

USO DO MÉTODO DAS IMPEDÂNCIAS PARA MODELAGEM DE CORRENTES *EDDY* EM VOLUMES CONDUTORES

Adriano O. Pires¹, Cleberson C. Cunha¹, Julia G. B. Wolff², Airton Ramos³

Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC

Departamento de Engenharia Elétrica, Campus Universitário – Joinville - SC

oliveira.pires@gmail.com, cleberson_3c@hotmail.com, wolff1980@gmail.com,
dee2ar@joinville.udesc.br

1 Bolsista do Grupo PET - Engenharia Elétrica

2 Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica

3 Professor Orientador

Resumo: *Este artigo descreve a implementação do método das impedâncias para o cálculo de correntes Eddy em volumes condutores finitos. Este método permite descrever o meio sob análise como uma rede tridimensional de impedâncias elétricas e pode ser usado quando as dimensões do meio são pequenas comparadas ao comprimento de onda do campo magnético aplicado. Nesta implementação foi usado o método de Gauss-Seidel para solução do sistema de equações geradas pelo método das impedâncias. Os resultados numéricos são confrontados com um modelo analítico para uma esfera condutora no campo de uma espira circular. Observou-se boa concordância no interior da esfera e um erro significativo na superfície onde percebe-se o erro de discretização.*

Palavras-chave: *Método das Impedâncias, Correntes Eddy, Simulação Numérica*

1. INTRODUÇÃO

A tomografia de indução magnética (MIT) é uma técnica de imagem não-invasiva, baseada na detecção da perturbação em uma fonte de campo magnético, por um objeto condutor, através de sensores eletromagnéticos [1,2]. A técnica é sensível às três propriedades eletromagnéticas: permissividade elétrica, permeabilidade magnética e condutividade elétrica (ϵ , μ , σ) internas no corpo, dispensando o contato

elétrico dos eletrodos [3]. Quando uma corrente alternada é injetada em uma bobina há o aparecimento de um campo magnético primário que, por sua vez, induz o surgimento de correntes *Eddy* na amostra. Essas correntes induzem um campo secundário de baixa intensidade.

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento e a implementação do Método das Impedâncias em um modelo computacional para análise da distribuição de correntes *Eddy* em volumes condutores, excitados por campos magnéticos variáveis no tempo, utilizando a aproximação quase-estática na qual as propriedades condutividade e permissividade elétrica podem ser descritas por elementos discretos de circuito elétrico.

2. O MÉTODO DAS IMPEDÂNCIAS

O Método das Impedâncias utiliza uma rede tridimensional de impedâncias elétricas conectadas entre elementos de volume para modelar as distribuições de condutividade e permissividade do meio e permitir o cálculo das correntes induzidas (correntes *Eddy*) por um campo magnético aplicado (campo primário). O método utiliza a aproximação quase-estática da teoria eletromagnética, válida quando o comprimento de onda do campo é bem maior que as dimensões do meio. A rede de impedâncias é definida nas arestas de uma malha regular de elementos de volume com o formato retangular. Esse método gera um

sistema de equações para as correntes de malha dentro da rede tridimensional de impedâncias e sua solução pode ser obtida através de métodos tradicionais de análise de circuito.

A Figura 1 mostra a representação esquemática da malha de discretização, da conexão entre dois elementos de volume e do circuito equivalente tridimensional com impedâncias.

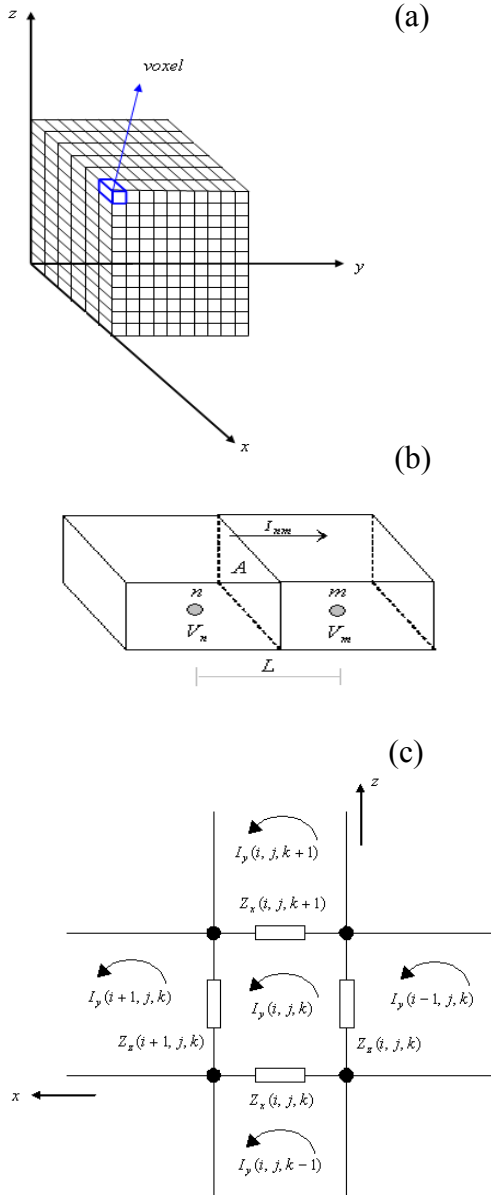


Figura 1. a) Representação da malha de discretização espacial, b) Representação de dois nós adjacentes, n e m, c) Circuito equivalente para o plano y.

O método das impedâncias pode ser dividido em duas etapas:

2.1 Inicialmente deve-se calcular a tensão induzida em cada malha do circuito equivalente do meio sob análise. Para tanto, deve-se calcular o campo magnético primário ou o potencial magnético associado a este campo. Usando-se a aproximação quase-estática da lei de Ampère verifica-se que o campo primário pode ser calculado corretamente através da lei de Biot-Savart. As equações da indução magnética (\vec{B}) e do potencial magnético (\vec{A}) são dadas a seguir:

$$\vec{B} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \int_0^L \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^2} \quad (1)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \int_0^L \frac{d\vec{l}}{|\vec{r}|} \quad (2)$$

Nestas equações μ_o é a permeabilidade do vácuo ($\mu_o = 4\pi \times 10^{-7}$), I é a corrente filamental no percurso descrito pelo caminho "L" de integração, $d\vec{l}$ é o vetor de deslocamento infinitesimal neste percurso e \vec{r} é o vetor de posição do ponto no espaço onde se está calculando o campo em relação à posição de $d\vec{l}$.

A tensão induzida em cada malha do circuito equivalente é calculada por meio da lei de Faraday conforme:

$$V = j\omega \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = j\omega \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (3)$$

As equações anteriores são resolvidas numericamente para cada malha do circuito. A equação seguinte aplica-se para o potencial magnético gerado por um solenóide com Ne espiras de raio R e comprimento total L .

$$\vec{A} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \int_0^{2\pi Ne} \frac{(-R \sin \phi \hat{x} + R \cos \phi \hat{y} + \frac{L}{2\pi Ne} \hat{z}) d\phi}{\sqrt{(x - R \cos \phi)^2 + (y - R \sin \phi)^2 + (z - \frac{L\phi}{2\pi Ne})^2}} \quad (4)$$

O ponto onde se calcula o potencial é descrito pelas coordenadas retangulares x , y e z . A solução numérica é descrita pela seguinte equação:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I \Delta \phi}{4\pi} \sum_{n=0}^N \frac{(-R \operatorname{sen}(n \Delta \phi) \hat{x} + R \cos(n \Delta \phi) \hat{y} + \frac{L}{2\pi N e} \hat{z})}{\sqrt{(x - R \cos(n \Delta \phi))^2 + (y - R \operatorname{sen}(n \Delta \phi))^2 + (z - \frac{L n}{N e})^2}} \quad (5)$$

A tensão de malha pode ser calculada numericamente por meio das seguintes equações:

$$\begin{aligned} V_x &= -j\omega([A_z(i, j+1, k) - A_z(i, j, k)] \Delta z + [A_y(i, j, k) - A_y(i, j, k+1)] \Delta y) \\ V_y &= -j\omega([A_z(i, j, k) - A_z(i, j+1, k)] \Delta z + [A_x(i, j, k+1) - A_x(i, j, k)] \Delta x) \\ V_z &= -j\omega([A_x(i, j, k) - A_x(i, j+1, k)] \Delta x + [A_y(i+1, j, k) - A_y(i, j, k)] \Delta y) \end{aligned} \quad (6)$$

As correntes induzidas em cada malha podem ser calculadas usando-se a primeira Lei de Kirchoff. A figura 1.(c) mostra uma representação bidimensional de uma malha no plano y . A equação da malha para um caso similar, no plano x , pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} &Z_y(i, j, k)[I_x(i, j, k) + I_z(i-1, j, k) - \\ &- I_x(i, j, k-1) - I_z(i, j, k)] + \\ &+ Z_z(i, j+1, k)[I_x(i, j, k) + I_y(i, j+1, k) - \\ &- I_x(i, j+1, k) - I_y(i-1, j+1, k)] + \\ &+ Z_y(i, j, k+1)[I_x(i, j, k) + I_y(i, j, k+1) - \\ &- I_x(i, j, k+1) - I_z(i-1, j, k+1)] + \\ &+ Z_z(i, j, k)[I_x(i, j, k) + I_y(i-1, j, k) - \\ &- I_x(i, j-1, k) - I_y(i, j, k)] = \\ &= V_x(i, j, k) \end{aligned} \quad (7)$$

Para as correntes I_y e I_z obtêm-se expressões semelhantes.

No circuito equivalente as impedâncias de conexão entre nós adjacentes são dadas pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} Z_x &= \frac{\Delta x}{\Delta y \Delta z (\sigma + j\omega\epsilon)} \\ Z_y &= \frac{\Delta y}{\Delta x \Delta z (\sigma + j\omega\epsilon)} \\ Z_z &= \frac{\Delta z}{\Delta y \Delta x (\sigma + j\omega\epsilon)} \end{aligned} \quad (8)$$

A figura 3 mostra um fluxograma do algoritmo de solução pelo método das impedâncias para o cálculo da distribuição de correntes *Eddy* em um volume condutor. O sistema de equações de malha é resolvido iterativamente pelo método Gauss-Seidel.

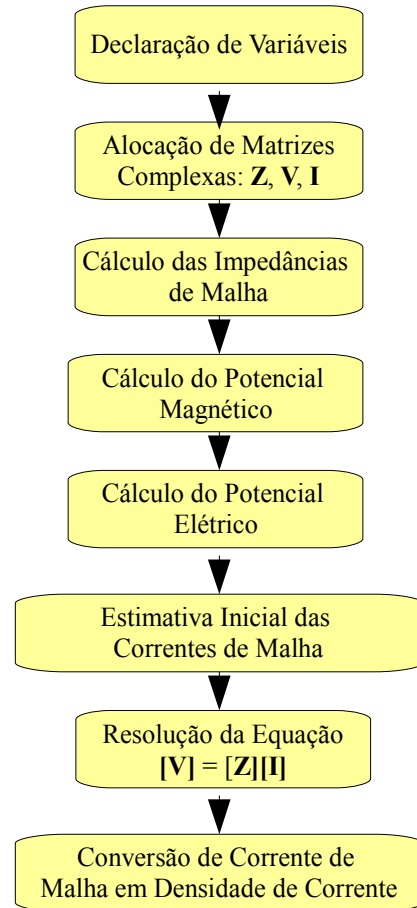


Figura 2. Fluxograma do programa que executa as simulações.

3. RESULTADOS E ANÁLISE

A tabela 1, apresenta os parâmetros de simulação usados neste trabalho. O meio sob análise é uma esfera condutora no campo de uma espira circular concêntrica.

Tabela 1. condições de simulação

Parâmetro de malha	$dx = dy = dz = 5 \times 10^{-3}$
Número de divisões no eixo	$N_x = N_y = N_z = 50$
Condutividade elétrica	1 S/m

Permissividade relativa	1
Frequência	1 MHz
Raio da esfera	$a = 0,1$ m
Raio da espira	$r_e = 0,02$ m
Distância centro a centro	$d = 0,13$ m
Critério de convergência	10^{-13}
Corrente elétrica	1 A
Número de espiras	1

As simulações foram realizadas em um microcomputador com processador Intel pentium 4, com 2GB de memória DRAM e sistema operacional Windows.

Verificou-se que cada simulação com 125 mil elementos de volume foi concluído em aproximadamente 10 minutos.

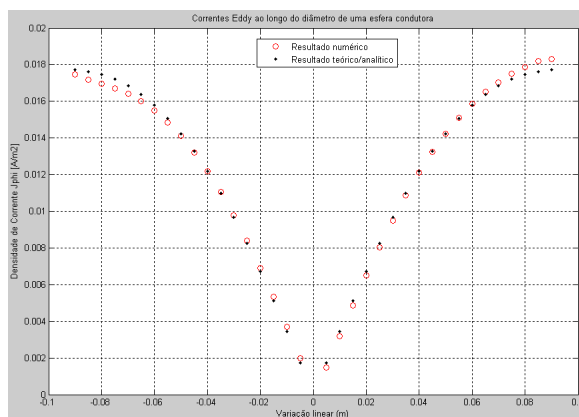


Figura 3. Distribuição de densidade de corrente ao longo do diâmetro perpendicular ao eixo de simetria em uma esfera.

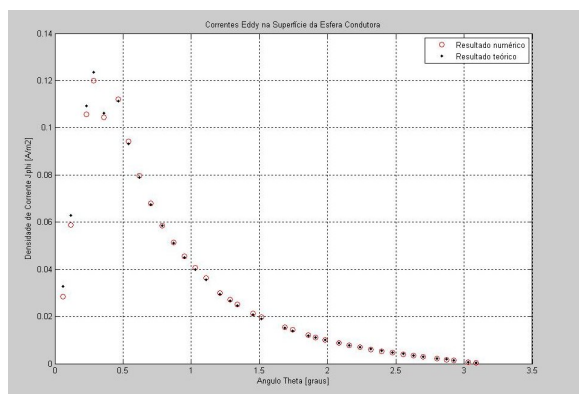


Figura 4. Distribuição angular de densidade de corrente em uma esfera condutora. Ângulo medido em relação ao eixo de simetria.

O gráfico da Figura 3, mostra a distribuição de densidade de corrente azimutal em um eixo transversal da esfera passando pelo seu centro. Os pontos pretos apresentam a solução analítica para este problema de acordo com [4]. Observa-se boa concordância dos resultados no interior da esfera. Na superfície o erro é mais acentuado provavelmente devido à discretização da interface ar-condutor. O gráfico da Figura 4, mostra a distribuição angular de corrente azimutal onde se verifica que o método numérico fornece resultados muito próximos do modelo analítico.

4. CONCLUSÃO

Esta implementação do método das impedâncias apresenta estabilidade, convergência rápida e precisão adequada para a modelagem de correntes *Eddy* em volumes condutores. Pretende-se aplicar esta técnica na modelagem da sensibilidade na reconstrução de imagens em tomografia de indução magnética.

5. REFERÊNCIAS

- [1] Jiao, M. *et al.*, “Design and implementation of a new type excitation source and the optimal excitation coil for MIT”, *The 2nd International Conference on Bioinformatics and Biomedical Engineering*, ICBBE 2008.
- [2] Griffiths, H. “Magnetic induction tomography”, *Meas. Scienc. Technol.*, 12: 1126-1131, 2001.
- [3] Morris, A. *et al.*, “A numerical model for magnetic induction tomographic measurements in biological tissues”, *Physiol. Meas.*, 22: 113-119, 2001.
- [4] Pham, M. H. and Peyton A. J. *et al.*, “A model for the forward Problem in magnetic Induction Tomography using boundary Integral equations”, *IEEE trans on magnetics*, 2262:2267.