수학 과목 - 미분과 적분

23. 정답 : ①

해설 : $\lim_{x\to 0}(\frac{4^x-2^x}{x})=\lim_{x\to 0}(\frac{2^x(2^x-1)}{x})=1\times \ln 2$

24. 정답 : ②

해설 : $\int_0^{\pi} x\cos(\frac{\pi}{2}-x)dx=[-x\cos x]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x dx=[-x\cos x+\sin x]_0^{\pi}=\pi$

25. 정답 : ⑤

해설 : $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2}{2}=6$에서 $\lim_{n\to\infty}a_n=10$이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{na_n+1}{a_n+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+\frac{1}{n}}{\frac{a_n}{n}+2}$$

$$=\frac{10+0}{0+2}=5$$

26. 정답 : ③

해설 : $\int_1^2 \frac{kx}{2x^2+1}dx=\frac{k}{4}\int_1^2\frac{4x}{2x^2+1}dx=\frac{k}{4}[\ln(2x^2+1)]_1^2=\frac{k}{4}\ln 3=2\ln 3$

$k=8$

27. 정답 : ③

해설 :

| $\overline{B_1D_1}=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$ 이므로

$\overline{D_1E_1}=\overline{C_1E_1}=\frac{\sqrt{17}}{2}$, $\overline{A_2E_1}=\overline{B_2E_1}=\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$

$\therefore \triangle A_2D_1E_1=\triangle B_2C_1E_1$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2=\frac{17}{8}$$

$\angle C_1A_1B_1=\alpha$라 하면 $\angle D_1E_1A_1=2\alpha$이고,

$\angle A_2E_1D_1=\angle B_2E_1C_1=\frac{\pi}{4}$ 이므로

$\angle A_2E_1B_2=\frac{\pi}{2}-2\alpha$

$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{17}}$, $\cos\alpha=\frac{4}{\sqrt{17}}$ 이므로

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\sin2\alpha$

$$=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$=\frac{8}{17}$$

$\therefore \overline{A_2B_2}^2$

$$=\frac{17}{2}+\frac{17}{2}-2\times\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{2}}\times\frac{8}{17}$$

$$=9$$

$\therefore \overline{A_2B_2}=3$

그림 R_1의 색칠된 도형의 넓이는 $2\times\frac{17}{8}=\frac{17}{4}$이고, 그림 R_1의 색칠된 도형과 그림 R_2에 추가되는 색칠된 도형의 닮음비는 $\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}}=\frac{3}{4}$이므로 등비급수의 공비는 $\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$이다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{17}{4}}{1-\frac{9}{16}}=\frac{68}{7}$

28. 정답 : ④

해설

| $\overline{PA}$의 중점을 M이라 하면 $\angle AOM=\frac{\theta}{2}$이므로 $\overline{AM}=\sin\frac{\theta}{2}$이다.

: $\therefore \overline{PA}=\overline{PC}=\overline{PD}=2\sin\frac{\theta}{2}$

삼각형 OAP와 삼각형 PAD는 닮음이므로

$\frac{\overline{PA}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{DA}}{\overline{PA}}$, $\overline{DA}=4\sin^2\frac{\theta}{2}$이다.

$\therefore\ g(\theta)=\frac{1}{2}\times\left(4\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin\theta$

$=8\sin^4\frac{\theta}{2}\sin\theta$

$\angle OPD=\angle OPA-\angle DPA$

$=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)-\theta=\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\theta$

이고, $\angle OPC=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$이므로

$\angle DPC=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\theta\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=\pi-2\theta$

$\therefore\ f(\theta)=\frac{1}{2}\times\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin(\pi-2\theta)$

$=2\sin^2\frac{\theta}{2}\sin2\theta$

$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{8\sin^4\frac{\theta}{2}\sin\theta}{2\theta^2\times\sin^2\frac{\theta}{2}\sin2\theta}$

$=\lim_{\theta\to0+}\left(4\times\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2}\times\frac{\sin\theta}{\sin2\theta}\right)$

$=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}$

29. 정답 : 3

해설 :

| 점 $(t,\ 0)$과 점 $(x,\ f(x))$ 사이의 거리가 최소일 때, 두 점 $(t,\ 0)$, $(x,\ f(x))$를 지나는 직선과 점 $(x,\ f(x))$에서의 곡선 $y=f(x)$의 접선은 서로 수직이다. 이때 $x=s$이므로

$\frac{f(s)}{s-t}\times f'(s)=-1$, $t=s+f(s)\times f'(s)$ …㉠

$h(1)=a$로 놓으면 $g(a)=1$이고, $h'(1)=\frac{1}{g'(a)}$

이다.

$t=a$일 때, $s=b$라 하면 $g(a)=f(b)=1$에서

$e^b+b=1$, $b=0$

㉠에서 $a=0+f(0)\times f'(0)=2$이다.

㉠의 양변을 s에 대하여 미분하면

$$\frac{dt}{ds}=1+f'(s)\times f'(s)+f(s)\times f''(s)$$

$$=1+(e^s+1)^2+(e^s+s)e^s$$

이므로 $t=2$, $s=0$일 때 $\frac{dt}{ds}=6$이다.

$g(t)=f(s)$의 양변을 s에 대하여 미분하면

$g'(t)\times\frac{dt}{ds}=f'(s)$이므로

$g'(2)\times 6=f'(0)$, $g'(2)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\therefore\ h'(1)=\frac{1}{g'(2)}=3$

대동학원

30. 정답 : 283

해설 :

ㅣ $x>0$일 때 $g(x)\geq 0$이므로 $x>-3$일 때 $g(x+3)\geq 0$이다.

따라서 조건 (나)에서 $x>-3$일 때 $f'(x)\geq 0$이다.

또, 조건 (가)에서 $f(x)\geq f(-3)$이므로

함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극소이면서 최소이다.

조건 (나)에 $x=0$을 대입하면 $f'(0)=0$이므로

$f'(x)=4x^2(x+3)=4x^3+12x^2$,

$f(x)=x^4+4x^3+C$ (단, C는 적분상수)

$$\therefore \int_4^5 g(x)dx=\int_1^2 g(x+3)dx$$

$$=\int_1^2 \frac{f'(x)}{\{f(x)-f(0)\}^2}dx$$

$f(x)-f(0)=t$로 치환하면

$f(1)-f(0)=5$, $f(2)-f(0)=48$,

$f'(x)dx=dt$이므로

$$\int_1^2 \frac{f'(x)}{\{f(x)-f(0)\}^2}dx=\int_5^{48}\frac{1}{t^2}dt=\left[-\frac{1}{t}\right]_5^{48}$$

$$=-\frac{1}{48}+\frac{1}{5}$$

$$=\frac{48-5}{240}=\frac{43}{240}$$

$\therefore p+q=240+43=283$