수학영역 (가형)

1. 정답 : ⑤

해설 : $\vec{a}=(3,\,-1)$에 대하여 $k\vec{a}=(3k,\,-1k)$

따라서 $5\vec{a}=(15,\,-5)$이므로 $5\vec{a}$의 모든 성분의 합은

$15+(-5)=10$ 이다.

2. 정답 : ③

해설 : $\cos\frac{3\pi}{2}=0$

3. 정답 : ③

해설 : ${}_4P_3=4\times3\times2=24$

4. 정답 : ②

해설 : $\lim_{x\to0}\frac{e^{5x}-1}{3x}$

$=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{e^{5x}-1}{x}\times\frac{5x}{5x}$

$=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{e^{5x}-1}{5x}\times\frac{5x}{x}$

$=\frac{1}{3}\times5=\frac{5}{3}$

5. 정답 : ④

해설 : $f(x)=(2x+7)e^x$ 를 미분하면

$f'(x)=2e^x+(2x+7)e^x$ 이다.

x에 0을 대입하면

$f'(0)=2+7=9$

6. 정답 : ④

해설 : $\left(x+\frac{1}{3x}\right)^6$

위 식을 이항정리를 이용하여 일반항

${}_6\mathrm{C}_r\,(x)^{6-r}\left(\frac{1}{3x}\right)^r$ 이고

이를 정리하면

${}_6\mathrm{C}_r\,(x)^{6-r}\left(\frac{1}{3x}\right)^r$

$={}_6\mathrm{C}_r\,x^{6-r}\left(\frac{1}{3}\right)^r\left(\frac{1}{x}\right)^r$

$={}_6\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{3}\right)^r x^{6-2r}$이고,

$r=2$를 대입하면 x^2의 계수는 ${}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{3}$이다.

7. 정답 : ①

해설 : $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=2$

주어진 식을 덧셈 정리를 이용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=2$$

$1+\tan\alpha=2(1-\tan\alpha)$

$1+\tan\alpha=2-2\tan\alpha$

$3\tan\alpha=1$

$\therefore \tan\alpha=\frac{1}{3}$ 이다

8. 정답 : ②

해설 : 자연수 6을 짝수개로 분할하는 방법의 수는

$\mathrm{P}(6,\ 2)+\mathrm{P}(6,\ 4)+\mathrm{P}(6,\ 6)=3+2+1=6$ 이다.

9. 정답 : ⑤

해설 : $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^c)$ 이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B^c)=\frac{13}{16}-\frac{1}{4}=\frac{9}{16}$

따라서 $\mathrm{P}(B\mid A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{9}{13}$

10. 정답 : ③

해설 : i) 진수조건에 의해 $x-1>0,\ 4x-7>0$ 이므로 $x>\frac{7}{4}$

ii) 부등식 $\log_3(x-1)+\log_3(4x-7)\le 3$ 에서

$\log_3(x-1)(4x-7)\le\log_3 27$

$(x-1)(4x-7)\le 27$

$4x^2-11x-20=(x-4)(4x+5)\le 0$

따라서 $-\frac{5}{4}\le x\le 4$

i) ii) 에 의해 $\frac{7}{4}<x\le 4$ 이므로

따라서, 만족하는 정수 $x=2,\ 3,\ 4$ 이므로 3개이다.

11. 정답 : ①

해설 : $y' = \dfrac{1}{x-3}$이므로 $x=4$일 때, 미분계수는 1이다.

곡선 위의 점 $(4,\ 1)$에서의 접선의 방정식을 구하면

$y = x-3$ 이다.

$\therefore a=1,\ b=-3$

따라서 $a+b=-2$이다.

12. 정답 : ⑤

해설 : 두 직선의 방향벡터를 각각 $\overrightarrow{u_1}=(4,\ 3)$, $\overrightarrow{u_2}=(-1,\ 3)$이라 하면,

$$\cos\theta = \frac{|\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|} = \frac{5}{5\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

13. 정답 : ②

해설 : $f'(x) = -(x-4)(x+2)e^{-x+1}$ 에서

$x=-2$ 에서 극솟값 a 를 갖고 $x=4$ 에서 극댓값 b 를 갖는다.

$a = f(-2) = -4e^3$

$b = f(4) = 8e^{-3}$

따라서 $ab=-32$이다.

14. 정답 : ④

해설 : 시행의 결과 나올 수 있는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 36가지이다.

$f(x) = x^2-7x+10$의 그래프를 그려보면

$f(1)>0,\ f(2)=0,\ f(3)<0,\ f(4)<0,\ f(5)=0,\ f(6)>0$

임을 알 수 있다.

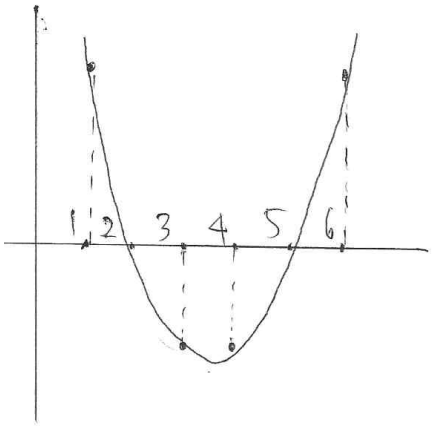
$f(a)f(b)<0$이 성립하는 순서쌍 $(a,\ b)$은

$(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (3,\ 1),\ (3,\ 6),\ (4,\ 1),\ (4,\ 6),\ (6,\ 3),\ (6,\ 4)$

로 8 개다.

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{8}{36} = \dfrac{2}{9}$이다.

대동학원



15. 정답 : ④

해설 : $g(f(x)) = h(x)$라 하면

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{g(f(x)) - \sqrt{e}}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{h(x) - h\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$$= h'\left(\frac{\pi}{4}\right) = g'\left(f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \cdot f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{e} \cdot 1 = \sqrt{e}$$

16. 정답 : ⑤

해설 : $x = f'(x)$, $1 - \ln x = g(x)$라 하면

$$\int_1^e f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_1^e - \int_1^e f(x)g'(x)dx$$

임을 이용하자.

$$\int_1^e x(1-\ln x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2(1-\ln x)\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{1}{2}x^2\right)\left(-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\right) + \int_1^e \frac{1}{2}x dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\right) + \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e$$

$$= \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}(e^2 - 3)$$

17. 정답 : ①

해설 : 포물선의 방정식 $y^2 = 4x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2y\dfrac{dy}{dx}=4$이고

정리하면

$$\frac{dy}{dx}=\boxed{\frac{2}{y}}\ (\text{단, } y\neq 0)$$

이므로, 점 $\mathrm{A}(t^2,\ 2t)$에서의 접선의 방정식을 구하면

$y=\dfrac{1}{t}(x-t^2)+2t$이고 정리하면

$$y=\boxed{\frac{1}{t}}\times x+t \quad \cdots\cdots ㉠$$

이다.

$\mathrm{B}(\boxed{-1},\ 2t)$이므로 직선 OB의 방정식은

$$y=\frac{2t}{\boxed{-1}}x \quad \cdots\cdots ㉡$$

이다.

㉠, ㉡을 연립하여 점 P의 좌표를 구하면

$$\left(\boxed{-1}\times\frac{t^2}{2t^2+1},\ \frac{2t^3}{2t^2+1}\right)$$

이다.

따라서 $f(y)=\dfrac{2}{y}$, $g(t)=\dfrac{1}{t}$, $a=-1$ 이므로

$f(a)\times g(a)=f(-1)\times g(-1)=(-2)\times(-1)=2$이다.

18. 정답 : ③

해설 : 원 C 의 반지름의 길이를 r 이라 할 때,

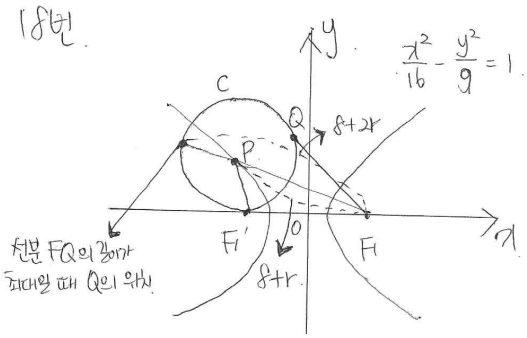
타원의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{FP}}=8+r$이다.

선분 FQ의 길이가 최대일 때의 점 Q의 위치는 그림과 같다.

위 그림에서 선분 FQ 의 길이의 최댓값은 $8+2r$이므로

$8+2r=14$, $\therefore r=3$이다.

따라서 원 C의 넓이는 9π이다.



19. 정답 : ②

해설 : 각 면에 $1,\ 2,\ 3,\ 4$의 숫자가 하나씩 적혀있는 정사면체를

한 번 던졌을 때 2가 나오는 사건을 A라 하면

2가 아닌 숫자가 나오는 사건은 A^c이고 각각의 확률은

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4},\ \mathrm{P}(A^c)=\frac{3}{4}$이다.

이러한 정사면체를 3번 던져서 사건 A가 m번,

사건 A^c가 n번 나올 확률은 ${}_3\mathrm{C}_m\left(\frac{1}{4}\right)^r\left(\frac{3}{4}\right)^n={}_3\mathrm{C}_m\left(\frac{1}{4}\right)^r\left(\frac{3}{4}\right)^{3-m}$이다.

주어진 조건 $i^{|m-n|}=-i$에서

i) $m=3,\ n=0$일 때 $i^{|m-n|}=i^3=-i$

ii) $m=2,\ n=1$일 때 $i^{|m-n|}=i\neq-i$

iii) $m=1,\ n=2$일 때 $i^{|m-n|}=i\neq-i$

iv) $m=3,\ n=0$일 때 $i^{|m-n|}=i^3=-i$

이므로 조건을 만족하는 경우는 i) iv) 가 되어,

구하는 확률은

$${}_3\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^3+{}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^0$$

$$=\frac{27}{64}+\frac{1}{64}=\frac{7}{16}$$

20. 정답 : ②

해설 : $h(a)=\int_0^a f(x)dx+\int_a^8 g(x)dx$

$$=\int_0^a f(x)dx+\int_0^8 g(x)dx-\int_0^a g(x)dx$$

$$=\int_0^a f(x)dx+\int_0^8 g(x)dx-\int_0^a g(x)dx$$

$$=8+\int_0^a (f(x)-g(x))dx$$

이라 하면

$$h'(a)=f(a)-g(a)=\begin{cases}\frac{5}{2}-\frac{10a}{a^2+4}-\frac{1}{2}a & (a\leqq 4)\\ \frac{5}{2}-\frac{10a}{a^2+4}+\frac{1}{2}a-4 & (a>4)\end{cases}$$ 이고

$h(a)$는 연속함수이고 $h(0)=8$이므로

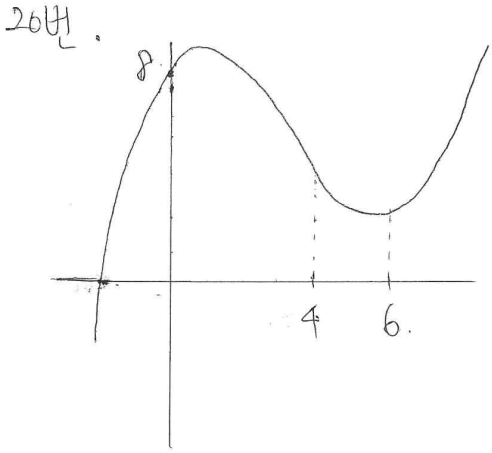
$$h(a)=8+\int_0^a (f(x)-g(x))dx$$

$$=\begin{cases}-\frac{1}{4}a^2+\frac{5}{2}a-5\ln(a^2+4)+8+5\ln 4 & (a\leqq 4)\\ \frac{1}{4}a^2-\frac{3}{2}a-5\ln(a^2+4)+16+5\ln 4 & (a>4)\end{cases}$$

이고, 주어진 그래프는 아래와 같다.

따라서 $h(a)=\int_0^a f(x)dx+\int_a^8 g(x)dx$ 의 최솟값은

$h(6)=16-5\ln 10$ 이다.



21. 정답 : ①

해설 : ㄱ. (가), (나)에 의하여

$f(x)=-f(-x)$ 이고 $f(-x)\neq 1$ 이므로 $-f(-x)\neq -1$ 이다.

$\therefore\ f(x)\neq -1$ ∴참

ㄴ. $f(x)$는 전 구간에서 미분 가능하고 연속인 원점 대칭 함수이므로 반드시 원점을 지나야 한다.

또한 $f(x)\neq 1,\ f(x)\neq -1$ 이기 위해

$f(x)$은 -1과 1 사이여야 한다.

$\therefore\ -1<f(x)<1$

(다)에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= \{1+f(x)\}\{1+f(-x)\} \\ &= \{1+f(x)\}\{1-f(x)\} \\ &= 1-\{f(x)\}^2 \end{aligned}$$

$\therefore\ f'(x)>0$

함수 $f(x)$는 전 구간에서 증가한다. ∴거짓

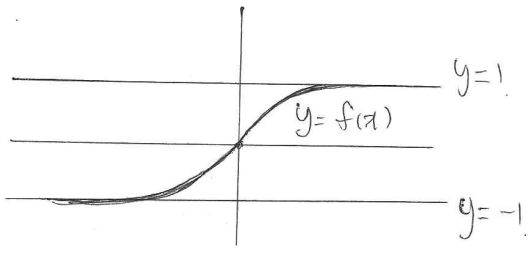
ㄷ. $f'(x)=1-\{f(x)\}^2$

양변을 미분하면 $f''(x)=-2f(x)f'(x)$

$(0,0)$에서만 이계도함수의 부호가 바뀌므로 변곡점은 오직 하나이다. ∴거짓

따라서 옳은 것은 ㄱ 뿐이다.

21번



22. 정답 : 2

해설 : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{2}{\cos x}=2$

23. 정답 : 8

해설 : $\vec{a}\cdot\vec{b}=(4,\ 1)\cdot(-2,\ k)=-8+k=0$

따라서 $k=8$

24. 정답 : 60

해설 : 1학년 6명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는 ${}_6C_4=15$가지

2학년 4명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_4C_3=4$가지

따라서 1학년에서 4명을 뽑고 2학년에서 3명을 뽑는 방법의 수는

${}_6C_4\times{}_4C_3=15\times 4=60$ 가지

25. 정답 : 4

해설 : 방정식 $3^{-x+2}=\frac{1}{9}=3^{-2}$에서

$-x+2=-2$

$\therefore x=4$

26. 정답 : 6

해설 : $4x^2+9y^2-18y-27=0$을 표준형으로 바꾸면

$4x^2+9(y^2-2y+1)-36=0$

$4x^2+9(y-1)^2=36$

$\frac{x^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$

따라서 초점은 $y=1$위에 존재하고

초점의 좌표를 $(c,\ 1)$라 하면

$c^2=9-4=5$이므로

$\therefore c=\sqrt{5}$

$\therefore p=\sqrt{5},\ q=1$

$\therefore p^2+q^2=6$

27. 정답 : 36

해설 : 선택되는 8개 중에
사과의 개수를 x, 감의 개수를 y, 배의 개수를 z, 귤의 개수를 w
라 하면
$x+y+z+w=8$ $(x \le 1,\ y \ge 1,\ z \ge 1,\ w \ge 1)$
ⅰ) $x=0$ 일 때
$y+z+w=8$ $(y \ge 1,\ z \ge 1,\ w \ge 1)$이고
$y=y'+1,\ z=z'+1,\ w=w'+1$이라 하면
$y'+z'+w'=5$ $(y' \ge 0,\ z' \ge 0,\ w' \ge 0)$이므로
구하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_5={}_7\mathrm{C}_5=21$

ⅱ) $x=1$일 때
$y+z+w=7$ $(y \ge 1,\ z \ge 1,\ w \ge 1)$이고
$y=y'+1,\ z=z'+1,\ w=w'+1$이라 하면
$y'+z'+w'=4$ $(y' \ge 0,\ z' \ge 0,\ w' \ge 0)$이므로
구하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4=15$
ⅰ), ⅱ)에서 36가지이다.

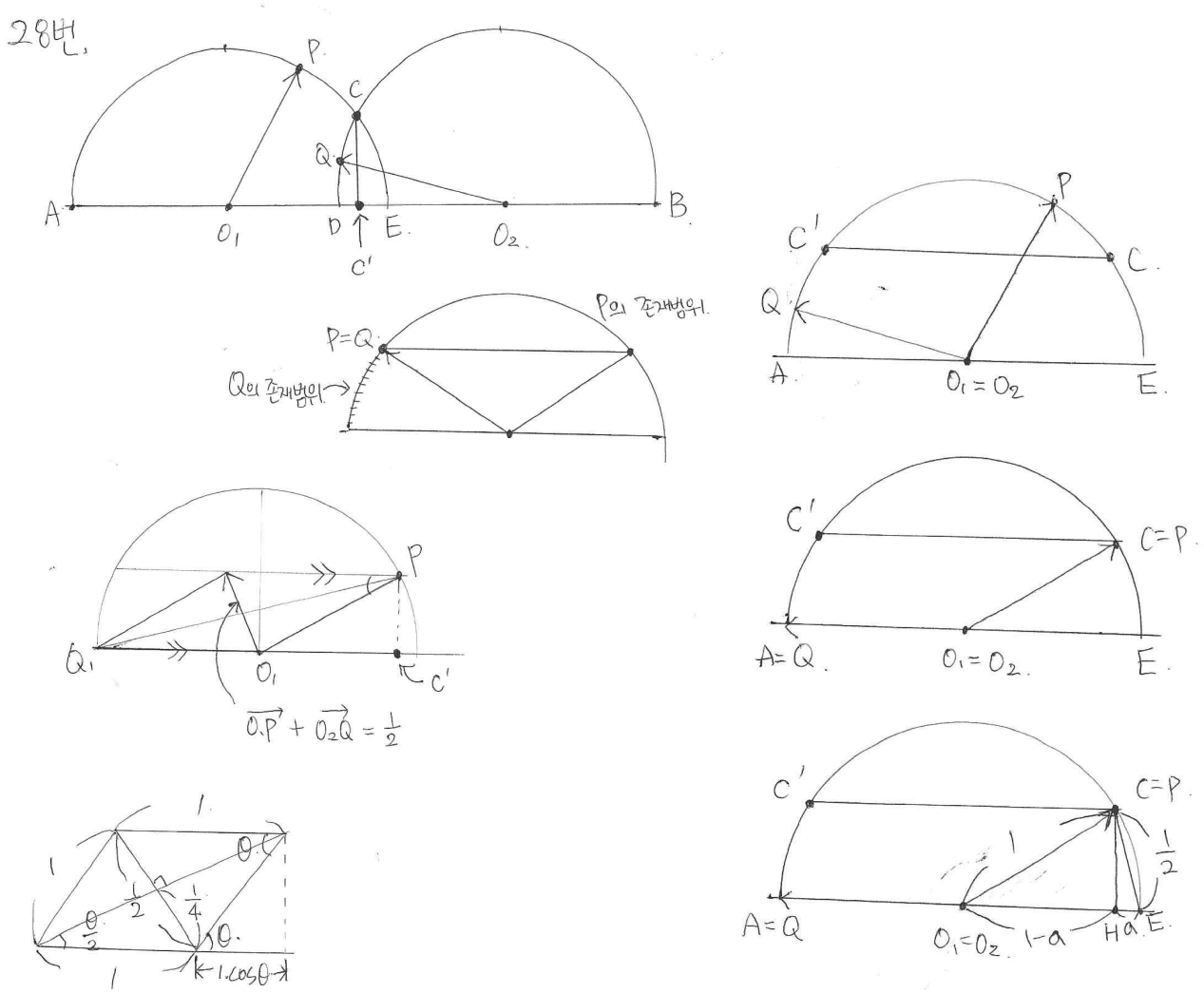
28. 정답 : 19

해설 : 점 P는 호AC 위에 존재하고
점 Q는 호DC 위에 존재하므로
C를 지나고 AE에 평행한 직선이 원과 만나는 점을 C′라 하고,
$\overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}$를 시점을 $\mathrm{O_1}$으로 하면 다음과 같다.
$\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}$는 길이가 1인 벡터이므로 각이 제일 클 때
$\left|\overrightarrow{\mathrm{O_1P}}+\overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}\right|$는 최소가 되고 그 점은 P가 C이며, Q가 A일
경우이므로
$\overrightarrow{\mathrm{O_2Q}}=\overrightarrow{\mathrm{EO_2}}$이므로
$\left|\overrightarrow{\mathrm{EC}}\right|=\dfrac{1}{2}$이다.
C에서 AB에 내린 수선의 발을 H라 하고
$\overline{\mathrm{HE}}=a$라 하면
피타고라스 정리에 의해
$$1-(1-a)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2-a^2$$
$$2a-a^2=\frac{1}{4}-a^2$$
$$\therefore a=\frac{1}{8}$$
$\overline{\mathrm{AH}}=2-a,\ \overline{\mathrm{HB}}=2-a$이므로

$\overline{\mathrm{AB}} = 4 - 2a = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$

$\therefore p + q = 19$

28번.



29. 정답 : 15

해설 : 좌표평면 위를 움직이는 점 P 의 시각 $t\ (t \geq 1)$ 에서의 위치 $(x,\ y)$가

$x = 2\ln t,\ y = f(t)$로 주어졌으므로

시각 t 에서의 속도는 $\vec{v} = \left(\frac{2}{t},\ f'(t)\right)$이고

시각 t 에서의 가속도는 $\vec{a} = \left(-\frac{2}{t^2},\ f''(t)\right)$이다.

$t = 2$일 때 점 P 의 속도가 $\left(1,\ \frac{3}{4}\right)$이므로 $f'(2) = \frac{3}{4}$이다.

$t = 2$일 때 점 P 의 가속도가 $\left(-\frac{1}{2},\ a\right)$이므로 $f''(2) = a$이다.

점 P 가 점 $(0,\ f(1))$로부터 움직인 거리가 s가 될 때,

시각 t는 $t=\dfrac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}$이고, 주어진 식을 정리하면

$2t=s+\sqrt{s^2+4}$

$(2t-s)^2=s^2+4$

$4t^2-4ts+s^2=s^2+4$

$ts=t^2-1$

$\therefore\ s=t-\dfrac{1}{t}\cdots$ ㉠이다.

$s=\displaystyle\int_1^t|\vec{v}|dt=\int_1^t\sqrt{\left(\frac{2}{t}\right)^2+(f'(t))^2}\,dt$

에서 양변을 t로 미분하면

$\dfrac{ds}{dt}=\sqrt{\dfrac{4}{t^2}+(f'(t))^2}$ 이다.

한편 ㉠에서 $\dfrac{ds}{dt}=1+\dfrac{1}{t^2}$ 이므로

$1+\dfrac{1}{t^2}=\sqrt{\dfrac{4}{t^2}+(f'(t))^2}$ 임을 알 수 있고

양변을 제곱하여 정리하면

$1+\dfrac{2}{t^2}+\dfrac{1}{t^4}=\dfrac{4}{t^2}+(f'(t))^2$

$(f'(t))^2=1-\dfrac{2}{t^2}+\dfrac{1}{t^4}=\left(1-\dfrac{1}{t^2}\right)^2$

$f'(t)=1-\dfrac{1}{t^2}\ \left(\because\ f'(2)=\dfrac{3}{4}\right)\cdots$ ㉡

㉡의 식을 t 로 미분하면

$f''(t)=\dfrac{2}{t^3}$이고 $a=f''(2)=\dfrac{1}{4}$이다.

따라서 $60a=60\times\dfrac{1}{4}=15$이다.

30. 정답 : 83

해설 : $\displaystyle\int_x^{x+a}f(t)dt=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 의 양변을 미분하면

$f(x+a)-f(x)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ ...㉠

위의 식에 x 대신에 $-\dfrac{a}{2}$를 대입하면

$f(x)=f(-x)$ 이므로

$\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{a}{2}\right)=0$

$\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin\frac{a}{2}=0$

$\tan\frac{a}{2}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{a}{2}=\frac{5}{6}\pi \quad (\because 0<a<2\pi)$

$\therefore\ a=\frac{5}{3}\pi$

(나)식에 $x=-\frac{a}{2}$을 대입하면

$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}f(t)dt=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{a}{2}\right)$

$2\int_{0}^{\frac{a}{2}}f(t)dt=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{a}{2}\right)$

$2\left[\frac{b}{3}\sin3x+\frac{c}{5}\sin5x\right]_0^{\frac{a}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{a}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{a}{2}$

위의 식에 $a=\frac{5}{3}\pi$를 대입하면

$2\left\{\frac{b}{3}\sin\frac{5}{2}\pi+\frac{c}{5}\sin\frac{25}{6}\pi\right\}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{5}{6}\pi-\frac{1}{2}\sin\frac{5}{6}\pi$

위의 식을 정리하면

$\frac{2}{3}b+\frac{1}{5}c=-1$ ...㉡

한편, ㉠에 $a=\frac{5}{3}\pi$를 대입하면

$f\left(x+\frac{5}{3}\pi\right)-f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

양변을 미분하면

$f'\left(x+\frac{5}{3}\pi\right)-f'(x)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

위의 식에 x 대신에 $-\frac{5}{6}\pi$를 대입하면

$f'(x)=-f'(-x)$ 이므로

$f'\left(\frac{5}{6}\pi\right)-f'\left(-\frac{5}{6}\pi\right)=-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$2f'\left(\frac{5}{6}\pi\right)=1$

$\therefore\ f'\left(\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{1}{2}$

$\left[0,\ \frac{5}{6}\pi\right]$에서

$f'(x)=-3b\sin 3x-5c\sin 5x$

위의 식에 $x=\frac{5}{6}\pi$를 대입하면

$f'\left(\frac{5}{6}\pi\right)=-3b-\frac{5}{2}c=\frac{1}{2}$ ...㉢

㉡과 ㉢을 연립하면

$b=-\frac{9}{4}$, $c=\frac{5}{2}$

$\therefore abc=\frac{5}{3}\pi\cdot\left(-\frac{9}{4}\right)\cdot\frac{5}{2}=-\frac{75}{8}\pi$

이므로

$p=8, q=75$

$\therefore\ p+q=83$

대동
학원