 - R_{HY} \cdot 19 + 10 \cdot 23 = 0$

$312,5 - 4R_{BY} - 19R_{HY} = 0$

$312,5 - 4(20 - R_{HY}) - 19R_{HY} = 0$

$312,5 - 80 + 4R_{HY} - 19R_{HY} = ($

$\boxed{R_{HY} = 15,5T}$

$\boxed{R_{BY} = 4,5T}$

b) Axiles

$N_A^H = 100T$ $N_H^I = -10T$

c) Cortantes

$Q_A^B = -3x \begin{cases} Q_A = 0T \\ Q_B = -12T \end{cases}$

$Q_B^C = -3x + 4,5 \begin{cases} Q_B = -7,5T \\ Q_C = -13,5T \end{cases}$

$Q_C^D = -3x + 4,5 + 15 = -3x + 19,5 \begin{cases} Q_C = 1,5 \\ Q_D = -4 \end{cases}$

$Q_D^E = -24 + 4,5 + 15 = -4,5T$

$Q_E^F = -4,5 + 6(x - 12) = -4,5 + 6x - 72 =$

$6x - 76,5 \begin{cases} Q_E = -4,5T \\ Q_F = 7,5T \end{cases}$

$Q_F^G = 6x - 76,5 - 5(x - 14) = 6x - (\quad 5 -$

$+ 70 = x - 6,5 \begin{cases} Q_F = 7,5T \\ Q_G = 9,5T \end{cases}$

$Q_G^H = -4,5 + 24 - 5(x - 14) = 19,5 - 5x +$

$-5x + 89,5 \begin{cases} Q_G = 9,5T \\ Q_H = -5,5T \end{cases}$

$Q_H^I = -4,5 + 24 - 25 + 15,5 = 10T$

d) Momento Flector

$M_A^B = -3x \cdot \frac{x}{2} = -1,5x^2 \begin{cases} M_A = 0\,T.m \\ M_B = -24\,T.m \end{cases}$

$M_B^C = -1,5x^2 + 4,5(x-4) = -1,5x^2 + 4,5x - 18 \begin{cases} M_B = -24\,T.m \\ M_C = -45\,T.m \end{cases}$

$M_C^D = -1,5x^2 + 4,5x - 18 + 15(x-6) = -1,5x^2 + 4,5x - 18 + 15x - 90 =$

$-1,5x^2 + 19,5x - 108 \begin{cases} M_C = -45\,T.m \\ M_D = -48\,T.m \end{cases}$

$M_D^E = -24(x-4) + 4,5(x-4) + 15(x-6) = -24x + 96 + 4,5x - 18 + 15x - 90 =$

$-4,5x - 12 \begin{cases} M_D = -48\,T.m \\ M_E = -66\,T.m \end{cases}$

$M_E^F = -4,5x - 12 + 6(x-12)\frac{(x-12)}{2} = -4,5x - 12 + 6(x-12)^2 = -4,5x - 12 + 3(x^2 + 144 - 24x) = -4,5x - 12 + 3x^2 + 432 - 72x =$

$3x^2 - 76,5x + 420 \begin{cases} M_E = -66\,T.m \\ M_F = -63\,T.m \end{cases}$

$M_F^G = 3x^2 - 76,5x + 420 - 5(x-14)\frac{(x-14)}{2} = 3x^2 - 76,5x + 420 - 2,5(x-14)^2 = 3x^2 - 76,5x + 420 - 2,5(x^2 + 196 - 28x) =$

$3x^2 - 76,5x + 420 - 2,5x^2 + 70x - 490 = 0,5x^2 - 6,5x - 70 \begin{cases} M_F = -63\,T.m \\ M_G = -46\,T.m \end{cases}$

$M_G^H = -4,5x - 12 + 24(x-14) - 5(x-14)\frac{(x-14)}{2} = -4,5x - 12 + 24x - 336 - 2,5x^2 + 70x - 490 = -2,5x^2 + 89,5x - 838 \begin{cases} M_G = -46\,T.m \\ M_H = -40\,T.m \end{cases}$

$M_H^I = -4,5x - 12 + 24(x-14) - 25(x-16,5) + 15,5(x-19) = -4,5x - 12 + 24x - 336 - 25x + 412,5 + 15,5x - 294,5 = 10x - 230 \begin{cases} M_H \\ M_I \end{cases}$

$M_A^B(x=2) = -6\,T.m$; $M_B^C(x=5) = -33\,T.m$; $M_C^D(x=7) = -45\,T.m$ hacemos la derivada $M_C'^D = -3x + 19,5 = 0$; $x = 6,5$ $M_C^D(6,5) = -44,6\,T$

$M_E^F(x=13) = -67,5\,Tm$ Maximo $M_E'^F = 6x - 76,5 = 0$; $x = 12,75$; $M_E^F(x=12,75) = -67,69\,T.m$. $M_F^G(x=15) = -55\,T.m$

$M_H^H(x=17,5) = -37,4\,Tm$

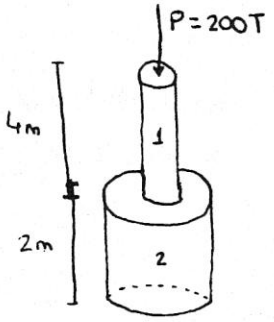
e) $\tau = \frac{Q \cdot H_y}{a \cdot I}$ $Q_{max} = -13,5\,T$ $I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}0,5 \cdot 1^3 = 0,0417$ $\tau = \frac{13,5\left(\frac{0,5 \cdot 1^2}{8}\right)}{0,5 \cdot 0,0417} = 40,47\,T/m^2$

El pilar de la figura se compone de dos cilindros metálicos macizos de materiales distintos. Para la carga indicada de la figura, se pide:

a) Diámetro de cada uno de los cilindros

b) Acortamiento total del pilar

c) Acortamiento adicional para un descenso de temperatura de 40°C.



$\sigma_1 = 26000\ T/m^2$ $\qquad \alpha_1 = 4\cdot 10^{-5}\ °C^{-1}$

$\sigma_2 = 15000\ T/m^2$ $\qquad \alpha_2 = 9\cdot 10^{-5}\ °C^{-1}$

$E_1 = 2\cdot 10^6\ kg/cm^2$

$E_2 = 1{,}5\cdot 10^6\ kg/cm^2$ $\qquad S = \pi\dfrac{\varnothing^2}{4}\ ,\ \varnothing = \sqrt{\dfrac{S\cdot 4}{\pi}}$

a) $\sigma_1 = \dfrac{P}{S_1}\ ,\ S_1 = \dfrac{P}{\sigma_1} = \dfrac{200\ T}{26000\ T/m^2} = 7{,}7\cdot 10^{-3}\ m^2$

$\sigma_2 = \dfrac{P}{S_2}\ ,\ S_2 = \dfrac{P}{\sigma_2} = \dfrac{200\ T}{15000\ T/m^2} = 13{,}3\cdot 10^{-3}\ m^2$

$\varnothing_1 = \sqrt{\dfrac{4\cdot 7{,}7\cdot 10^{-3}}{\pi}} = 0{,}1\,m$ $\qquad \varnothing_2 = \sqrt{\dfrac{4\cdot 13{,}3\cdot 10^{-3}}{\pi}} = 0{,}13\,m$

b)

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{\sigma_1}{E}\cdot l_1 + \frac{\sigma_2}{E}\cdot l_2 = \frac{2600\ kg/cm^2}{2\cdot 10^6\ kg/cm^2}\cdot 400\,cm + \frac{1500\ kg/cm^2}{1{,}5\cdot 10^6\ kg/cm^2}\cdot 200\,cm = 0{,}52 + 0{,}20 = 0{,}72\,cm$$

c)

$$\Delta l_T = \Delta l_{1T} + \Delta l_{2T} = \alpha_1\,\Delta T\cdot l_1 + \alpha_2\cdot \Delta T\, l_2 = 4\cdot 10^{-5}\,°C^{-1}\cdot 40°C\cdot 400\,cm + 9\cdot 10^{-5}\,°C^{-1}\cdot 40°C\cdot 200\,cm =$$

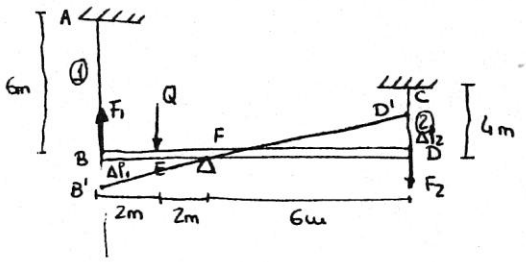
$$\Delta l_T = \Delta l_{1T} + \Delta l_{2T} = 0{,}64 + 0{,}72 = 1{,}36\,cm$$

Una barra infinitamente rigida esta colgada de las barras AB y CD, y se apoya en F tal como indica la figura, calcular:

a) La carga maxima Q que se puede colocar en E

b) El alargamiento de la barra AB

c) El incremento temperatura que debería tener la barra CD para compensar su acortamiento.



Datos:

$S_{AB} = 100 cm^2$ $\quad \sigma_{AB} = 2000\ kg/cm^2$ $\quad E = 2 \cdot 10^6\ kg/cm^2$

$S_{CD} = 50 cm^2$ $\quad \sigma_{CD} = 1500\ kg/cm^2$ $\quad \alpha = 0{,}00002\ °C^{-1}$

a) Δl_1 —— 4 m
Δl_2 —— 6m $\Big\}$ $\Delta l_2 = \frac{6}{4}\Delta l_1 = \frac{3}{2}\Delta l_1$

$F_1 = \sigma_{AB} \cdot S_{AB} = 2000\ kg/cm^2 \cdot 100 cm^2 = 200000\ kg = 200 T$

$F_2 = \sigma_{CD} \cdot S_{CD} = 1500\ kg/cm^2 \cdot 50 cm^2 = 75000\ kg = 75 T$

$\frac{l_2 \cdot \sigma_2}{E} = \frac{3}{2}\frac{l_1 \cdot \sigma_1}{E}$, $4\sigma_2 = \frac{3}{2} 6 \sigma_1$, $\sigma_2 = \frac{9}{4}\sigma_1 = 2{,}25\sigma_1$

Esfuerzo Critico $\Big\{$ Si $\sigma_1 = 2000\ kg/cm^2 \Rightarrow \sigma_2 = 4500\ kg/cm^2$ (ROMPE)
Si $\sigma_2 = 1500\ kg/cm^2 \Rightarrow \sigma_1 = 666{,}67\ kg/cm^2$

$F_1 = \sigma_1 \cdot S_1 = 666{,}67\ kg/cm^2 \cdot 100 cm^2 = 66667\ kg = 66{,}67\ Tn$

$F_2 = \sigma_2 \cdot S_2 = 1500\ kg/cm^2 \cdot 50 cm^2 = 75000\ kg = 75\ Tn$

Equilibrio en F

$\Sigma M_F = 0$ $\quad (+)$

$F_1 \cdot d_F - Q \cdot d_F + F_2 \cdot d_F = 0$; $66{,}67 \cdot 4 - Q \cdot 2 + 75 \cdot 6 = 0$; $Q = \frac{66{,}67 \cdot 4 + 75 \cdot 6}{2}$

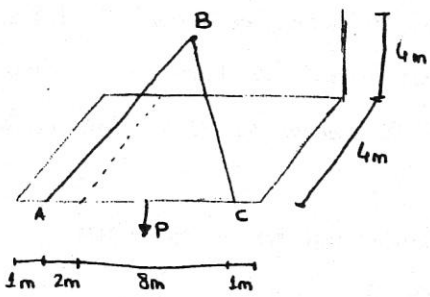
$Q = 358{,}34\ Tn$

b)

$\Delta l_{AB} = \Delta l_1 = \frac{\sigma_1}{E} \cdot l_1 = \frac{666{,}67\ kg/cm^2}{2 \cdot 10^6\ kg/cm^2} \cdot 600 cm = 0{,}20\ cm = 2 mm$

c) $\Delta l_2 = \frac{3}{2}\Delta l_1 = \frac{3}{2} \cdot 0{,}2 = 0{,}3 cm$

$\Delta l_T = \alpha \cdot L \cdot \Delta T$; $\Delta T = \frac{\Delta l_T}{\alpha \cdot L} = \frac{0{,}3\ cm}{0{,}00002\ °C^{-1} \cdot 400 cm} = 37{,}5\ °C$



$E = 2 \cdot 10^6 \ kg/cm^2$ $\qquad \sigma_{AB} = 2000 \ kg/cm^2$

$\alpha = 0{,}00005 \ °C^{-1}$ $\qquad P = 8000 \ kg$

$AB = 3 cm^2$

$BC = 4 cm^2$

a) $R_1 = \frac{P}{2} = \frac{8000}{2} = 4000 \ kg$ $\qquad c = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4{,}47 \ m$ $\qquad c' = \sqrt{4^2 + 8^2} = 8{,}94 \ m$

$R_2 = \frac{P}{2} = 4000 \ kg$ $\qquad l_{AB} = \sqrt{4^2 + (4{,}47)^2} = 6{,}00 \ m$ $\qquad l_{BC} = \sqrt{4^2 + (8{,}94)^2} = 9{,}80 \ m$

$\alpha = \text{arctg} \frac{4}{c} = \text{arctg} \frac{4}{4{,}47} = 41{,}82°$ $\qquad \beta = \text{arctg} \frac{4}{c'} = \text{arctg} \frac{4}{8{,}94} = 24{,}10°$

$F_2 = \frac{R_2}{\text{sen} \ \beta} = \frac{4000}{\text{sen} \ 24{,}10°} = 9795{,}98 \ kg$ $\qquad \sigma_{BC} = \frac{F_2}{S_{BC}} = \frac{9795{,}98}{4} = 2450 \ kg$

b)

$$\Delta l_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{E} \cdot l_{AB} = \frac{2000 \ kg/cm^2}{2 \cdot 10^6 \ kg/cm^2} \cdot 600 \ cm = 0{,}6 \ cm = 6 \ mm$$

$$\Delta l_{BC} = \frac{\sigma_{BC}}{E} \cdot l_{BC} = \frac{2456 \ kg/cm^2}{2 \cdot 10^6 \ kg/cm^2} \cdot 980 \ cm = 1{,}20 \ cm$$

$$d_A = \frac{\Delta l_{AB}}{\text{sen} \ \alpha} = \frac{0{,}6}{\text{sen} \ 41{,}82°} = 0{,}9 \ cm$$

$$d_C = \frac{\Delta l_{BC}}{\text{sen} \ \beta} = \frac{1{,}20}{\text{sen} \ 24{,}10°} = 2{,}94 \ cm$$

c)

$$d_A = d_C \qquad \frac{\Delta l_{AB}}{\text{sen} \ \alpha} = \frac{\Delta l_{BC}}{\text{sen} \ \beta} \qquad \Delta l_{BC} = \frac{\Delta l_{AB}}{\text{sen} \ \alpha} \cdot \text{sen} \ \beta = \frac{0{,}9}{\text{sen} \ 41{,}82°} \ \text{sen} \ 24{,}10° = 0{,}55 \ cm$$

$$\Delta l_{BC} = \frac{\sigma_{BC} \cdot l_{BC}}{E} = \frac{\frac{F_{BC}}{S_{BC}}}{E} \cdot l_{BC} \quad ; \quad S_{BC} = \frac{F_{BC} \cdot l_{BC}}{E \cdot \Delta l_{BC}} = \frac{9795 \cdot 980 \ cm}{2 \cdot 10^6 \cdot 0{,}55} = 8{,}73 \ cm^2$$

d)

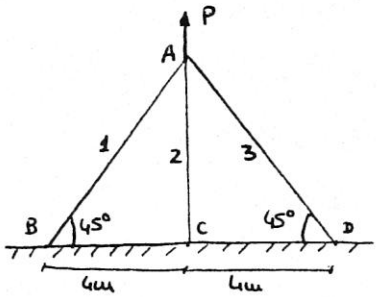
$$\Delta l'_{AB} = \alpha \cdot l_{AB} \cdot \Delta T = 0{,}00005 °C^{-1} \cdot 600 \ cm \cdot 52°C = 1{,}56 \ cm$$

$$\Delta l'_{BC} = \alpha \cdot l_{BC} \cdot \Delta T = 0{,}00005 °C^{-1} \cdot 980 \ cm \cdot 52°C = 2{,}55 \ cm$$

En la estructura formada por tres barras articuladas en sus extremos, las barras laterales tienen una sección de $5cm^2$, y una tensión admisible de $2200\ kg/cm^2$. La barra central tiene una sección de $8cm^2$ y una tensión admisible de $2000\ kg/cm^2$. El modulo de elasticidad de todas las barras es de $2\cdot10^6\ kg/cm^2$. Se pide:

a) Maximo valor de P (fuerza que tira del sistema) que puede soportar la estructura

b) Corrimiento vertical del punto A para dicho valor de P.

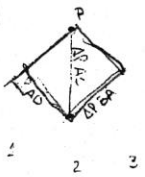


$\sigma_1 = \sigma_3 = 2200\ kg/cm^2$ $\quad S_1 = S_3 = 5cm^2$

$\sigma_2 = 2000\ kg/cm^2$ $\quad S_2 = 8cm^2$

$E = 2\cdot10^6\ kg/cm^2$

a)



Simetria $\Rightarrow F_1 = F_3 = \sigma_1 \cdot S_1 = 2200\ kg/cm^2 \cdot 5cm^2 = 11000\ kg = 11\ Tn$ (max)

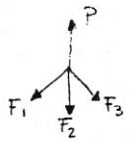
$F_2 = \sigma_2 \cdot S_2 = 2000\ kg/cm^2 \cdot 8cm^2 = 16000\ kg = 16\ Tn$ (max)

$\Delta l_{AB} = \Delta l_1$
$\Delta l_{AC} = \Delta l_2$
$\Delta l_{AD} = \Delta l_3$

Por deformación condicionada $\quad \Delta l_1 = \Delta l_3$
$\Delta l_2 = \sqrt{2}\ \Delta l_1$

$\Delta l = \frac{\sigma \cdot l}{E}$ $\quad \frac{\sigma_2 \cdot l_2}{E} = \sqrt{2}\ \frac{\sigma_1\ l_1}{E}$; $\sigma_2 \cdot l_2 = \sqrt{2}\ \sigma_1 \cdot l_1$; $\sigma_2 \cdot l_2 = \sqrt{2} \cdot \sigma_1 \cdot (l_2 \sqrt{2})$

$\sigma_2 \cdot l_2 = 2 \cdot \sigma_1 \cdot l_2$, $\sigma_2 = 2\ \sigma_1$



Si $\sigma_1 = 2200\ kg/cm^2 \Rightarrow \sigma_2 = 4400\ kg/cm^2$ (ROMPE)

Si $\sigma_2 = 2000\ kg/cm^2 \Rightarrow \sigma_1 = 1000\ kg/cm^2$

$F_1 = F_3 = \sigma_1 \cdot S_1 = 1000\ kg/cm^2 \cdot 5cm^2 = 5000\ kg = 5\ Tn$ $\qquad F_2 = \sigma_2 \cdot S_2 = 16\ Tn$

Equilibrio vertical $\Sigma F_y = 0$

$P - F_1 \cos 45° - F_2 - F_3 \cos 45° = 0 \Rightarrow P = 2 F_1 \cos 45° + F_2 = 2 \cdot 5 \cos 45° + 16 = 23{,}07\ T$

b)

$\Delta l_2 = \frac{\sigma_2}{E} \cdot l_2 = \frac{2000}{2\cdot10^6} \cdot 400\ cm = 0{,}4\ cm = 4\ mm$

Para colocar una marquesina se utilizan dos barras AB y BC de acero según se indica en la figura, que soportan el peso de forma equivalente. Sabiendo que las secciones son $AB = 3cm^2$ y $BC = 4cm^2$, y la tensión $\sigma_{AB} = 2000\ kg/cm^2$. Calcular:

a) La tensión σ_{BC} para un $P = 8000\ kg$

b) Alargamiento de la barras y descenso de los puntos A y C

c) Sección de la barra BC para que el borde AC de la marquesina se mantenga horizontal

d) Deformación de las barras para un incremento temperatura 52°C.

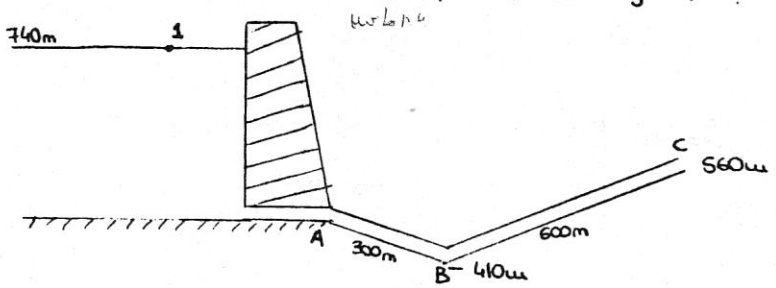
En el embalse adjunto abastece mediante la tubería ABC de 250 mm de diámetro, con unas pérdidas de $\Delta H = 0{,}015\, V^2/2g$. Calcular:

a) Caudal de abastecimiento en C.

b) Presión que soporta la tubería en B.

c) Potencia de una turbina, colocada en C y reduciendo el caudal a 500 l/s.

$R_T = 0{,}85$



a) $\phi = 250\,mm = 0{,}25\,m$

$S = \pi \frac{\phi^2}{4} = \pi \frac{0{,}25^2}{4} = 0{,}04908\ m^2$

Aplicamos Bernoulli entre 1-C

$H_1 = H_C + \Delta H_1^C$

$z_1 = z_C + \frac{V_C^2}{2g} + \left(0{,}015 \frac{V_C^2}{2g} \cdot 900\,m\right) = z_C + 14{,}5 \frac{V_C^2}{2g}$; $\frac{V_C^2}{2g} = \frac{z_1 - z_C}{14{,}5} = \frac{740 - 560}{14{,}5} = 12{,}4137$

$V_C = \sqrt{12{,}4137 \cdot 19{,}6} = 15{,}598\ m/s$

$Q_C = V_C \cdot S_C = 15{,}598\ m/s \cdot 0{,}04908\ m^2 = 0{,}766\ m^3/s = 766\ l/s$

b) Aplicamos Bernoulli entre 1-B

$z_1 = z_B + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} + \Delta H_1^B = z_B + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g}(1 + 0{,}015 \cdot 300) = z_B + \frac{P_B}{\gamma} + 5{,}5 \frac{V_B^2}{2g}$

$\frac{P_B}{\gamma} = z_1 - \left(z_B + 5{,}5 \frac{V_B^2}{2g}\right) = 740 - \left(410 + 5{,}5 \cdot \frac{15{,}598^2}{19{,}6}\right) = 261{,}73\,m$

$P_B = 261{,}73 \cdot \gamma = 261{,}73 \cdot 1000\ kg/m^3 \cdot 9{,}8 \simeq 2564954\ Pa \simeq 25\ kg/cm^2$

c) $Q = 500\ l/s$

$Q'_C = V'_C \cdot S_C$. $V'_C = \frac{Q'_C}{S} = \frac{0{,}500\ m^3/s}{0{,}04908\ m^2} = 10{,}187\ m/s$

Aplicamos Bernoulli entre 1-C

$H_1 = H_C + \Delta H_1^C + H_T$

$z_1 = z_C + \frac{V_C'^2}{2g} + 0{,}015 \frac{V_C'^2}{2g} \cdot 900 + H_T = z_C + 14{,}5 \frac{V_C'^2}{2g} + H_T$; $H_T = z_1 - \left(z_C + 14{,}5 \frac{V_C'^2}{2g}\right)$

$H_T = 740\,m - 1560\,m + 14{,}5 \cdot \frac{10{,}187^2}{19{,}6}\Big) = 740\,m - 1560\,m + 76{,}77) = 103{,}23\,m$

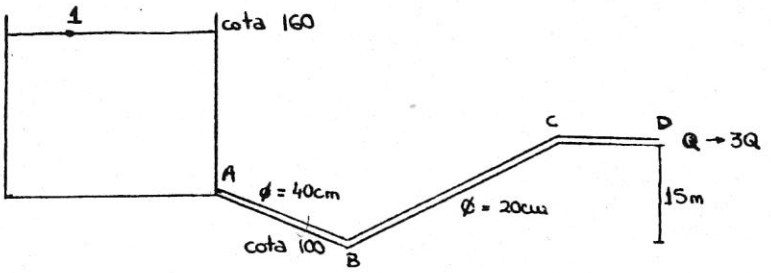
$\omega_T = \frac{\gamma \cdot Q \cdot H_T}{75} \cdot R_T = \frac{1000\ kg/m^3 \cdot 0{,}5\ m^3/s \cdot 103{,}23\,m}{75} \cdot 0{,}85 = 584{,}97\ CV$

Desde un deposito de agua sale una conducción AB de 40cm de diametro que enlaza con otra BD de 20 cm de diametro y desagua a la atmosfera en D (cota 115m). Calcular:

a) Caudal desaguado en D.

b) Presión en el punto B ($\phi = 40cm$) en kg/cm^2

c) Potencia de la bomba que insertada en B triplique el caudal obtenido en el apartado a



Perdidas:

$\Delta H_A^B = 0{,}02\, V^2$

$\Delta H_B^D = 0{,}05\, V^2$

$\eta_B = 0{,}85$

$S_B = \pi \frac{\phi_B^2}{4} = \pi \frac{0{,}40^2}{4} = 0{,}1256\, m^2$ $\quad V_B \cdot S_B = V_D \cdot S_D \;;\; V_B = \frac{V_D \cdot S_D}{S_B} = \frac{0{,}0314}{0{,}1256} \cdot V_D \;;\; V_B = 0{,}25\, V_D$

$S_D = \pi \frac{\phi_D^2}{4} = \pi \frac{0{,}20^2}{4} = 0{,}0314\, m^2$

a) Aplico Bernouilli entre A y D

$$Z_1 + \cancel{\frac{P_1}{\gamma}}^{0} + \cancel{\frac{V_1^2}{2g}}^{0} = Z_D + \cancel{\frac{P_D}{\gamma}}^{0} + \frac{V_D^2}{2g} + \Delta H_1^D \qquad H_1 = H_D + \Delta H_1^D$$

$$160 = 115 + \frac{V_D^2}{2g} + \left[0{,}02\, V_D^2 + 0{,}05\, V_D^2\right] \;;\; 160 = 115 + \frac{V_D^2}{2g} + \left[0{,}02\,(0{,}25\, V_D)^2 + 0{,}05\, V_D^2\right] \;;$$

$$160 = 115 + 0{,}1023\, V_D^2 \;;\; V_D = 20{,}97\, m/s$$

$$Q_D = V_D \cdot S_D = 20{,}97\, m/s \cdot 0{,}0314\, m^2 = 0{,}658\, m^3/s$$

$$V_B = 0{,}25 \cdot V_D = 0{,}25 \cdot 20{,}97 = 5{,}24\, m/s$$

b) Aplicamos Bernouilli entre 1 y B

$$Z_1 + \cancel{\frac{P_1}{\gamma}}^{0} + \cancel{\frac{V_1^2}{2g}}^{0} = Z_B + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{V_B^2}{2g} + \Delta H_1^B$$

$$160 = 100 + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{(5{,}24)^2}{2g} + 0{,}02\,(5{,}24)^2 \;;\; \frac{P_B}{\gamma} = 160 - 100 - \frac{(5{,}24)^2}{2g} - 0{,}02\,(5{,}24)^2 = 58{,}05\, m.c.a$$ (metros en columna de agua)

$$P_B = 58{,}05 \cdot \gamma = 58{,}05\, m \cdot 1000\, kg/m^3 \cdot 9{,}8\, m/s^2 = 580\,500\, Pa$$

$$P_B = \frac{580\,500}{10^5}\, Pa \simeq 57{,}00\, kg/cm^2$$

c) $V_D' = 3 V_D$

$Q' = 3Q \Rightarrow V_D \cdot S_D = 3Q \Rightarrow V_D' = 3 V_D$

$V_D' = 3 \cdot 20{,}97 = 62{,}91\, m/s$

Aplicamos Bernouilli entre 1 y D $\qquad H_1 + H_B = H_D + \Delta H_1^D$

$$Z_1 + \cancel{\frac{P_1}{\gamma}}^{0} + \cancel{\frac{V_1^2}{2g}}^{0} + H_B = Z_D + \cancel{\frac{P_D}{\gamma}}^{0} + \frac{V_D'^2}{2g} + \Delta H_1^D$$

$$160 + H_B = 115 + \frac{(62{,}91)^2}{2g} + \left[0{,}02\,(15{,}71)^2 + 0{,}05\,(62{,}91)^2\right] \;;\; H_B = 359{,}75\, m$$

$$\omega = \frac{\gamma \cdot Q \cdot H}{75 \cdot \eta_B} = \frac{1000\, kg/m^3 \cdot 1{,}974\, m^3/s \cdot 359{,}75\, m}{75 \cdot 0{,}85} = 11{,}250\, CV$$

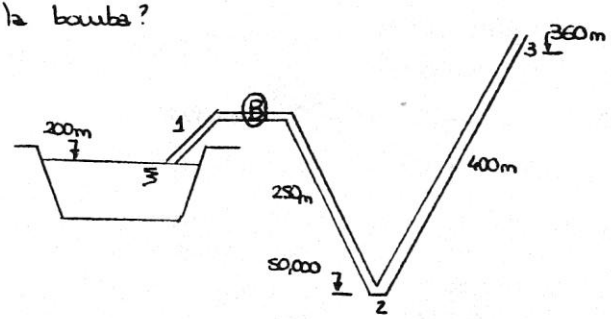
$Q' = 3 \cdot Q = 3 \cdot 0{,}658 = 1{,}974$

En la tubería de impulsión de regadío, se coloca una bomba hidráulica para conseguir un caudal de $2{,}5\ m^3/s$. Sabiendo que la longitud de la tubería es de 650 m y las pérdidas en ella $\Delta H = 0{,}04\ V^2/2g$. Calcular:

a) La potencia de la bomba W_B en CV

b) La presión en el punto 2 de la tubería en kg/cm^2

c) Si se sustituye el tramo 2-3 por una tubería $\phi = 500$ mm. ¿Qué potencia necesitaría la bomba?



$\phi_{1-3} = 800$ mm $\quad Q = 2{,}5\ m^3/s$

$\eta_B = 0{,}85$

$\Delta H = 0{,}04\ V^2/2g$

$$S = \pi \cdot \frac{\phi^2}{4} = \pi \cdot \frac{0{,}80^2}{4} = 0{,}503\ m^2$$

$$V = \frac{Q}{S} = \frac{2{,}5\ m^3/s}{0{,}503\ m^2} = 4{,}97\ m/s$$

a) Aplicamos Bernouilli en 1-3

$$Z_1 + H_B = Z_3 + \frac{V_3^2}{2g} + 0{,}04 \cdot \frac{V_3^2}{2g} \cdot 650$$

$$H_B = Z_3 - Z_1 + 27\ \frac{V_3^2}{2g} = 360 - 200 + 27 \cdot \frac{4{,}97^2}{19{,}62} = 194\ m$$

$$W_B = \frac{\gamma \cdot Q \cdot H_B}{75 \cdot \eta_B} = \frac{1000\ kg/m^3 \cdot 2{,}5\ m^3/s \cdot 194\ m}{75 \cdot 0{,}85} = 7608\ CV$$

b) Aplicamos Bernouilli entre 2-3

$$Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \cancel{\frac{V_2^2}{2g}}^{\,V_3} = Z_3 + \cancel{\frac{P_3}{\gamma}}^{\,0} + \cancel{\frac{V_3^2}{2g}}^{\,4} + \Delta H_2^3 \quad ; \quad Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} = Z_3 + 0{,}04 \cdot \frac{V_3^2}{2g} \cdot 400 \ ;$$

$$\frac{P_2}{\gamma} = Z_3 - Z_2 + 0{,}04 \cdot \frac{4{,}97^2}{19{,}62} \cdot 400 = 360 - 50 + 20{,}14 = 330{,}14\ m$$

$$P_2 = 330{,}14 \cdot \gamma = 330{,}14\ m \cdot 1000\ kg/m^3 \cdot 9{,}8 = 3235372\ Pa$$

$$P_2 = \frac{3235372\ Pa}{10^5} = 32{,}35\ kg/cm^2$$

c) $\phi_{2-3} = 500$ mm $= 0{,}5$ m $\qquad S_{2-3} = \pi \cdot \frac{\phi^2}{4} = \pi \cdot \frac{0{,}5^2}{4} = 0{,}196\ m^2$

$$V_3' = \frac{Q}{S} = \frac{2{,}5\ m^3/s}{0{,}196\ m^2} = 12{,}76\ m/s$$

$$\Delta H_2^3 = 0{,}04 \cdot \frac{V_3'^2}{2g} \cdot 400 = 0{,}04 \cdot \frac{12{,}76^2}{19{,}62} \cdot 400 = 132{,}8\ m$$

$$\Delta H_1^2 = 0{,}04 \cdot \frac{4{,}97^2}{19{,}62} \cdot 250 = 12{,}59\ m$$

Bernouilli entre 1-3

$$Z_1 + H_B = Z_3 + \frac{V_3'^2}{2g} + \left(0{,}04 \cdot 250 \cdot \frac{V_2^2}{2g} + 0{,}04 \cdot \frac{V_2'^2}{2g} \cdot 400\right) \ ; \ H_B = Z_3 - Z_1 + \frac{12{,}76^2}{19{,}62} + (12{,}59 + 132{,}80)$$

$$H_B = 360 - 200 + 8{,}30 + 12{,}59 + 132{,}80 = 313{,}69\ m$$

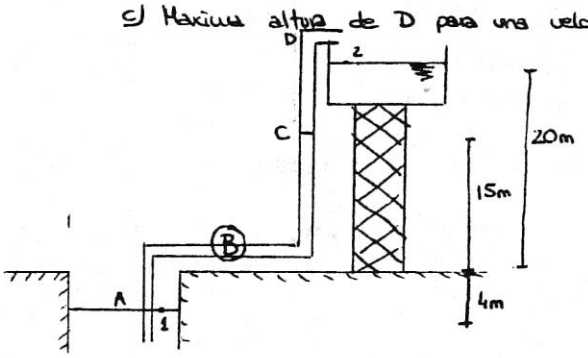
$$W_B' = \frac{\gamma \cdot Q \cdot H_B}{75 \cdot \eta_B} = \frac{1000\ kg/m^3 \cdot 2{,}5\ m^3/s \cdot 313{,}69\ m}{75 \cdot 0{,}85} = 12\,301\ CV$$

Para llenar un algibel se bombea agua desde un pozo, según el esquema adjunto. Sabiendo que las pérdidas de carga en la tubería de aspiración valen $\Delta H_A^B = 1{,}5\ V^2/2g$ y la de impulsión $\Delta H_B^D = 2\ V^2/2g$. Calcular para un caudal de $5\ l/s$:

a) Potencia de la bomba en CV.

b) Presión en C.

c) Máxima altura de D para una velocidad de salida $1\ m/s$.



$Q = 5\ l/s = 0{,}005\ m^3/s$

$\phi_A^B = 60\,mm \rightarrow S_A = \pi \cdot \frac{(0{,}06)^2}{4} = 0{,}0028\ m^2$

$\phi_B^D = 40\,mm \rightarrow S_D = \pi \cdot \frac{(0{,}04)^2}{4} = 0{,}0012\ m^2$

$S_A \cdot V_A = S_D \cdot V_D \ ; \ V_A = \frac{S_D \cdot V_D}{S_A} = \frac{0{,}0012}{0{,}0028} V_D = 0{,}43\, V_D$

$V_D = \frac{Q}{S_D} = \frac{0{,}005\ m^3/s}{0{,}0012\ m^2} = 4{,}17\ m/s$

$V_A = 0{,}43 \cdot 4{,}17 = 1{,}79\ m/s$

a) Aplicamos Bernouilli entre A-D

$H_A + H_B = H_D + \Delta H_B^D \ : \ 0 + H_B = 24 + \frac{V_D^2}{2g} + \left(1{,}5 \cdot \frac{V_A^2}{2g} + 2 \cdot \frac{V_D^2}{2g}\right) = 24 + 3\,\frac{V_D^2}{2g} + 1{,}5\,\frac{V_A^2}{2g}$

$H_B = 24 + 3 \cdot \frac{4{,}17^2}{19{,}62} + 1{,}5\,\frac{1{,}79^2}{19{,}62} = 24 + 3 \cdot 0{,}88 + 1{,}5 \cdot 0{,}16 = 26{,}88\ m$

$W_B = \frac{\gamma \cdot Q \cdot H_B}{75 \cdot \eta_B} = \frac{1000\ kg/m^3 \cdot 0{,}005\ m^3/s \cdot 26{,}88\ m}{75} = 1{,}79\ CV$

b) Aplicamos Bernouilli entre C-D

son iguales

$H_C = H_D \Rightarrow z_C + \frac{P_C}{\gamma} + \frac{V_C^2}{2g} = z_D + \cancel{\frac{P_D}{\gamma}}^{\,0} + \cancel{\frac{V_D^2}{2g}} + \Delta H_C^D$

$\frac{P_C}{\gamma} = z_D - z_C + \Delta H_C^D = 24 - 19 + 2 \cdot \frac{V_C^2}{2g}\left(5/20\right) = 24 - 19 + 2 \cdot 0{,}89 \cdot \left(5/20\right) = 5{,}445\ mca$ (m en columna de agua)

xq recorre 5m de la tubería no los 20m

$P_C = 5{,}445 \cdot \frac{1000 \cdot 9{,}8}{10^5} = 0{,}53\ kg/cm^2$

c) Bernouilli A - D'

$V_D = 1\ m/s$

$V_A = 0{,}43 \cdot 1 = 0{,}43\ m/s$

$H_A + H_B = z_D + \Delta H_A^D \ ; \ 0 + H_B = z_D + \frac{V_D'^2}{2g} + \left(1{,}5\,\frac{V_A'^2}{2g} + 2 \cdot \frac{V_D'^2}{2g}\right) \ ;$

$z_D = H_B - \left(3\,\frac{V_D'^2}{2g} + 1{,}5\,\frac{V_A'^2}{2g}\right) = 26{,}88 - \left(3 \cdot \frac{1^2}{19{,}62} + 1{,}5 \cdot \frac{0{,}43^2}{19{,}62}\right) = 26{,}88 - (0{,}15 + 0{,}014) = 26{,}72\ m$

Sobre la viga de la figura, con una sección de 30x90 cm, calcular:

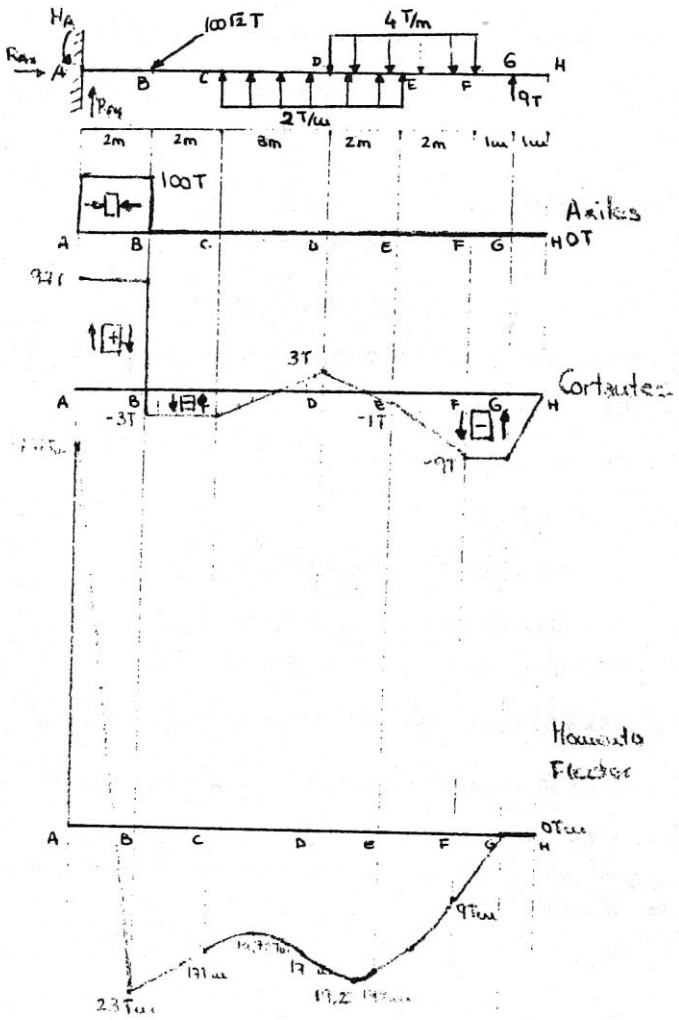
a) Reacciones

b) Ley de esfuerzos axiles (analítica y gráficamente)

c) Ley de esfuerzos cortantes (analítica y gráficamente)

d) Ley de momento flector (analítica y gráficamente).

e) Tensión tangencial en la fibra central del punto D



a) Reacciones

$\Sigma F_x = 0$; $\boxed{R_{Ax} = 100\,T}$

$\Sigma F_y = 0$; $R_{Ay} - 100 + 10 - 16 + 9 = 0$ $\boxed{R_{Ay} = 97\,T}$

$\Sigma M_A = 0$; $-H_A + 100 \cdot 2 - 10 \cdot 6{,}5 + 16 \cdot 9 - 9 \cdot 12 = 0$; $\boxed{H_A = 171\,T.m}$

b) Axiles

$N_A^B = 100\,T$; $N_B^H = 0\,T$

c) Cortantes

$Q_A^B = 97\,T$

$Q_B^C = 97 - 100 = \underline{-3\,T}$

$Q_C^D = -3 + 2(x-4) = -3 + 2x - 8 = \underline{2x - 11}$ $\begin{cases} Q_C = -3\,T \\ Q_D = 3\,T \end{cases}$

$Q_D^E = 2x - 11 - 4(x-7) = 2x - 11 - 4x + 28 = \underline{-2x + 17}$ $\begin{cases} Q_D = 3\,T \\ Q_E = -1\,T \end{cases}$

$Q_E^F = -3 + 10 - 4(x-7) = 7 - 4x + 28 = \underline{-4x + 35}$ $\begin{cases} Q_E = -1\,T \\ Q_F = -9\,T \end{cases}$

$Q_F^G = -3 + 10 - 16 = -9\,T$

$Q_G^H = -9 + 9 = 0\,T$

d) Momento flector

$M_A^B = -171 + 97x = \underline{97x - 171}$ $\begin{cases} M_A = -171\,T.m \\ M_B = 23\,T.m \end{cases}$

$M_B^C = 97x - 171 - 100(x-2) = 97x - 171 - 100x + 200 = \underline{-3x + 29}$ $\begin{cases} M_B = 23 \\ M_C = 17 \end{cases}$

$M_C^D = -3x + 29 + 2(x-4)\frac{(x-4)}{2} = -3x + 29 + (x-4)^2 = -3x + 29 + x^2 + 16$
$- 8x = \underline{x^2 - 11x + 45}$ $\begin{cases} M_C = 17\,T.m \\ M_D = 17\,T.m \end{cases}$

$M_D^E = x^2 - 11x + 45 - 4(x-7)\frac{(x-7)}{2} = x^2 - 11x + 45 - 2(x-7)^2 = x^2 - 11x$
$+ 45 - 2(x^2 + 49 - 14x) = x^2 - 11x + 45 - 2x^2 - 98 + 28x =$
$\underline{-x^2 + 17x - 53}$ $\begin{cases} M_D = 17\,T.m \\ M_E = 19\,T.m \end{cases}$

$M_E^F = -3x + 29 + 10(x - 6{,}5) - 8(x-8) - 4(x-9)\frac{(x-9)}{2} = -3x + 29 + 10x$
$- 65 - 8x + 64 - 2(x-9)^2 = -x + 28 - 2(x^2 + 81 - 18x) = -x + 28 - 2x^2$
$- 162 + 36x = \underline{-2x^2 + 35x - 134}$ $\begin{cases} M_E = 19\,T.m \\ M_F = 9\,T.m \end{cases}$

$M_F^G = -3x + 29 + 10(x - 6{,}5) - 16(x-9) = -3x + 29 + 10x - 65 - 16x + 14$
$\underline{-9x + 108}$ $\begin{cases} M_F = 9\,T.m \\ M_G = 0\,T.m \end{cases}$

$M_G^H = -9x + 108 + 9(x-12) = -9x + 108 + 9x - 108 = \underline{0}\,T.m$

$M_C^D{}_{(x=5{,}5)} = 14{,}75\,T.m$

$M_D^E{}_{(x=8)} = 19\,T.m$ por lo tanto tengo q hacer la derivada

$M_D^{E\,\prime} = -2x + 17 = 0$; $x = 8{,}5$ $M_D^E{}_{(x=8{,}5)} = 19{,}25\,T.m$

$M_E^F{}_{(x=10)} = 16\,T.m$

e) Tensión tangencial en la fibra central de D.

$\tau = \frac{Q \cdot M_y}{a \cdot I}$ $Q_D = 3\,T$

$I = \frac{1}{12} b h^3 - \frac{1}{12} 0{,}3 \cdot 0{,}9^3 = 0{,}018225\,m^4$

$M_y = \int_0^{b/2} a\,y\,dy = a\left[\frac{y^2}{2}\right]^{b/2} = \frac{a\,b^2}{8}$

$\tau = \frac{Q \cdot \frac{a\,b^2}{8}}{a \cdot I} = \frac{3\,T\left(\frac{0{,}3 \cdot 0{,}9^2}{8}\right)m^3}{0{,}30\,m \cdot 0{,}018225\,m^4} = 16{,}67\ T/m^2$

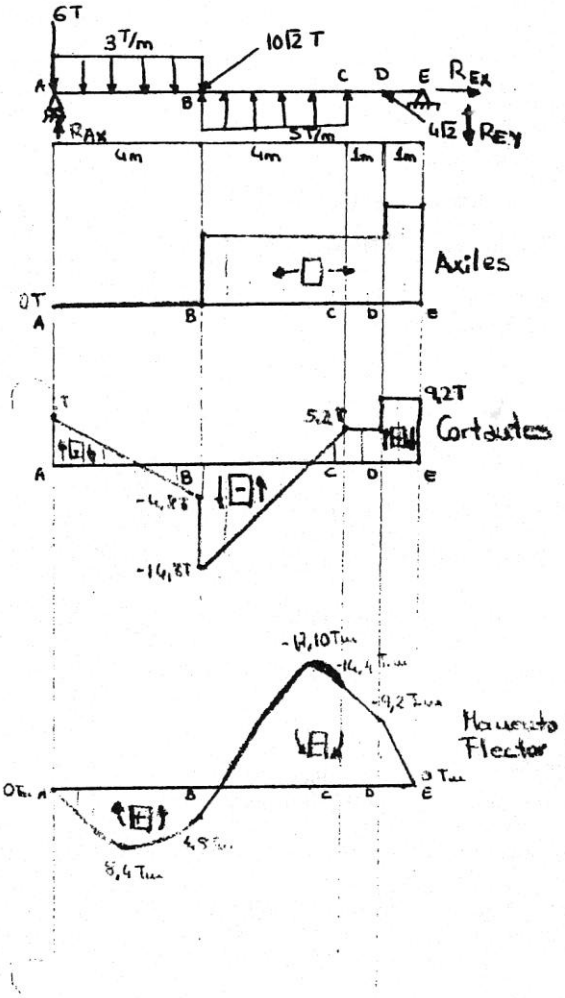
Sobre la viga de 40 x 20 cm de la figura actúan las cargas indicadas, calcular:

a) Reacciones en los apoyos

b) Ley de esfuerzos axiles y cortantes (analítica y gráficamente)

c) Ley de momento flector (analítica y gráficamente)

d) Tensión normal máxima, indicando la sección y la fibra donde se produce.



a) Reacciones

$\Sigma F_x = 0$; $\boxed{R_{EX} = 14\,T}$

$\Sigma F_y = 0$; $R_{AX} - 6 - 12 - 10 + 20 + 4 - R_{EY} = 0$; $R_{AX} - R_{EY} = 4$

$\Sigma M_A = 0$; $12 \cdot 2 + 10 \cdot 4 - 20 \cdot 6 - 4 \cdot 9 + R_{EY} \cdot 10 = 0$; $\boxed{R_{EY} = 9{,}2\,T}$

$\boxed{R_{AX} = 13{,}2\,T}$

b) Axiles y Cortantes

$N_A^B = 0\,T$; $N_B^D = 10\,T$; $N_D^E = 14\,T$

$Q_A^B = -6 + 13{,}2 - 3x = -3x + 7{,}2$ $\begin{cases} Q_A = 7{,}2\,T \\ Q_B = -4{,}8\,T \end{cases}$

$Q_B^C = 7{,}2 - 12 - 10 + 5(x-4) = -14{,}8 + 5x - 20 = 5x - 34{,}8$ $\begin{cases} Q_B = -14{,}8\,T \\ Q_C = 5{,}2\,T \end{cases}$

$Q_C^D = -14{,}8 + 20 = 5{,}2\,T$

$Q_D^E = 5{,}2 + 4 = 9{,}2\,T$

c) Momento flector

$M_A^B = 13{,}2x - 6x - 3x\frac{x}{2} = -1{,}5x^2 + 7{,}2x$ $\begin{cases} M_A = 0\,T.m \\ M_B = 4{,}8\,T.m \end{cases}$

$M_B^C = 7{,}2x - 12(x-2) - 10(x-4) + 5(x-4)(x-4)/2 = 7{,}2x - 12x + 24 - 10x$
$+ 40 + 2{,}5(x-4)^2 = -14{,}8x + 64 + 2{,}5x^2 + 40 - 20x = 2{,}5x^2 - 34{,}8x + 104$ $\begin{cases} M_B = 0 \\ M_C = - \end{cases}$

$M_C^D = -14{,}8x + 64 + 20(x-6) = -14{,}8x + 64 + 20x - 120 = 5{,}2x - 56$ $\begin{cases} M_C = -14{,}4 \\ M_D = -9{,}2\,T \end{cases}$

$M_D^E = 5{,}2x - 56 + 4(x-9) = 5{,}2x - 56 + 4x - 36 = 9{,}2x - 92$ $\begin{cases} M_D = -9{,}2\,T. \\ M_E = 0\,T.m \end{cases}$

$M_{A\,(x=2)}^B = 8{,}4\,T.m$

$M_{B\,(x=6)}^C = -14{,}8\,T.m$ (tenemos q hacer la derivada xq el punto medio no nos soluciona nada)

$M'^C_B = 5x - 34{,}8 = 0$; $x = 6{,}96$ $M_{B\,(x=6{,}96)}^C = -17{,}10\,T.m$

d) Tensión normal máxima

$$\sigma = \frac{M}{I}y \pm \frac{N}{S} = \frac{17{,}10 \cdot 10^5\ kg\,cm}{106667\ cm^4} \cdot 20\,cm \pm \frac{10 \cdot 10^3\ kg}{800\ cm^2} = 320{,}62\ kg/cm^2 \pm 12{,}5\ kg/cm^2$$

$M_{max} = 17{,}10\,T.m$ $N = 10\,T$

$I = \frac{1}{12} b \cdot h^3 = \frac{1}{12} \cdot 20 \cdot 40^3 = 106667\ cm^4$

$S = 20 \cdot 40 = 800\ cm^2$

$\sigma_{max} = 333{,}12\ kg/cm^2$ Fibra superior, tracción y sección $x = 7\,m$

✱ En la viga de la figura de dimensiones 0,5 x 0,5 m (sección). Se pide:

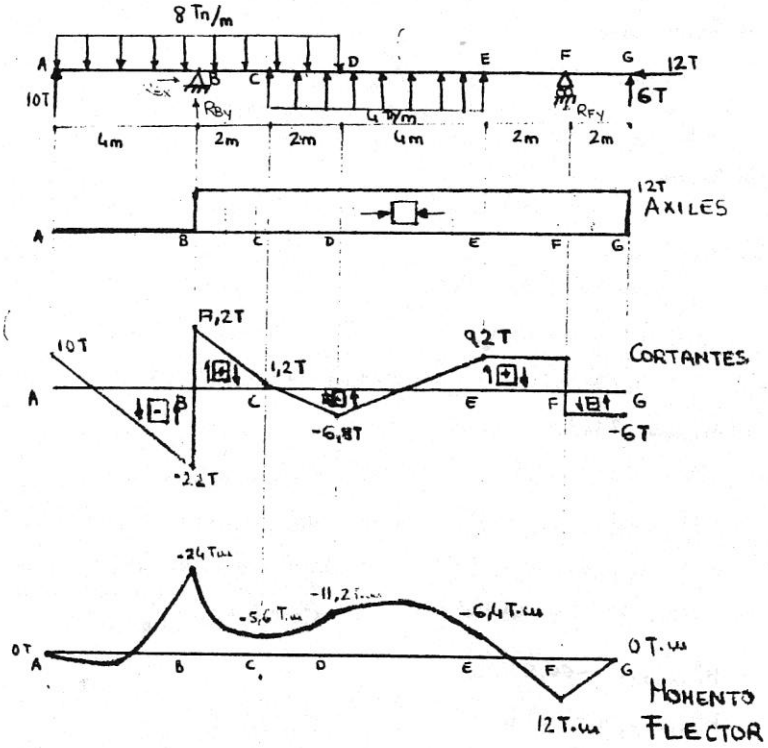
a) Reacciones

b) Ley de esfuerzos axiles (analítica y gráficamente)

c) Ley de esfuerzos cortantes (analítica y gráficamente)

d) Ley de momentos flectores (analítica y gráficamente)

e) Máxima tensión tangencial indicando la sección y fibra donde se localiza.



a) Reacciones

$\Sigma F_x = 0$, $\boxed{R_{Bx} = 12\,T}$

$\Sigma F_y = 0$, $10 - 64 + R_{By} + 24 + R_{Fy} + 6 = 0$;

$R_{By} = 24 - R_{Fy}$

$\Sigma M_A = 0$; $64 \cdot 4 - R_{By} \cdot 4 - 24 \cdot 9 - R_{Fy} \cdot 14 - 6 \cdot 16 = 0$

$-4(24 - R_{Fy}) - 14 R_{Fy} - 56 = 0$, $-96 + 4R_{Fy} - 14R_{Fy} - 56 = 0$

$-10 R_{Fy} - 152 = 0$ $\boxed{R_{Fy} = -15,2\,T}$

$\boxed{R_{By} = 24 - (-15,2) = 39,2\,T}$

b) Axiles

$N_A^B = 0\,T$, $N_E^G = 12\,T$

c) Cortantes

$Q_A^B = 10 - 8x \begin{cases} Q_A = 10\,T \\ Q_B = -22\,T \end{cases}$

$Q_B^C = 10 - 8x + 39,2 = -8x + 49,2 \begin{cases} Q_B = 17,2\,T \\ Q_C = 1,2\,T \end{cases}$

$Q_C^D = -8x + 49,2 + 4(x-6) = -8x + 49,2 + 4x - 24 =$

$-4x + 25,2 \begin{cases} Q_C = 1,2\,T \\ Q_D = -6,8\,T \end{cases}$

$Q_D^E = -6,8\,T + 4(x-8) = 4x - 38,8 \begin{cases} Q_D = -6,8\,T \\ Q_E = 9,2\,T \end{cases}$

$Q_E^F = 10 - 64 + 39,2 + 24 = 9,2\,T$

$Q_F^G = 9,2 - 15,2 = -6\,T$

d) Momento flectores

$M_A^B = 10x - 8x\,(x/2) = -4x^2 + 10x \begin{cases} M_A = 0\,T\,m \\ M_B = -24\,T.m \end{cases}$ $M_{A(x=2)}^B = 4\,T.m$

$M_B^C = -4x^2 + 10x + 39,2\,(x-4) = -4x^2 + 10x + 39,2x - 156,8 = -4x^2 + 49,2x - 156,8 \begin{cases} M_B = -24\,T.m \\ M_C = -5,6\,T.m \end{cases}$ $M_{B(x=5)}^C = -10,8\,T.m$

$M_C^D = -4x^2 + 49,2x - 156,8 + 4(x-6)\frac{(x-6)}{2} = -4x^2 + 49,2x - 156,8 + 2(x-6)^2 = -4x^2 + 49,2x - 156,8 + 2(x^2 + 36 - 12x) =$

$= -4x^2 + 49,2x - 156,8 + 2x^2 + 72 - 24x = -2x^2 + 25,2x - 84,8 \begin{cases} M_C = -5,6\,T.m \\ M_D = -11,2\,T.m \end{cases}$ $M_{C(x=7)}^D = -6,4\,T.m$

$M_D^E = 10x - 64(x-4) + 39,2\,(x-4) + 4\,(x-6)\frac{(x-6)}{2} = 10x - 64x + 256 + 39,2x - 156,8 + 2x^2 + 72 - 24x = 2x^2 - 38,8x + 171,2$

$M_D = -11,2\,T\,m$ $M_E = -6,4\,T.m$ $M_{D(x=10)}^E = -6,4$

$M_E^F = 10x - 64x + 256 + 39,2x - 156,8 + 24(x-9) = 9,2x - 116,8 \begin{cases} M_E = -6,4\,T.m \\ M_F = 12\,T.m \end{cases}$

$M_F^G = 9,2x - 116,8 - 15,2\,(x-14) = -6x + 96 \begin{cases} M_F = 12\,T.m \\ M_G = 0\,T.m \end{cases}$

e) Máxima tensión tangencial, sección y fibra en que se produce

$Q_{max} = -22\,T$

$I = \frac{1}{12}\,b\,h^3 = \frac{1}{12}\,50 \cdot 50^3 = 520\,833\,cm^4$

$a = 50\,cm$

$\mu = \int_0^{h/2} a\,y\,dy = a\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{h/2} = \frac{a\,h^2}{8}$

$\tau = \frac{Q \cdot \mu_y}{a \cdot I}$

$\tau = \frac{-22T\left(\frac{50 \cdot 50^2}{8}\right)cm^3}{50cm \cdot 520833\,cm^4} = -0,012\,T/cm^2$

En la estructura de una figura, calcular:

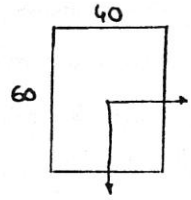
a) Reacciones

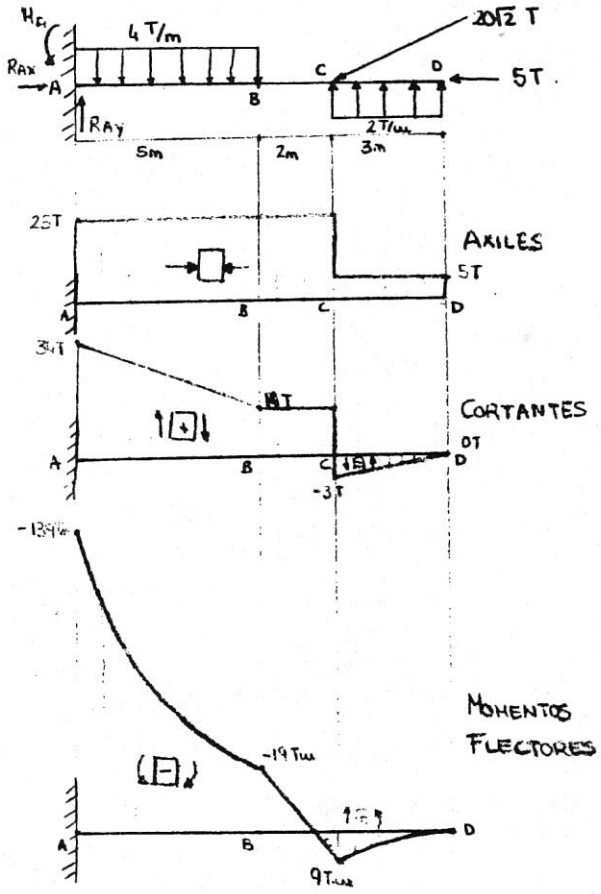
b) Ley de esfuerzos axiles (analítica y gráficamente)

c) Ley de esfuerzos cortantes (analítica y gráficamente)

d) Ley de momentos flectores (analítica y gráficamente)

e) Máxima tensión normal, indicando la sección y fibra donde se produce.





a) Reacciones

$\Sigma F_x = 0$; $R_{Ax} = 20 + 5$; $\boxed{R_{Ax} = 25\,T}$

$\Sigma F_y = 0$; $R_{Ay} - 20 - 20 + 6 = 0$; $\boxed{R_{Ay} = 34\,T}$

$\Sigma M_A = 0$; $M_A = 20 \cdot 2{,}5 + 20 \cdot 7 - 6 \cdot 8{,}5 = 139\ T \cdot m$

b) Axiles

$N_A^C = 25\,T$; $N_C^D = 5\,T$

c) Cortantes

$Q_A^B = 34 - 4x \begin{cases} Q_A = 34\,T \\ Q_B = 14\,T \end{cases}$

$Q_B^C = 34 - 20 = 14\,T$

$Q_C^D = 14 - 20 + 2(x-7) = 14 - 20 + 2x - 14 = 2x - 20 \begin{cases} Q_C = -6\,T \\ Q_D = 0\,T \end{cases}$

d) Momento Flectores

$M_A^B = -139 + 34x - 4x\,\frac{x}{2} = -2x^2 + 34x - 139 \begin{cases} M_A = -139\ T \cdot m \\ M_B = -19\ T \cdot m \end{cases}$

$M_B^C = -139 + 34x - 20\,(x - 2{,}5) = -139 + 34x - 20x + 50 = 14x - 89 \begin{cases} M_B = -19\ T \cdot m \\ M_C = 9\ T \cdot m \end{cases}$

$M_C^D = 14x - 89 - 20\,(x-7) + 2\,(x-7)\,\frac{(x-7)}{2} = 14x - 89 - 20x + 140 + (x-7)^2 =$

$= 14x - 89 - 20x + 140 + x^2 + 49 - 14x = x^2 - 20x + 100 \begin{cases} M_C = 9\ T \cdot m \\ M_D = 0\ T \cdot m \end{cases}$

$M_{A\,(x=2{,}5)}^B = -66{,}5\ T \cdot m$

$M_{C\,(x=8{,}5)}^D = 2{,}25\ T \cdot m$

e) Máxima tensión normal

$\sigma = \frac{M}{I}\,y \pm \frac{N}{S} = \frac{139 \cdot 10^5\ kg\ cm}{720000\ cm^4} \cdot 30\,cm \pm \frac{25 \cdot 10^3\ kg}{2400\ cm^2} =$

$I = \frac{1}{12}\,b\,h^3 = \frac{1}{12} \cdot 40 \cdot 60^3 = 720000\,cm^4$

$S = 60 \cdot 40 = 2400\ cm^2$

$M_A^B = 139\ T \cdot m$

$N = 25$

$\sigma = 579{,}17\ kg/cm^2 \pm 10{,}42\ kg/cm^2 = \begin{cases} 589{,}59\ kg/cm^2 \\ 568{,}75\ kg/cm^2 \end{cases}$

$\sigma_{max} = 589{,}59\ kg/cm^2$ Fibra superior, sección A

Sobre la viga empotrada de la figura, calcular:

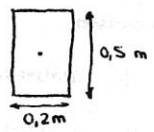
a) Reacciones

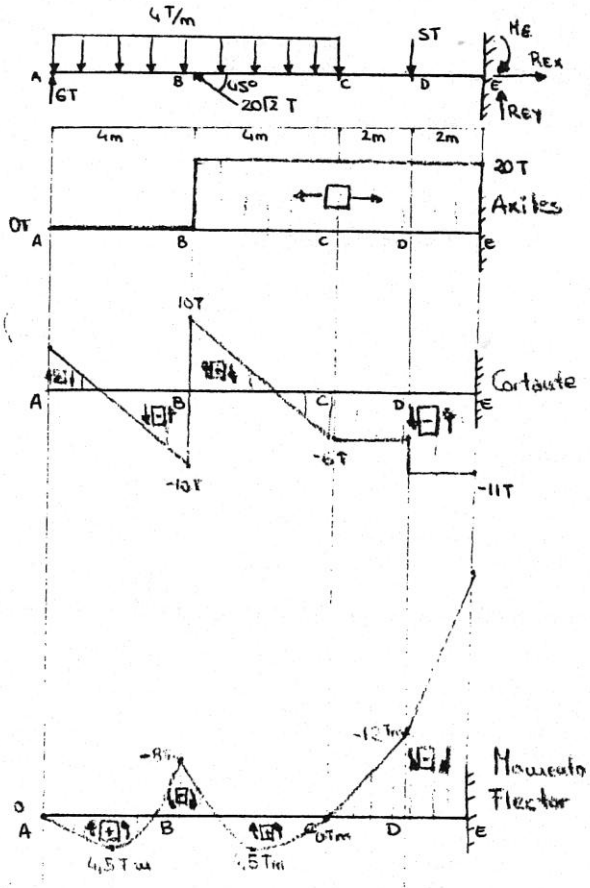
b) Ley de esfuerzos axiles (analítica y gráficamente)

c) Ley de esfuerzos cortantes (analítica y gráficamente)

d) Ley de momento flector (analítica y gráficamente)

e) Máxima tensión normal, sección y fibra donde se localiza.





a) Reacciones

$\Sigma F_x = 0$; $\boxed{R_{Ex} = 20T}$

$\Sigma F_y = 0$; $6 - 32 + 20 - 5 + R_{Ey} = 0$, $\boxed{R_{Ey} = 11\ T}$

$\Sigma M_E = 0$; $-6 \cdot 12 + 32 \cdot 8 - 20 \cdot 8 + 5 \cdot 2 + M_E = 0$; $\boxed{M_E = -34\ T.m}$

b) Axiles

$N_A^B = 0T \quad N_B^E = 20T$

c) Cortantes

$Q_A^B = -4x + 6 \quad \begin{cases} Q_A = 6T \\ Q_B = -10T \end{cases}$

$Q_B^C = -4x + 6 + 20 = -4x + 26 \quad \begin{cases} Q_B = 10T \\ Q_C = -6T \end{cases}$

$Q_C^D = 6 + 20 - 32 = -6T$

$Q_D^E = -6 - 5 = -11T$

d) Momento Flector

$M_A^B = 6x - 4x \frac{x}{2} = 6x - 2x^2 \quad \begin{cases} M_A = 0\ T.m \\ M_B = -8\ T.m \end{cases}$

$M_B^C = -2x^2 + 6x + 20(x-4) = -2x^2 + 6x + 20x - 80 = -2x^2 + 26x - 80$

$\begin{cases} M_B = -8\ T.m \\ M_C = 0\ T.m \end{cases}$

$M_C^D = 6x + 20(x-4) - 32(x-4) = 6x + 20x - 80 - 32x + 128 =$

$-6x + 48 \quad \begin{cases} M_C = 0\ T.m \\ M_D = -12\ T.m \end{cases}$

$M_D^E = -6x + 48 - 5(x-10) = -6x + 48 - 5x + 50 = -11x + 98 \quad \begin{cases} M_D = -12\ T.m \\ M_E = -34\ T. \end{cases}$

$M_A'^B = -4x + 6 = 0$; $x = 1,5$ $\quad M_A^B(x=1,5) = 4,5\ T.m$

$M_B'^C = -4x + 26 = 0$; $x = 6,5$ $\quad M_B^C(x=6,5) = 4,5\ T.m$

Derivamos los momentos para ver el punto máximo, ya que se trata de una parábola

e) Máxima tensión normal

$\sigma = \frac{M}{I} \cdot y \pm \frac{N}{S} = \frac{34 \cdot 10^5\ kg\ cm}{208333\ cm^4} \cdot 25\ cm \pm \frac{20 \cdot 10^3\ kg}{1000\ cm^2} = 408\ kg/cm^2 \pm 20\ kg/cm^2$ — $428\ kg/cm^2$ / $388\ kg/cm^2$

$M_E = 34\ Tm$

$N_E = 20T$

$I = \frac{1}{12} b \cdot h^3 = \frac{1}{12} \cdot 20 \cdot 50^3 = 208333\ cm^4$

$S = 20 \cdot 50 = 1000\ cm^2$

$\sigma_{max} = 428\ kg/cm^2$ Fibra superior, sección E, tercia

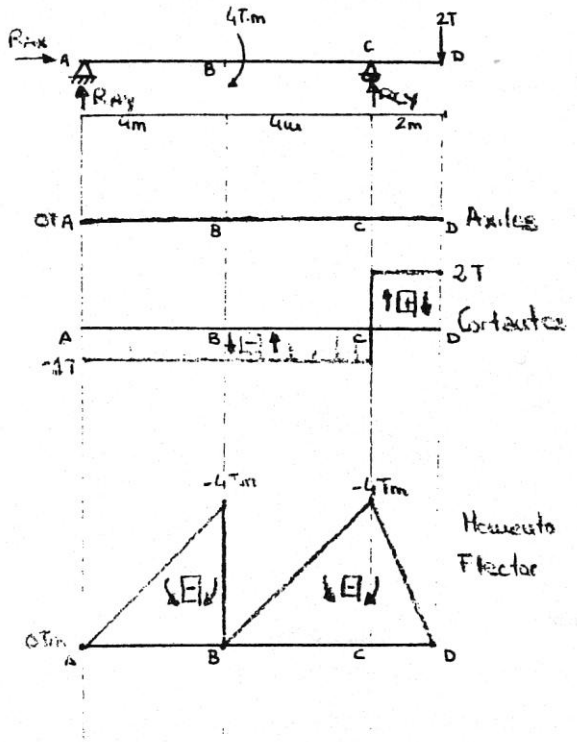
En la viga de la figura, ~~con una sección de 40x40~~, calcular:

a) Reacciones

b) Ley de esfuerzos axiles (analítica y gráficamente).

c) Ley de esfuerzos cortantes (analítica y gráficamente)

d) Ley de momento flector (analítica y gráficamente).



a) Reacciones

$\Sigma F_x = 0$; $\boxed{R_{Ax} = 0T}$

$\Sigma F_y = 0$; $R_{Ay} + R_{Cy} - 2 = 0$; $\boxed{R_{Ay} = -1\,T}$

$\Sigma M_A = 0$, $4 + 2 \cdot 10 - R_{Cy} \cdot 8 = 0$; $\boxed{R_{Cy} = 3\,T}$

b) Axiles

$N_A^D = 0T$ (xq no hay fuerzas horizontales)

c) Cortantes

$Q_A^C = -1\,T$

$Q_C^D = -1 + 3 = 2T$

d) Momento Flector

$M_A^B = -x$ $\begin{cases} M_A = 0\ T.m \\ M_B = -4\ T.m \end{cases}$

$M_B^C = -x + 4$ $\begin{cases} M_B = 0\ T.m \\ M_C = -4\ T.m \end{cases}$

$M_C^D = -x + 4 + 3(x-8) = -x + 4 + 3x - 24 = 2x - 20$ $\begin{cases} M_C = -4\ T.m \\ M_D = 0\ T.m \end{cases}$

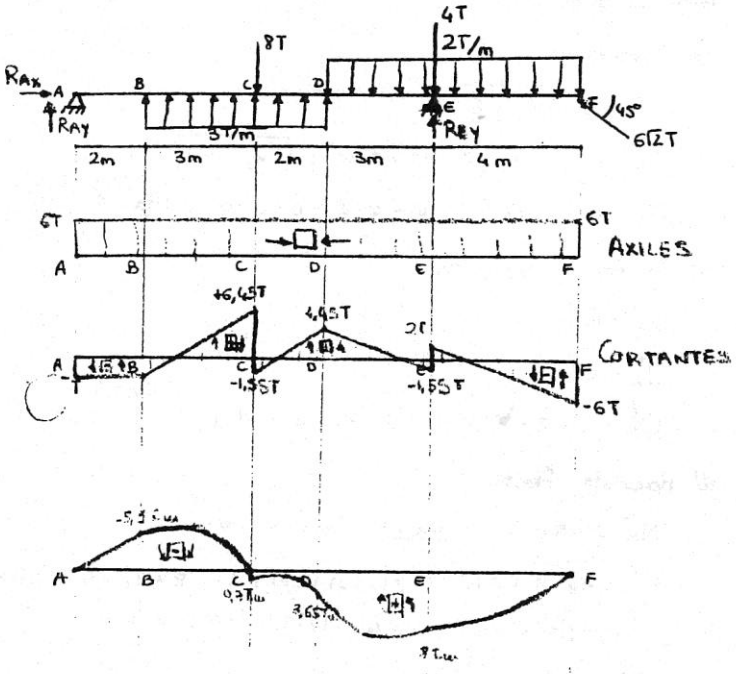
Dada la viga con las acciones indicadas, calcular:

a) Reacciones

b) Ley de esfuerzos axiles (analítica y gráficamente)

c) Ley de esfuerzos cortantes (analítica y gráficamente)

d) Ley de momentos flectores (analítica y gráficamente).



a) Reacciones

$\Sigma F_x = 0$; $\boxed{R_{Ax} = 6\,T}$

$\Sigma F_y = 0$; $R_{AY} + 15 - 8 - 4 - 14 + R_{EY} + 6 = 0$; $R_{AY} + R_{EY} = 5$

$\Sigma H_A = 0$; $8 \cdot 5 - 15 \cdot 4{,}5 + 4 \cdot 10 + 14 \cdot 10{,}5 - R_{EY} \cdot 10 - 6 \cdot 14 =$
$40 - 67{,}5 + 40 + 147 - 10 R_{EY} - 84 = 0$; $\boxed{R_{EY}} = \frac{75{,}5}{10} = \boxed{7{,}55\,T}$

$\boxed{R_{AY} = 5 - 7{,}55 = -2{,}55\,T}$

b) Axiles

$N_A^F = 6\,T$

c) Cortantes

$Q_A^B = -2{,}55\,T$

$Q_B^C = -2{,}55 + 3(x-2) = -2{,}55 + 3x - 6 = 3x - 8{,}55 \begin{cases} Q_B = -2{,}5 \\ Q_C = 6{,}4 \end{cases}$

$Q_C^D = 3x - 8{,}55 - 8 = 3x - 16{,}55 \begin{cases} Q_C = -1{,}55\,T \\ Q_D = 4{,}45\,T \end{cases}$

$Q_D^E = -2{,}55 - 8 + 15 - 2(x-7) = -2x + 18{,}45 \begin{cases} Q_D = 4{,}45\,T \\ Q_E = -1{,}55\,T \end{cases}$

$Q_E^F = -2x + 18{,}45 - 4 + 7{,}55 = -2x + 22 \begin{cases} Q_E = 2\,T \\ Q_F = -6\,T \end{cases}$

d) Momentos Flectores

$M_A^B = -2{,}55x \begin{cases} M_A = 0 \\ M_B = -5{,}5\ T.m \end{cases}$

$M_B^C = -2{,}55x + 3(x-2)\frac{(x-2)}{2} = -2{,}55x + 1{,}5(x-2)^2 = -2{,}55x + 1{,}5$
$(x^2 + 4 - 4x) = -2{,}55x + 1{,}5x^2 - 6x + 6 = 1{,}5x^2 - 8{,}55x + 6 \begin{cases} M_B = -5{,}5 \\ M_C = 0{,}75 \end{cases}$

$M_C^D = 1{,}5x^2 - 8{,}55x + 6 - 8(x-5) = 1{,}5x^2 - 8{,}55x + 6 - 8x + 40 =$
$1{,}5x^2 - 16{,}55x + 46 \begin{cases} M_C = 0{,}75\ T.m \\ M_D = 3{,}65\ T.m \end{cases}$

$M_D^E = -2{,}55x + 15(x - 4{,}5) - 8(x-5) - 2(x-7)\frac{(x-7)}{2} = -2{,}55x + 15$
$-67{,}5 - 8x + 40 - (x-7)^2 = 4{,}45x - 27{,}5 - x^2 - 49 + 14x =$
$-x^2 + 18{,}45x - 76{,}5 \begin{cases} M_D = 3{,}65\ T.m \\ M_E = 8\ T.m \end{cases}$

$M_E^F = -x^2 + 18{,}45x - 76{,}5 + 7{,}55(x-10) - 4(x-10) = -x^2 + 18{,}45$
$-76{,}5 + 7{,}55x - 75{,}5 - 4x + 40 = -x^2 + 22x - 112 \begin{cases} M_E = 8\ T. \\ M_F = 0\ T. \end{cases}$

$M_B^C{}_{(x=3{,}5)} = -5{,}55\ T.m$

$M_C^D{}_{(x=6)} = 0{,}7\ T.m$

$M_D^E{}_{(x=8{,}5)} = 8{,}07\ T.m$

$M_E^F{}_{(x=12)} = 8\ T.m$

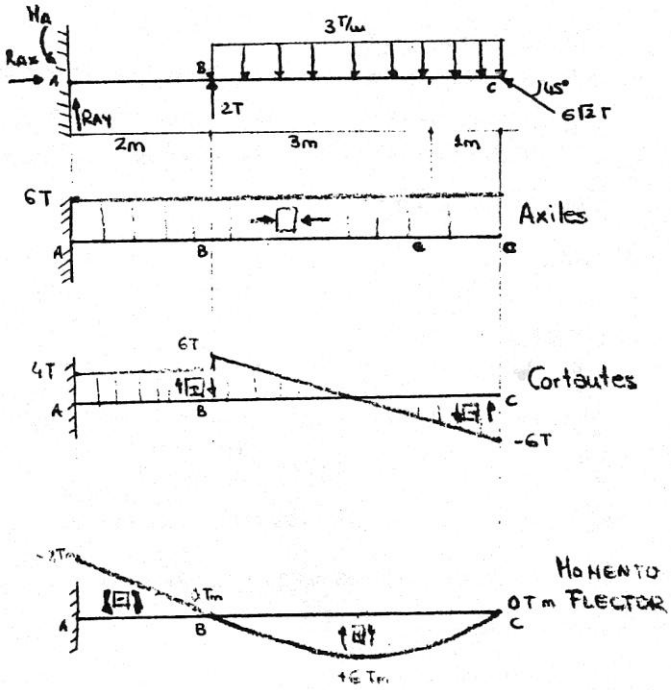
En la viga de la figura, con una sección de 40x20 cm (canto x ancho), calcular:

a) Reacciones en el empotramiento

b) Ley de esfuerzos axiles y cortantes (analítica y gráficamente).

c) Ley de momento flector (analítica y gráficamente).

d) Tensión normal máxima, sección y fibra donde se produce



a) Reacciones

$\Sigma F_x = 0$; $\boxed{R_{Ax} = 6\,T}$

$\Sigma F_y = 0$, $R_{AY} + 2 - 12 + 6 = 0$; $\boxed{R_{AY} = 4\,T}$

$\Sigma M_A = 0$, $-M_A + 12 \cdot 4 - 2 \cdot 2 - 6 \cdot 6 = 0$; $\boxed{M_A = 8\ T.m}$

b) Axiles y cortantes

$N_A^C = 6\,T$

$Q_A^B = 4\,T$

$Q_B^C = 4 + 2 - 3(x-2) = 6 - 3x + 6 = -3x + 12 \begin{cases} Q_B = 6\,T \\ Q_C = -6\,T \end{cases}$

c) Momento flector

$M_A^B = -8 + 4x = 4x - 8 \begin{cases} M_A = -8\ T.m \\ M_B = 0\ T.m \end{cases}$

$M_B^C = 4x - 8 + 2(x-2) - 3(x-2)\frac{(x-2)}{2} = 4x - 8 + 2x - 4 - 1{,}5(x-2)^2$

$6x - 12 - 1{,}5(x^2 + 4 - 4x) = 6x - 12 - 1{,}5x^2 + 6x - 6 =$

$-1{,}5x^2 + 12x - 18 \begin{cases} M_B = 0\ T.m \\ M_C = 0\ T.m \end{cases}$

$M_B^C{}_{(x=4)} = 6\ T.m$

d) Tensión normal máxima.

$\sigma = \frac{M}{I} \cdot y \pm \frac{N}{S}$

$I = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} 20 \cdot 40^3 = 106667\ cm^4$ $\qquad M = 8\,T.m$ (Sección A)

$S = b \cdot h = 20 \cdot 40 = 800\ cm^2$ $\qquad N = 6\,T$

$\sigma = \frac{8 \cdot 10^5\ kg\ cm}{106667\ cm^4} 20\,cm \pm \frac{6 \cdot 10^3\ kg}{800\ cm^2} = 150\ kg/cm^2 \pm 7{,}5\ kg/cm^2 \begin{cases} 157{,}5\ kg/cm^2 \\ 142{,}5\ kg/cm^2 \end{cases}$

$\sigma_{max} = 157{,}5\ kg/cm^2$ Fibra superior (compresión) Sección A