La moltiplicazione grafica: dimostrazione algebrica e altre curiosità

Nicholas Fiorentini
http://www.lordgordon.com/

Luglio 2009

Sommario

Questo articolo vuole mostrare una dimostrazione algebrica del funzionamento dell'algoritmo di moltiplicazione grafico, detto anche metodo cinese. Dalla dimostrazione si evince la validità del metodo per moltiplicazioni tra numeri in base diversa da quella decimale.

Keywords: matematica, algebra, grafica, aritmetica, moltiplicazione, basi numeriche.

1 Introduzione

La curiosità su questo metodo di moltiplicazione è nata guardando un video[2] su youtube. In questo video viene spiegato un semplice metodo, chiamato metodo cinese, per eseguire le moltiplicazioni intersecando varie rette. Come già ampiamente notato su vari blog, questo algoritmo è abbastanza macchinoso e lento. La sua effettiva usabilità peggiora drasticamente all'aumentare del numero di cifre degli operandi.

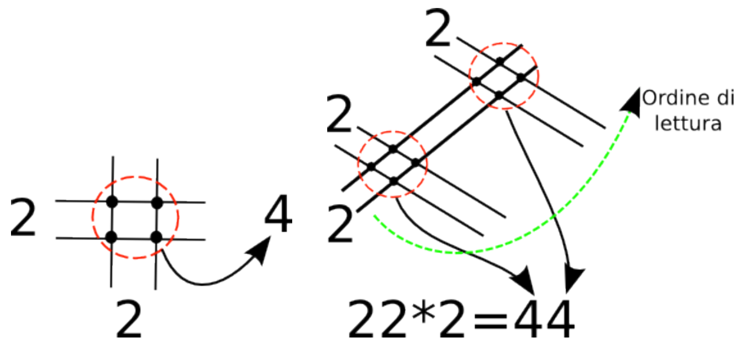
La spiegazione elementare del funzionamento di questo metodo è ben esposta da Davide Troise, alias Boliboop:

"*Innanzitutto il metodo grafico proposto (...) sfrutta due semplici concetti. Il primo è che intersecando due fasci di rette parallele si ottengono un numero di intersezioni pari al prodotto del numero di rette presenti nei due fasci. Si tratta quindi di un concetto di geometria facilmente dimostrabile dal momento che ogni retta del secondo fascio che interseca il primo fascio genera una intersezione per*

[1] http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/it/
[2] http://www.youtube.com/watch?v=0SqRPf300J0

ogni retta che costituisce questo primo fascio; ripetendo il procedimento per tutte le rette del secondo fascio si ottiene appunto il prodotto (come detto giustamente da Antonio, si tratta della definizione stessa di moltiplicazione, applicata però graficamente). Il secondo concetto alla base di questo procedimento è invece la rielaborazione grafica di un comunissimo algoritmo moltiplicativo che viene insegnato alle elementari."[3]

Una chiara spiegazione del procedimento è disponibile nell'articolo di fry sul blog nerdsopolis.



(a) $2 * 2 = 4$ (b) $2 * 22 = 44$

Figura 1: Due semplici esempi del metodo grafico

2 Dimostrazione

L'idea consiste nel dimostrare questo procedimento attraverso una costruzione più formale, mostrando chiaramente l'esatto parallelismo con il meccanismo algebrico della moltiplicazione tra numeri naturali. E' subito evidente che il metodo grafico proposto funziona solo nell'insieme dei naturali. E' intuitivamente possibile estendere la compatibilità anche nell'insieme dei numeri relativi, a patto di gestire correttamente l'informazione sul segno del risultato.

2.1 L'esempio di riferimento

Introduciamo l'esempio a cui ci rifaremo nei successivi passi della dimostrazione. Prendiamo i numeri 342 e 120, il risultato della moltiplicazione è 41040. La scelta di questi due numeri è utile per analizzare contemporaneamente vari casi: la presenza dello zero, due numeri a tre cifre[4], la nascita di vari riporti nel procedimento di calcolo. E' evidente che per motivi di semplicità tutte le cifre sono numeri compresi tra 0 e 4. Più le cifre tendono ad essere numeri vicino al 9 e più rette dovranno essere disegnate, rendendo più difficoltoso mantenere ordinato il calcolo. Graficamente si ottiene il risultato mostrato in figura 2.

[3]http://www.troise.net/boliboop/fare-le-moltiplicazioni-con-le-linee-dimostrazione/

[4]Un buon compromesso tra semplicità e completezza

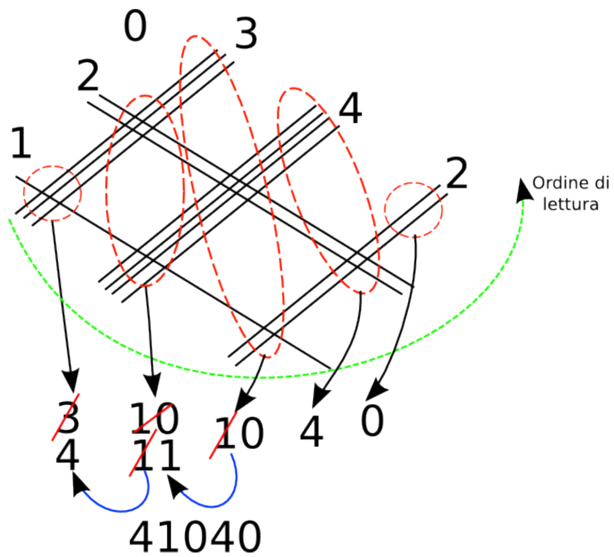


Figura 2: L'esempio completo di riferimento per la dimostrazione

2.2 Il meccanismo algebrico

Consideriamo i due generici operandi della moltiplicazione x e y. Nella base decimale[5] essi possono essere visti come somma delle singole cifre moltiplicate per la corretta potenza del dieci:

$$x = a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$
$$y = b_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \ldots + b_1 \cdot 10^1 + b_0 \cdot 10^0$$

Dove $n, m \in \mathbb{N}$ indicano il numero di cifre rispettivamente di x e y, mentre a_i e b_j sono le cifre. Ad esempio il numero 342 è scomposto in $3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 2 \cdot 1 = 300 + 40 + 2$ ($n = 3$, $a_2 = 3$ $a_1 = 4$ $a_0 = 2$).

La moltiplicazione tra x e y corrisponde a calcolare:

$$\begin{aligned} x \cdot y = & (a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0) \cdot \\ & \cdot (b_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \ldots + b_1 \cdot 10^1 + b_0 \cdot 10^0) = \\ = & \, a_{n-1}b_{m-1} \cdot 10^{(n-1)+(m-1)} + \ldots + a_1b_1 \cdot 10^2 + a_0b_0 \end{aligned}$$

Questo corrisponde generalmente al metodo imparato alle elementari, con la differenza che alle elementari lo si vede in forma “tabellare”. Per meglio riconoscerlo è possibile applicarlo ai due numeri del nostro esempio:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 2) \cdot (1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 0) = \\ &= 3 \cdot 10^4 + (6 + 4) \cdot 10^3 + (8 + 2) \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 = \\ &= 3 \cdot 10^4 + 10^4 + 10^3 + 4 \cdot 10 = 4 \cdot 10^4 + 10^3 + 4 \cdot 10 = \\ &= 41040 \end{aligned}$$

[5]si veda il corollario per l'estensione della dimostrazione alle basi diversi dalla decimale

Ovvero

$$\begin{array}{r} 342\times \\ \underline{120} = \\ 0+ \\ 6840+ \\ \underline{34200} = \\ 41040 \end{array}$$

2.3 Dall'algebra alla forma grafica

Ora mostriamo come dal formalismo precedente si possa ricavare il metodo grafico presentato all'inizio dell'articolo. La correlazione è facilmente osservabile costruendo la seguente tabella, dove le righe corrispondono al numero x e le colonne al numero y[6].

	b_{m-1}	$\cdots$	b_1	b_0
a_{n-1}	$a_{n-1}b_{m-1}$	$\cdots$	$a_{n-1}b_1$	$a_{n-1}b_0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_1	a_1b_{m-1}	$\cdots$	a_1b_1	a_1b_0
a_0	a_0b_{m-1}	$\cdots$	a_0b_1	a_0b_0

Ma cosa significa calcolare, per esempio, $a_{n-1}b_{m-1}$ nella cella alla riga 10^{n-1} e colonna 10^{m-1}? Significa suddividere quella cella in a_{n-1} righe e in b_{m-1} colonne, ovvero calcolarne il prodotto parziale. Ovvero significa che in ogni cella abbiamo i risultati dei prodotti parziali relativi ad una potenza:

10^{n+m-2}	$\cdots$	10^n	10^{n-1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
10^m	$\cdots$	10^2	10
10^{m-1}	$\cdots$	10	1

Ritorniamo al significato della moltiplicazione parziale di una cella. Graficamente questa operazione è facilmente ottenibile tracciando righe ortogonali, ovvero suddividendo la cella in tante sottocelle quante corrispondono al prodotto parziale. Si osserva che il numero a_{n-1} è sempre lo stesso per tutta la riga 10^{n-1} e, analogamente, il numero b_{m-1} è lo stesso per tutta la colonna 10^{m-1}. Quindi si possono tracciare tante rette quante sono le cifre del numero, lunghe tutta la riga della tabella (e analogo per le colonne). Rimuovendo i "contorni" della tabella rimangono solo le rette che rappresentano i vari gruppi di cifre. Lo spaziamento tra i gruppi di rette delle cifre e l'angolazione di 45° consentono di mantenere un certo ordine necesarrio per svolgere correttamente le somme tra le potenze equivalenti.

Riprendendo il nostro esempio otteniamo:

[6] Per la proprietà commutativa della moltiplicazione le righe e le colonne si possono scambiare!

3	4	2
6	8	4
0	0	0

Ovvero, ancora una volta:

$$3 \cdot 10^4 = 30000$$
$$(6+4) \cdot 10^3 = 10000$$
$$(0+8+2) \cdot 10^2 = 1000$$
$$(0+4) \cdot 10 = 40$$
$$0 \cdot 1 = 0$$
$$30000 + 10000 + 1000 + 40 = 41040$$

Con questo ritengo di aver concluso la dimostrazione dell'equivalenza tra il metodo grafico, il metodo elementare e il significato algebrico della moltiplicazione tra numeri interi.

3 Corollario: base non decimale

Direttamente dalla relazione algebrica si può osservare che il metodo grafico, com'è lecito aspettarsi, funziona perfettamente anche per basi diverse da quella decimale. In generale un numero espresso nella base k ha le proprie cifre moltiplicati per le potenze di k:

$$(x)_k = a_{n-1} \cdot k^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot k^1 + a_0 \cdot k^0$$

Il metodo grafico si comporta esattamente come per la base decimale, con la sola attenzione che i riporti devono essere fatti considerando che un numero non può superare la $k-1$ cifra.

Un rapido esempio può togliere ogni dubbio. Prendiamo i numeri 22 e 12 espressi in base 3. Per prima cosa osserviamo che:

$$(22)_3 = 2 \cdot 3 + 2 = (8)_{10}$$
$$(12)_3 = 1 \cdot 3 + 2 = (5)_{10}$$

$$\begin{aligned}(22 \cdot 12)_3 &= (2 \cdot 3 + 2) \cdot (1 \cdot 3 + 2) = \\ &= 2 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 + 4 = \\ &= 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 3 + 1 = \\ &= (3+1) \cdot 3^2 + 3 + 1 = \\ &= 3^3 + 3^2 + 3 + 1 = (1111)_3 = (40)_{10}\end{aligned}$$

Graficamente corrisponde a:

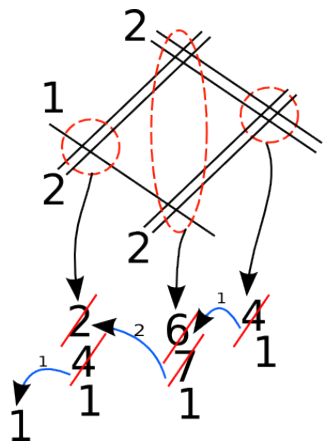


Figura 3: L'operazione svolta graficamente

4 Il metodo a gelosia

Esiste anche un metodo grafico di origine araba, detto a gelosia. Il pregio di questo metodo è la maggiore velocità e il maggior ordine con cui si raggiunge il risultato. Rimando alla pagina http://ladyguendalin.altervista.org/?q=node/16 per una semplice e precisa dettagliata spiegazione del meccanismo.

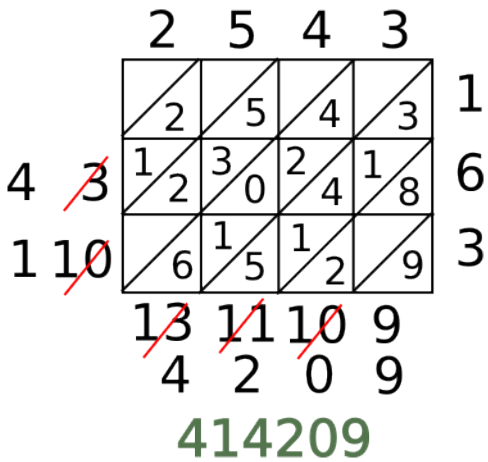


Figura 4: Esempio d'uso del metodo a gelosia: $2543 \cdot 163 = 414209$

Dimostrazione Il meccanismo di funzionamento è praticamente lo stesso visto nella dimostrazione algebrica: arrivati alla tabella descritta in 2.3 si procede in modo leggermente diverso. Anzichè cercare di dividere graficamente la tabella in modo puramente grafico la si "scompone" in modo da riorganizzare le sue righe e le colonne per poter sommare tra loro le cifre corrispondenti alla stessa potenza del 10. Anche in questo caso si osserva che il metodo vale per qualsiasi base numerica.