수학 과목 – 미적분

23. 정답 ⑤

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+9n}-\sqrt{n^2+4n})=\lim_{n\to\infty}(\frac{5n}{\sqrt{n^2+9n}+\sqrt{n^2+4n}})=\lim_{n\to\infty}(\frac{5n}{2n})=\frac{5}{2}$$

24. 정답 ④

$x=\frac{5t}{t^2+1}$, $y=3\ln(t^2+1)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{6t}{t^2+1}}{\frac{5(1-t^2)}{(t^2+1)^2}}=\frac{6t(t^2+1)}{5(1-t^2)}$$

$t=2$ 대입하면 $\frac{dy}{dx}=-4$

25. 정답 ①

$\lim_{x\to 0}\frac{2^{ax+b}-8}{2^{bx}-1}=16$, $\frac{0}{0}$꼴이므로 로피탈의 정리를 이용하면 간단하다.

$b=3$

$\lim_{x\to 0}\frac{2^{ax+3}a\ln 2}{2^{3x}3\ln 2}=\frac{8a}{3}=16$, $a=6$

26. 정답 ②

$x^2-5x+2\ln x=t$ 에서

$2\ln x=-x^2+5x+t=-(x-\frac{5}{2})^2+\frac{25}{4}+t$ 두 그래프가 접할 때 서로다른 두 개의 실근을 가진다.

접점의 x좌표를 α라 두면

양변 미분했을 때 같으므로

$\frac{2}{\alpha}=-2\alpha+5$

$2\alpha^2-5\alpha+2=0$

$\alpha=\frac{1}{2}$, $\alpha=2$

$\alpha=\frac{1}{2}$ 일 때, 대입하면 $-2\ln 2=-4+\frac{25}{4}+t_1$

$\alpha=2$ 일 때, 대입하면 $2\ln 2=-\frac{1}{4}+\frac{25}{4}+t_2$

양변 더하면 $t_1+t_2=-\frac{33}{4}$

27. 정답 ③

$y=\sin x$위의 점 $P(t,\sin t)$에서 접선기울기는 $\cos t=\tan\alpha$

$-1=\tan\beta$

$\alpha-\beta=\theta$

$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{1+\cos t}{1-\cos t}$

$\lim_{t\to\pi-}\frac{\tan\theta}{(\pi-t)^2}=\lim_{t\to\pi-}\frac{1+\cos t}{(\pi-t)^2(1-\cos t)}$ 여기서 $t-\pi=p$라 치환하면

$=\lim_{p\to 0-}\frac{1-\cos p}{p^2(1+\cos p)}$

$=\lim_{p\to 0-}\frac{2\sin^2\frac{p}{2}}{p^2(1+\cos p)}=\frac{1}{4}$

28. 정답 ②

29. 정답 5

$x^2-2xy+2y^2=15$-- (1) 양변 미분하면

$y\ '=\frac{y-x}{2y-x}$ 이고, $(a,a+k),(b,b+k)$에서 접선 기울기가 수직이므로 기울기의곱$=-1$이용하면

$\frac{k}{a+2k}\times\frac{k}{b+2k}=\frac{k^2}{ab+2k(a+b)+4k^2}=-1$

$A(a,a+k),B(b,b+k)$

를 (1)에 대입하여 빼면 $a+b=-2k$, $b=-a-2k$, $ab=-a^2-2ak=2k^2-15$ 임을 이용하면

$k^2=-ab=-2k^2+15$

$k^2=5$

30. 정답 24