

Mathematics X

2.ബാഹ്യബിന്ദുവിൽനിന്നും വൃത്തത്തിലേയ്ക്കുള്ള തൊടുവരകൾ Tangents from external point to the circle

1. O കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിന്റെ പുറത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദുവാണ് P . പുറത്തുള്ള ബിന്ദുവിൽ നിന്നും വൃത്തത്തിലേയ്ക്കുള്ള തൊടുവരകളാണ് PA, PB എന്നിവ. $PA = PB$ എന്ന് തെളിയിക്കുക. $\angle AOB = 120^\circ$ ആയാൽ $\angle APB$ എത്രയായിരിക്കും ?

Let P be a point outside the circle with center O . PA, PB are the tangents to the circle. Show that $PA = PB$. If $\angle AOB = 120^\circ$ find the measure of $\angle APB$.

വിശകലനം

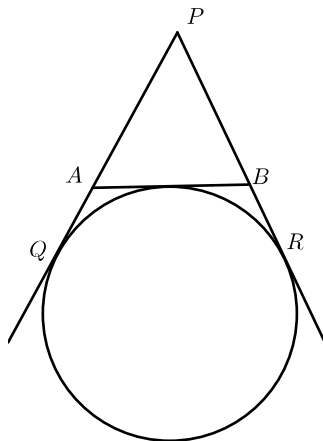
ഇത് ഒരു അടിസ്ഥാന പഠനപ്രവർത്തനമാണ് . കുട്ടികൾ ഈ ചോദ്യവും അതിന്റെ ഉത്തരവും ഇതിനകം പരിചയപ്പെട്ടിരിക്കും . ത്രികോണസർവ്വസമത ഉപയോഗിച്ചും പൈതഗോറസ് തത്വം ഉപയോഗിച്ചും തെളിയിക്കാം . ഇതിനായി ഏകദേശചിത്രം വരയ്ക്കുകയാണ് ആദ്യം ചെയ്യേണ്ടത് .

$\triangle PAO, \triangle PBO$ എന്നിവ മട്ടത്രികോണങ്ങളാണ് . പൈതഗോറസ് തത്വം അനുസരിച്ച് $OP^2 = OA^2 + PA^2$ എന്നും $OP^2 = OB^2 + PB^2$ എന്നും എഴുതാം . അതായത് $OA^2 + PA^2 = OB^2 + PB^2$ ആണ് . ഇതിൽ $OA = OB$ ആയതിനാൽ ഇരു വശത്തുനിന്നും ഒഴിവാക്കുക. അപ്പോൾ $PA = PB$ എന്ന് കിട്ടും

$OAPB$ ഒരു ചക്രിയചതുർഭുജമാണ് . അതിനാൽ എതിർകോണുകളുടെ തുക 180° ആണ് . $120^\circ + \angle APB = 180^\circ$ ഇതിൽനിന്നും $\angle APB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

2. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രത്തിൽ PQ, PR, AB എന്നിവ വൃത്തത്തിലെ തൊടുവരകളാണ് . $PQ + PR = \text{Perimetre of } \triangle PAB$ യുടെ ചുറ്റളവ് എന്ന് തെളിയിക്കുക

In the figure given below PQ, PR, AB are the tangents to the circle. Prove that $PQ + PR = \text{Perimetre of } \triangle PAB$



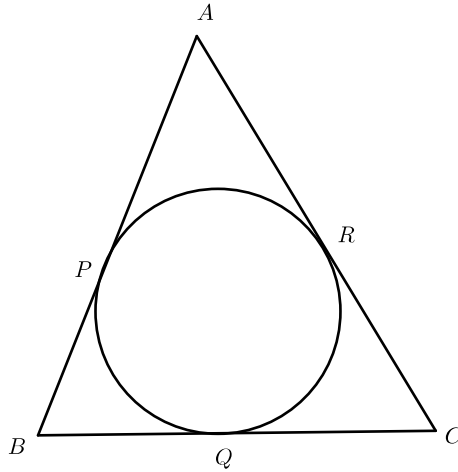
$PQ + PR = PA + AQ + PB + BR$ എന്നെഴുതാം . AB എന്ന തൊടുവര വൃത്തത്തെ തൊടുന്നത് C യിലാണെങ്കിൽ $AQ = AC, BR = BC$ ആയിരിക്കും .

$$PQ + PR = PA + AC + PB + BC$$

അതായത് $PQ + PR = PA + PB + AB = \triangle PAB$ യുടെ ചുറ്റളവ്

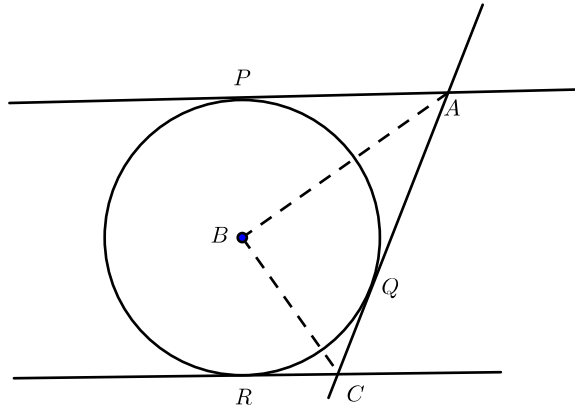
3. $\triangle ABC$ യുടെ വശങ്ങൾ ഒരു വൃത്തത്തെ ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നപോലെ P, Q, R എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ തൊടുന്നു. $AB = AC$ ആയാൽ $BQ = CQ$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

In the figure a circle touches the sides AB, BC, AC at P, Q, R respectively. If $AB = AC$, show that $BQ = CQ$



$AB = AC$ ആണെന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട് . ഇതിനെ $AP + PB = AR + RC$ എന്ന് എഴുതാം. $AP = AR$ ആണല്ലോ, കാരണം ബാഹ്യബിന്ദുവിൽ നിന്നും വൃത്തത്തിലേയ്ക്കുള്ള തൊടുവരകൾ തുല്യം . അതിനാൽ സമവാക്യത്തിന്റെ ഇരു വശത്തുനിന്നും അതിനെ ഒഴിവാക്കാം . അപ്പോൾ $BP = CR$ എന്ന് കിട്ടും. BP എന്നത് BQ നോടും CR എന്നത് CQ നോടും തുല്യമാണ് . അതിനാൽ $BQ = CQ$ ആണ് .

4. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രത്തിൽ കാണുന്ന രണ്ട് തൊടുവരകൾ സമാന്തര വരകളാണ് . മറ്റൊരു തൊടുവര ഇവയെ ചേടിക്കുന്നുമുണ്ട് .



$\angle ABC$ കണ്ടുകൊടുക്കുക

In the figure given above there are three tangents to the circle, two of them are parallel and third is the transversal. Find $\angle ABC$

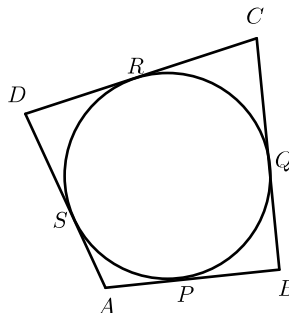
വിശകലനം

BP, BQ, BR എന്നിവ വരകുക. ത്രികോണം APB , ത്രികോണം ABQ എന്നിവ സമദളങ്ങളാണ്. കാരണം $AP = AQ$ ആണ് (തൊടുവരകളുടെ തുല്യത), $BP = BQ$ (തുല്യ ആരങ്ങൾ), AB പൊതുവശം. അതിനാൽ തുല്യമായ വശങ്ങൾക്ക് എതിരെയുള്ള കോണുകൾ തുല്യമാണ്. അതിനാൽ $\angle ABP = \angle ABQ = x$ എന്നെടുക്കാം.

ഇതുപോലെ $\triangle QBC, \triangle RBC$ എന്നിവ സമദളങ്ങളാണ്. $\angle QBC = \angle CBR = y$ എന്നെടുക്കാം.

$$2x + 2y = 180 \Rightarrow x + y = 90 \text{ അതായത് } \angle ABC = 90^\circ$$

5. $ABCD$ ഒരു ചതുർഭുജമാണ്. ചതുർഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങൾ അതിനുള്ളിലെ വൃത്തത്തിന്റെ തൊടുവരകളാണ്. $AB + CD = AD + BC$ എന്ന് തെളിയിക്കുക



In the figure $ABCD$ is a quadrilateral. A circle touches the sides at P, Q, R, S as shown in the figure. Prove that $AB + CD = AD + BC$

വിശകലനം

ഈ ചോദ്യത്തെ മറ്റൊരു തരത്തിൽ കാണാം . അന്തർവൃത്തം വരക്കാവുന്ന ചതുർഭുജങ്ങളുടെ എതിർവശങ്ങളുടെ തുക തുല്യമായിരിക്കും . ചിത്രത്തിൽ നോക്കി $AP = AS, BP = BQ, DR = DS, CR = CQ$ എന്ന് എഴുതാം . ഇതിൽനിന്നും $AP + BP + DR + CR = AS + BQ + DS + CQ$ ആയിരിക്കും . അതായത് $AB + CD = AD + BC$

തുടർപ്രവർത്തനം

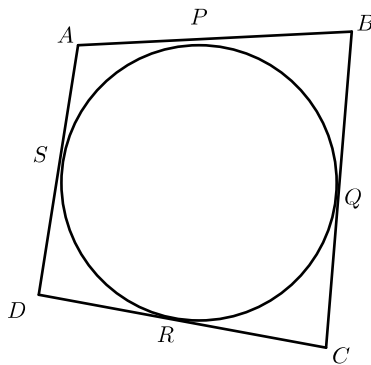
ഈ പ്രവർത്തനത്തിന് ചെറിയൊരു മാറ്റം വരുത്തിനോക്കാം . ഒരു സമാന്തരീകത്തിന്റെ നാലുവശങ്ങളെയും തൊടുന്ന ഒരു വൃത്തം വരക്കാൻ പറ്റുമെങ്കിൽ അത് ഒരു സമഭുജസമാന്തരീകം ആയിരിക്കുമെന്ന് തെളിയിക്കുക

In the question given above , if the quadrilateral is a parallelogram and the circle touches all the sides then it will be a rhombus

വിശകലനം

$AB + CD = AD + BC$ എന്ന് തെളിയിക്കുകയാണ് ആദ്യം ചെയ്യേണ്ടത് . $ABCD$ സമാന്തരീകം ആയതിനാൽ എതിർവശങ്ങൾ തുല്യമായിരിക്കുമല്ലോ . $AB = CD, AD = BC$ എന്ന് എഴുതണം . അപ്പോൾ സമവാക്യം $2AB = 2AD$ എന്ന് കിട്ടും . അതായത് $AB = AD$. അപ്പോൾ $AB = BC = CD = AD$ എന്ന് എഴുതി സമഭുജസമാന്തരീകമാണെന്ന് സ്ഥാപിക്കാം

6. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രത്തിൽ $\angle B = 90^\circ, AD = 23, AB = 29, DS = 5$ ആയാൽ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം കണക്കാക്കുക



In the figure given above $\angle B = 90^\circ, AD = 23, AB = 29, DS = 5$. Find the radius of the incircle .