수학 과목

1. 정답 ⑤

$$\sqrt[3]{27}\times 4^{\frac{-1}{2}}=3\times 2^{-1}=\frac{3}{2}$$

2. 정답 ③

$f(x)=x^2-2x+3$

$f'(x)=2x-2$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=f'(3)=2\times 3-3=3$$

3. 정답 ②

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3)=2\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}3=60$$

$$2\sum_{k=1}^{10}a_k+30=60$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=15$$

4. 정답 ②

연속함수이므로 $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$

$\lim_{x\to 1}f(x)=4-f(1)$

$f(1)=4-f(1)$

$\therefore f(1)=2$

5. 정답 ①

$f(1)=2,\ f'(1)=3$

$g(x)=(x^3+1)f(x)$

$g'(x)=3x^2f(x)+(x^3+1)f'(x)$

$g'(1)=3\times 1\times f(1)+(1+1)f'(1)$

$\quad =3\times 2+2\times 3=12$

$\therefore g'(1)=12$

6. 정답 ④

$\cos\theta<0$이고 $\sin\theta$는 기함수이므로

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta=\frac{1}{7}\cos\theta$$

따라서 $\sin\theta=-\frac{1}{7}\cos\theta>0$

θ는 2사분면의 각이므로 $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta=-\frac{1}{7}$

즉 $\therefore \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{10}$

7. 정답 ③

$a>0$이고 $y=\log_2(x-a)$의 점근선은 진수 $x-a=0$

따라서 점근선은 $x=a$

$x=a$와 $y=\log_2\dfrac{x}{4}$와 만나는 좌표 $A(a, \log_2\dfrac{a}{4})$

$x=a$와 $y=\log_{\frac{1}{2}}x=-\log_2 x$와 만나는 좌표 $B(a, -\log_2 a)$

$\overline{AB}=\log_2\dfrac{a}{4}-(-\log_2 a)=\log_2\dfrac{a^2}{4}=4=\log_2 2^4$

$\dfrac{a^2}{4}=2^4=16$

$a^2=64$

$\therefore a=8$

8. 정답 ③

$y=2x^2-1, y=x^3-x^2+k$가 만나는 점의 개수가 2개 이르면

두 식을 연립했을 때 극값이 x축에 접할 때이므로

$2x^2-1=x^3-x^2+k$

$f(x)=x^3-3x^2+k+1=0$

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)=0$

따라서 $f(0)\times f(2)=0$

$f(0)\times f(2)=(k+1)(k-3)=0$

$k=3\ (\because k>0)$

9. 정답 1번

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)a_k}=Sn$ 으로 둔다.

$S_n-S_{n-1}=2n+1=\dfrac{1}{(2n-1)a_n}$ 이다.

$a_n=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, $a_n=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}a_n=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{21})$

정답은 $\dfrac{10}{21}$

10. 정답) 2번

Sol) (A의넓이)-(B의넓이)=3 이므로 $\int_0^3 f(x)dx = 3$ 이다.

따라서 주어진 식을 적분하여 계산하여 $k = \frac{4}{3}$.

(다른풀이) 삼차함수의 특수한 넓이공식을 이용하여

$A = \frac{k}{12}2^4 + \frac{k}{6}2^3$, $B = \frac{k}{12} \times 1^4 + \frac{k}{6} \times 1^3 \times 2$

따라서 $A - B = \frac{27}{12}k = 3$.

$\therefore k = \frac{4}{3}$

11. 정답) 3번

Sol) $y = 2tx - 1$ 과 $y = x^2$ 위의 점과의 최소거리가 되는 점이 P이므로 P에서 $y = x^2$의 접선의 기울기가 $2t$이다. 따라서 $P(t, t^2)$ 이고 직선 OP : $y = tx$ 이다. 따라서 $Q(\frac{1}{t}, 1)$.

$$\overline{PQ} = \sqrt{(\frac{1}{t} - t)^2 + (1 - t^2)^2} = (1 - t)\sqrt{(\frac{1+t}{t})^2 + (1+t)^2}.$$

$$\therefore \lim_{t \to 1-} \frac{\overline{PQ}}{1-t} = \lim_{t \to 1-} \sqrt{(\frac{1+t}{t})^2 + (1+t)^2} = 2\sqrt{2}$$

12. 정답 5번

a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 는 공차가 d이다.

b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 는 공차가 $2d$이므로,

a_1 a_3 a_5 와 b_1 b_2 b_3 , b_2 b_3 b_4 , b_3 b_4 b_5 인 3가지 경우가 생길 수 있다.

$\{a_1, a_3, a_5\}$ = $\{b_1, b_2, b_3\}$

$a_1 = b_1$
$a = 2a + d, \; a = -d$

$a_2 = 0$ 이다. 문제에서 $a_2 = -4$ 이므로 성립하지 않는다.

$a_1 = b_2$

$a = 2a + 3d,\ a = -3d$

$d = 2$

$a_{20} = 32$

$a_1 = b_3$

$a = 2a + 5d,\ a = -3d$

$d = 2$

$a_{20} = 32$

정답은 $14 + 32 = 46$

13. 정답 1번

$\angle BCD = \theta_1,\ \angle BAD = \theta_2$
$\triangle BCD$에서 코사인 법칙을 사용하면,
$\overline{BD}^2 = 9 + 4 + 4,\ \overline{BD} = \sqrt{17}$
$\overline{AC}$를 $1:2$로 내분, 두 원의 지름의 비는 $1:2$이다.
$2 \times \dfrac{3t}{\sin\theta_2} = \dfrac{5\sqrt{2}\,t}{\sin\theta_1}$
$\sin\theta_2 = \dfrac{4}{5},\ \cos\theta_2 = -\dfrac{3}{5}(\angle DAB > \dfrac{\pi}{2})$
$\overline{AB} = a,\ \overline{AD} = b$ 주어진 넓이 2를 이용하면, $\dfrac{1}{2}ab\sin\theta_2 = 2$
$ab = 5$

$\triangle ABD$에서 코사인법을 사용하면,
$17 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta_2$
$a^2 + b^2 = 11$
$(a+b)^2 = 21$
$a + b = \sqrt{21}$
정답은 $\sqrt{21}$

14. 정답) 3번

Sol) $a = 0$ or $a = 1$ 경우를 나눠서 생각 해보면 된다. 속도함수의 둘싸면은 위치의 변화량이고, 그중 최대인 상황은 $a = 1$인 경우 ($v(t)$가 $t = 1$에서 중근) 가 최대가 된다.

따라서, $v(t) = -t^4 + 4t^3 - 5t^2 + 2t$ 이다.

$$\therefore \int_0^2 v(t)dt = \frac{4}{15}$$

15. 정답 2번

$a_1 = k$
$a_2 = k-2-k = -2,\ a_2 < 0$
$a_3 = 2-k$
$k \le 2$ 일때, k가 2가 되면 곱이 0이 되므로 $k=1$이다.
$a_3 = 1,\ a_3 > 0$
$a_4 = -6,\ a_5 = 1,\ a_6 = -10$
$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_5 > 0$

$k=1$일 때, 성립하지 않는다.

$a_1 = k$
$a_2 = k-2-k = -2,\ a_2 < 0$
$a_3 = 2-k$
$k > 2$ 일때,
$a_3 = 1,\ a_3 < 0$
$a_4 = 8-2k,\ k=3$ 일때,
$a_4 = 2,\ a_5 = -9,\ a_6 = -19$
$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_5 < 0$

$k=3$일 때, 성립한다.

$a_1 = k$
$a_2 = k-2-k = -2,\ a_2 < 0$
$a_3 = 2-k$
$k > 2$ 일때,
$a_3 = 1,\ a_3 < 0$
$a_4 = 8-2k,\ k \ge 4$ 일때,
$a_5 = 16-3k,\ k=5$일때, $a_5 = 1,\ a_6 = -10$
$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_5 < 0$

$k=5$일 때, 성립한다.

$a_1 = k$
$a_2 = k-2-k = -2,\ a_2 < 0$
$a_3 = 2-k$
$k > 2$ 일때,
$a_3 = 1,\ a_3 < 0$
$a_4 = 8-2k,\ k \ge 4,\ a_4 < 0$일때,
$a_5 = 16-3k,\ k \ge 5$일때, $a_5 < 0$일때,
$a_6 = 26-4k,\ a_6 > 0$이어야하므로 $k=6$
$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_5 < 0$

$k=6$일 때, 성립한다.

정답은 $3+5+6=14$

16. 정답 3

$2^{x-6} \le \left(\frac{1}{4}\right)^{x}$
$2^{x-6} \le 2^{-2x}$
$x-6 \le -2x$
$3x \le 6$
$\therefore x \le 2$
을 만족하는 자연수는 $1,\ 2$
$\therefore 1+2=3$

17. 정답 33

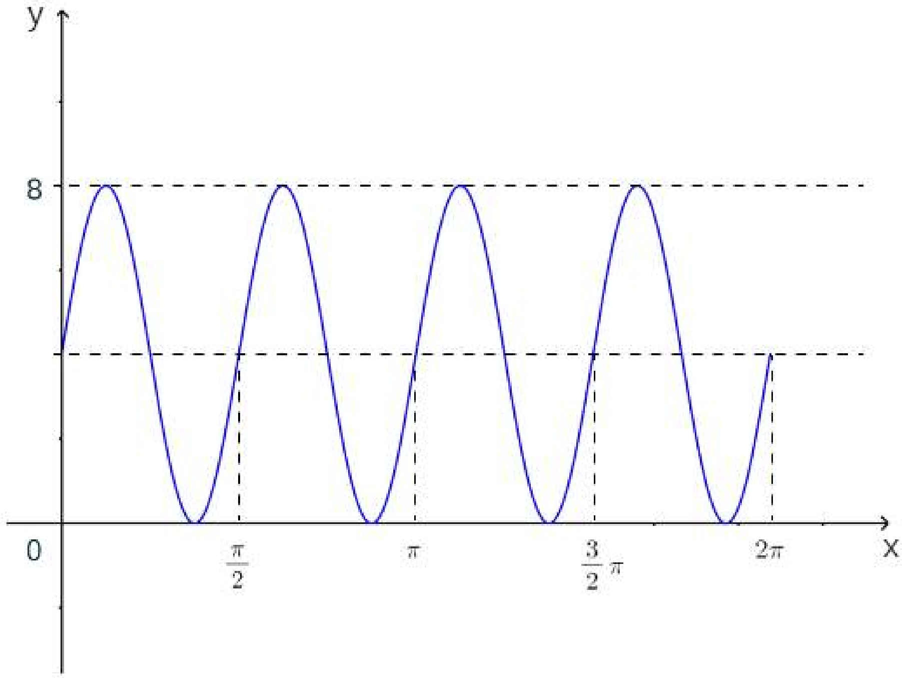
$f'(x)=8x^3-1$ 이고 $f(0)=3$
적분하면
$f(x)=2x^4-x+C$
$f(0)=C=3$
$f(x)=2x^4-x+3$
$f(2)=32-2+3=33$

18. 정답 6

$f(x)=ax^3+bx+a$가 $x=1$에서 극소 즉 $f'(1)=0$
극솟값이 -2이므로 $f(1)=-2$
$f(x)=ax^3+bx+a$
$f'(x)=3ax^2+b$
$f(1)=a+b+a=2a+b=-2$
$f'(1)=3a+b=0$
연립하면 $a=2,\ b=-6$
$f(x)=2x^3-6x+2$
$f'(x)=6x^2-6=6(x^2-1)=0$
$\therefore x=\pm 1$
극댓값 $f(-1)=-2+6+2=6$

19. 정답 8

$f(x)=a\sin bx+8-a$
가)조건 $f(x)\ge 0$와 나) 조건을 동시에 만족하기 위해서는
$f(x)$의 최솟값은 $-a+8-a=8-2a=0 \quad \therefore a=4$
나) 조건 $0\le x<2\pi$에서 $f(x)=0$이 서로 다른 4개의 실근 갖기 위해서는
아래의 그림과같이 주기가 $\frac{\pi}{2}$인 함수이다.



따라서 $\frac{2\pi}{b} = \frac{\pi}{2}$ $\quad \therefore b = 4$

$\therefore a + b = 8$

20. 정답) 39

Sol) $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ 이고 $f(x)$는 최계수가 1인 이차함수 이므로

$g(x)$는 최계수가 $\frac{1}{3}$이고, $g(0) = 0$, $g'(x) = f(x)$인 삼차함수 이다.

다음 조건에서 $x \geq 1$ 범위에서 $g(x) \geq g(4)$ 이므로 $g(x)$는 $x = 4$에서 극소를 가지고,
$|g(x)| \geq |g(3)|$ 이므로 $g(3) = 0$ 이다.

따라서 $g(x) = 0$ 세근을 $0, 3, k$ 라 두면 $g(x) = \frac{1}{3}\{x^3 - (k+3)x^2 + 3kx\}$이고

$g'(x) = f(x) = x^2 - \frac{2}{3}(k+3)x + k$ 이다. $g(x)$가 $x = 4$에서 극소이므로 $f(4) = 0$ 이므로 $k = \frac{24}{5}$이다.

따라서 $\therefore f(9) = 63 - 5k = 39$

21. 정답은 110

ㄱ. $1-\log_2 1 = 2^{1-1}$
$2-\log_2 2 = 2^{2-2}$
ㄱ. 참 A=100

ㄴ. $t \le 0$일 때, $t-\log_2 x$의 점근선이 y축이다.
t가 증가하면 $f(t)$도 증가한다.
$t>0$ 일 때, $t-\log_2 x$는 감소, 2^{x-t}는 증가 이므로 교점인 $f(t)$는 증가한다.
ㄴ. 참 B=10

ㄷ. $y=2^{x-t}$는 $(t,1)$을 지난다.
$t>1$일 때, $t-\log_2 t<1$
$f(t)$는 t보다 작은 부분이 존재한다.
ㄷ. 거짓 C=0

정답은 100+10=110

22. 정답) 380

Sol) $f(x)=x^3-2ax^2$ 이므로 $x=0, \dfrac{4}{3}a$에서 극값을 가진다.

$\left\{\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\}\times\left\{\dfrac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\}<0$ 을 만족시키는 세 실수 x_1, x_2, x_3가 구간 $(k,k+\dfrac{3}{2})$에 존재하는

조건의 해석은 $(k,k+\dfrac{3}{2})$에서 함수 $f(x)$의 증감이 변하는 x가

존재해야 한다.

따라서 $0\in(k,k+\dfrac{3}{2})$ 이거나 $\dfrac{4}{3}a\in(k,k+\dfrac{3}{2})$ 을 만족시키는 모든 정수k 의 곱이 -12라고 볼수 있다.

따라서 $k<0<k+\dfrac{3}{2}$ 이거나 $k<\dfrac{4}{3}a<k+\dfrac{3}{2}$ 을 만족시키는 모든 정수k를 찾아보자.

먼저, $k<0<k+\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow -\dfrac{3}{2}<k<0$ 이므로 $k=-1$은 만족시킨다.

따라서 $k<\dfrac{4}{3}a<k+\dfrac{3}{2}$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{4}{3}a-\dfrac{3}{2}<k<\dfrac{4}{3}a$ 을 만족시키는 모든정수 k의 곱은 12이여야 한다. 즉, k는 $3,4$ 이거나 $-3,-4$ 이여야 한다.

$case1)\, k=3,4$ 인 경우

부등식을 풀어서 연립해주면 $4<\dfrac{4}{3}a<\dfrac{9}{2}$ $\Leftrightarrow$ $3<a<\dfrac{27}{8}$ 이므로 만족하는 정수a 존재하지 않는다.

$case2)\, k=-3,-4$ 인 경우

부등식을 풀어서 연립해주면 $-3<\frac{4}{3}a<-\frac{5}{2} \Leftrightarrow -\frac{9}{4}<a<-\frac{15}{8}$ 이므로 $a=-2$이다.

따라서 $f(x)=x^3+4x^2$ 이고 $f'(x)=3x^2+8x$ 이므로 $f'(10)=300+80=380$ 이다.