Внутренние изометрии
в евклидово пространство.

Антон Петрунин

Аннотация

Я рассматриваю пространства, допускающие «внутренние изометрии» в d-мерное евклидово пространство. Основной результат состоит в том, что класс таких пространств совпадает с классом обратных пределов d-мерных полиэдров.

1 Введение

Внутренние изометрии определены в разделе 2, это вариация понятия *изометрии на путях*, т.е. отображений, сохраняющих длины кривых. Любая внутренняя изометрия является изометрией на путях, обратное, вообще говоря, не верно. Следующее утверждение является одной из причин, почему я предпочитаю понятие внутренней изометрии.

1.1. Стартовое предложение. *Предположим, что компактное метрическое пространство $\mathcal{X}$ допускает внутреннюю изометрию в d-мерное евклидово пространство (далее обозначаемое $\mathbb{E}^d$). Тогда $\dim\mathcal{X}\leqslant d$, где $\dim$ обозначает размерность Лебега.*

Это предложение доказывается в разделе 3. Пример 4.2 показывает, что для изометрий на путях это утверждение не верно. Хаусдорфова размерность $\mathcal{X}$ также не может быть ограничена. Например, $\mathbb{R}$-дерево допускает внутренюю изометрию в $\mathbb{R}$, при этом оно содержит компактные подмножества произвольно большой хаусдорфовой размерности.

Вот несколько известных результатов о пространствах, допускающих внутренние изометрии в $\mathbb{E}^d$.

1.2. Теорема. *Пусть $\mathcal{R}$ есть d-мерное риманово пространство и $f\colon\mathcal{R}\to\mathbb{E}^d$ — короткое отображение*[1]*. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует внутренняя изометрия $\imath\colon\mathcal{R}\to\mathbb{E}^d$ такая,что*

$$|f(x)\,\imath(x)|_{\mathbb{E}^d}<\varepsilon$$

для любого $x\in\mathcal{R}$.

В частности, любое d-мерное риманово пространство допускает внутреннюю изометрию в $\mathbb{E}^d$.

Для изометрий на путях это теорема была доказана Громовым [6, 2.4.11], но доказательство работает для внутренних изометрий без каких-либо изменений. Из этой теоремы следует, что произвольный предел возрастающей

[1] то есть 1-липшицево

последовательности римановых метрик на фиксированном многообразии допускает внутреннюю изометрию в $\mathbb{E}^d$, доказывается аналогично условию достаточности в основной теореме (1.5). В частности, любая субриманова метрика на d-мерном многообразии допускает внутреннюю изометрию в $\mathbb{E}^d$.

1.3. Теорема. *Пусть $\mathcal{P}$ есть полиэдр и $f\colon \mathcal{P}\to\mathbb{E}^d$ — короткое отображение. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует кусочно-линейная внутренняя изометрия $\imath\colon \mathcal{P}\to\mathbb{E}^d$ такая, что*

$$|f(x)\,\imath(x)|_{\mathbb{E}^d}<\varepsilon$$

для любой точки $x\in\mathcal{P}$.

1.4. Следствие. *Любой d-мерный полиэдр допускает кусочно-линейную внутреннюю изометрию в $\mathbb{E}^d$.*

Следствие 1.4 было доказано Залгаллером [7] для размерностей $\leqslant 4$, но небольшая модификация доказательста работает во всех размерностях, это было показано Крат [9]. Двумерный случай вышеприведён용 теоремы был также доказан Крат. Позже Акопян [1] обобщил это доказательство на все размерности, используя кусочно-линейный аналог теоремы Нэша — Кейпера. Эта теорема была доказана Брэмом [5], но его работа на многие годы была оставлена без видимого внимания и передоказана независимо Акопяном и Тарасовым [2].

Необходимое и достаточное условие. Компактное метрическое пространство $\mathcal{X}$ называется *проевклидовым пространством ранга* $\leqslant d$, если оно может быть представлено как *обратный предел*[2] $\mathcal{X}=\varprojlim\mathcal{P}_n$ последовательности d-мерных полиэдров $\mathcal{P}_n$.

1.5. Основная теорема. *Компактное метрическое пространство $\mathcal{X}$ допускает внутреннюю изометрию в $\mathbb{E}^d$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{X}$ является проевклидовым пространством ранга $\leqslant d$.*

Формулировка этой теоремы более интересная нежели её доказательство — по-моему, это первый случай, когда обратные пределы решают естественную геометрическую задачу.

Из основной теоремы следует, что утверждение теоремы 1.2 (для компактных пространств) эквивалентно тому, что любое d-мерное риманово пространство является проевклидовым пространством ранга d. Последнее утверждение следует напрямую из упражнения ниже. В частности, основная теорема даёт альтернативное доказательство теоремы 1.2 для компактных пространств.

1.6. Упражннение. *Докажите, что любое компактное риманово пространство допускает липшицеву аппроксимацию полиэдрами.*

Не пример. Напомним, что пространство Минковского - это конечномерное векторное пространство с метрикой, индуцированной некоторой нормой.

[2]определение обратного предела дано в разделе 2

1.7. Предложение. *Пусть Ω есть открытое подмножество d-мерного пространства Минковского $\mathbb{M}^d$. Предположим, что Ω допускает внутреннюю*[3] *изометрию в $\mathbb{E}^m$, тогда $d \leqslant m$ и $\mathbb{M}^d$ изометрично $\mathbb{E}^d$.*

В частности, условие в 1.1 на размерность Лебега не достаточно.

Благодарности. Автор выражет признательность А. Акопяну, Д. Бураго, С. Иванову и анонимному референту за полезные письма и беседы.

2 Предварительные замечания

Соглашения. Расстояние между точками x и x' метрического пространства $\mathcal{X}$ будет обозначаться $|xx'|$ или $|xx'|_{\mathcal{X}}$.

Отображение $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ между метрическими пространствами $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ называется *коротким*, если

$$|f(x)f(x')|_{\mathcal{Y}} \leqslant |xx'|_{\mathcal{X}}$$

для любых $x, x' \in \mathcal{X}$.

Пространство $\mathcal{P}$ с внутренней метрикой называется *d-мерным полиэдром*, если существует конечная триангуляция $\mathcal{P}$, каждый симплекс в которой изометричен симплексу в $\mathbb{E}^d$.

Обратный предел. Рассмотрим обратную систему компактных метрических пространств $(\mathcal{X}_n)_{n=0}^{\infty}$ и коротких отображений $\varphi_{m,n} : \mathcal{X}_m \to \mathcal{X}_n$ при $m \geqslant n$; то есть:

1. $\varphi_{m,n} \circ \varphi_{k,m} = \varphi_{k,n}$ для любой тройки $k \geqslant m \geqslant n$ и
2. для любого n отображение $\varphi_{n,n}\colon \mathcal{X}_n \to \mathcal{X}_n$ тождественно.

Компактное метрическое пространство $\mathcal{X}$ является *обратным пределом системы* $(\varphi_{m,n}, \mathcal{X}_n)$ (для краткости $\mathcal{X} = \varprojlim \mathcal{X}_n$), если его подлежащее множество состоит из всех последовательностей $x_n \in \mathcal{X}_n$ таких, что $\varphi_{m,n}(x_m) = x_n$ для всех $m \geqslant n$, и для двух таких последовательностей (x_n) и (x'_n) расстояние определяется как

$$|(x_n)\,(x'_n)|_{\mathcal{X}} = \lim_{n\to\infty} |x_n\, x'_n|_{\mathcal{X}_n}.$$

Пусть $\mathcal{X} = \varprojlim \mathcal{X}_n$, тогда отображения $\psi_n\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}_n$, определяемые как $\psi_n\colon (x_i)_{i=0}^{\infty} \mapsto x_n$ называются *проекциями*. Таким образом, $\psi_n = \varphi_{m,n} \circ \psi_m$ для всех $m \geqslant n$.

Комментарии. Вышеприведённое определение эквивалентно обычному обратному пределу в категории, в которой объекты — компактные метрические пространства, а морфизмы — короткие отображения.

Заметьте, что обратный предел не всегда определён, и если определён, то результат компактен по определению. (В принципе, категорию компактных метрических пространств можно расширить так, чтобы предел любой обратной системы был определён.)

Нетрудно видеть, что обратный предел пространств с внутренней метрикой также имеет внутреннюю метрику.

[3] то же верно и для изометрий на путях

Вообще говоря, обратный предел системы пространств может отличаться от предела по Громову — Хаусдорфу. Например, рассмотрим обратную систему $\mathcal{X}_n = [0,1]$, с отображениями $\varphi_{m,n}(x) \equiv 0$. Обратный предел этой системы изометричен одноточечному пространству, тогда как предел по Громову — Хаусдорфу изометричен отрезку $[0,1]$. Тем не менее нетрудно видеть, что если для любого $\varepsilon > 0$ образы $\varphi_{m,n}$ образуют ε-сеть в X_n для всех достаточно больших m и n , то $\mathcal{X} = \varprojlim \mathcal{X}_n$ изометричен пределу по Громову — Хаусдорфу.

Внутренние изометрии и поднятия метрик. Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ суть метрические пространства, и $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ есть непрерывное отображение. Для точек $x, x' \in \mathcal{X}$ последовательность точек $x = x_0, x_1, \dots, x_n = x'$ в $\mathcal{X}$ называется ε-цепью из x в x', если $|x_{i-1}x_i| \leqslant \varepsilon$ для всех $i > 0$. Определим

$$\mathrm{pull}_{f,\varepsilon}(x,x') = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n} |f(x_{i-1})f(x_i)|_{\mathcal{Y}}\right\}$$

где инфимум взят по всем ε-цепям $(x_i)_{i=0}^n$ из x в x'.

Заметим, что $\mathrm{pull}_{f,\varepsilon}$ есть псевдометрика[4] на $\mathcal{X}$. Далее, $\mathrm{pull}_{f,\varepsilon}(x,x')$ не возрастает по ε. Значит, существует (возможно бесконечный) предел

$$\mathrm{pull}_f(x,x') = \lim_{\varepsilon\to 0+} \mathrm{pull}_{f,\varepsilon}(x,x').$$

Псевдометрика $\mathrm{pull}_f\colon \mathcal{X}\times\mathcal{X} \to [0,\infty]$ будет называться *поднятием* метрики по f.

Отображение $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ называется *внутренней изометрией*, если

$$|xx'|_{\mathcal{X}} = \mathrm{pull}_f(x,x')$$

для любых $x, x' \in \mathcal{X}$.

Любая внутренняя изометрия является коротким отображением. Более того, легко видеть, что внутреннии изометрии сохраняют длины кривых. Обратное не верно, см. раздел 4.

2.1. Предложение. *Пусть $\mathcal{X}$ — компактное (или даже ограниченно компактное[5]) метрическое пространство. Тогда существование внутренней изометрии $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ влечёт то, что метрика на $\mathcal{X}$ является внутренней.*

Доказательство этого предложения предоставляется читателю. Заметим, что в общем случае это не верно. Рассмотрим две точки, соединённые счётным числом копий единичных отрезков $\mathbb{I}_n$ и одним отрезком длины $\frac{1}{2}$ с естественной внутренней метрикой. Выбросим из этого пространства отрезок длины $\frac{1}{2}$, метрика на полученном пространстве $\mathcal{X}$ не является внутренней. Далее построим отображение $f\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ так, что сужение $f_n = f|_{\mathbb{I}_n}$ является внутренней изометрией, $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = \frac{1}{2}$ и $f_n(x)$ равномерно сходится к $\frac{x}{2}$. Нетрудно видеть, что $f\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ есть внутренняя изометрия.

[4]то есть $\mathrm{pull}_{f,\varepsilon}$ удовлетворяет неравенству треугольника, она симметрична, неотрицательна и $\mathrm{pull}_{f,\varepsilon}(x,x) = 0$, но может случиться, что $\mathrm{pull}_{f,\varepsilon}(x,x') = 0$ при $x \neq x'$.

[5]То есть все замкнутые ограниченные множества в $\mathcal{X}$ компактны.

2.2. Предложение. *Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — метрические пространства, $\mathcal{X}$ компактно и непрерывное отображение $f\colon \mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ таково, что*

$$\sup_{x,x'\in\mathcal{X}} \operatorname{pull}_f(x,x') < \infty.$$

Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(f,\varepsilon)>0$ такое, что

$$|f(x)\,h(x)|_{\mathcal{Y}} < \delta \quad \textit{для любой точки} \quad x\in\mathcal{X}$$

влечёт

$$\operatorname{pull}_f(x,x') < \operatorname{pull}_h(x,x') + \varepsilon \quad \textit{для любых} \quad x,x'\in\mathcal{X}.$$

Предложение следует напрямую из леммы 2.3.

Для компактного метрического пространства $\mathcal{X}$ и $\varepsilon>0$ обозначим через $\operatorname{pack}_\varepsilon\mathcal{X}$ максимальное число точек в $\mathcal{X}$ на расстоянии $>\varepsilon$ друг от друга. Очевидно, что $\operatorname{pack}_\varepsilon\mathcal{X}$ конечно.

2.3. Лемма. *Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — метрические пространства, $\mathcal{X}$ компактно и $f,h\colon\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ — два непрерывных отображения.*

Предположим, что $|f(x)h(x)|<\delta$ для любого $x\in\mathcal{X}$. Тогда

$$\operatorname{pull}_{f,\varepsilon}(x,x') \leqslant \operatorname{pull}_{h,\varepsilon}(x,x') + 4\cdot\delta\cdot\operatorname{pack}_\varepsilon\mathcal{X}.$$

для любых $x,x'\in\mathcal{X}$.

Доказательство. Предположим, $\operatorname{pull}_{h,\varepsilon}(x,x')<\ell$, то есть существует ε-цепь $\{x_i\}_{i=0}^n$ из x в x' такая, что

$$\sum_{i=1}^n |h(x_{i-1})\,h(x_i)|_{\mathcal{Y}} < \ell. \qquad (*)$$

Поскольку $|h(x_i)f(x_i)|<\delta$,

$$\operatorname{pull}_{f,\varepsilon}(x,x') \leqslant \sum_{i=1}^n |f(x_{i-1})\,f(x_i)|_{\mathcal{Y}} < \sum_{i=1}^n |h(x_{i-1})\,h(x_i)|_{\mathcal{Y}} + 2\cdot n\cdot\delta$$

Предположим, n есть минимальное число, для которого существует ε-цепь, удовлетворяющая $(*)$. Достаточно показать, что

$$n < 2\cdot\operatorname{pack}_\varepsilon\mathcal{X}.$$

Если $n\geqslant 2\cdot\operatorname{pack}_\varepsilon\mathcal{X}$, то найдутся i и j такие, что $j-i>1$ и $|x_ix_j|\leqslant\varepsilon$. Выбросим из цепи все элементы x_k с $i<k<j$, то есть рассмотрим новую ε-цепь

$$x=x_0,\dots,x_{i-1},x_i,x_j,x_{j+1},\dots,x_n=x'$$

По неравенству треугольника в $\mathcal{Y}$ новая цепь удовлетворяет $(*)$. Значит, n не минимально — противоречие. □

2.4. Предложение. *Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — метрические пространства, $\mathcal{X}$ компактно и $\imath\colon\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ — внутренняя изометрия.*

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\imath, \varepsilon) > 0$ такое, что для любого связного множества $W \subset \mathcal{X}$

$$\operatorname{diam} \imath(W) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{diam} W < \varepsilon.$$

Доказательство. Предположим противное, то есть существует последовательность связных пространств $W_n \subset \mathcal{X}$ такая, что $\operatorname{diam} \imath(W_n) \to 0$ и $\operatorname{diam} W_n > \varepsilon$. Значит, существуют две последовательности точек $x_n, x'_n \in W_n$ такие, что $|x_n x'_n| \geqslant \varepsilon$. Поскольку $\mathcal{X}$ компактно, можно перейти к подпоследовательности n так, что $x_n \to x$, $x'_n \to x'$ и $W_n \to W$ в смысле Хаусдорфа. Заметим, что связность W_n влечёт связность W. Таким образом, мы получаем замкнутое связное множество $W \subset \mathcal{X}$ с двумя различными точками x и x' такое, что $\imath$ постоянно на W.

Так, для любого $\varepsilon > 0$ существует ε-цепь $(x_i)_{i=0}^n$ из x в x' такая, что $\imath(x_0) = \imath(x_1) = \cdots = \imath(x_n)$. Отсюда $\operatorname{pull}_{\imath,\varepsilon}(x, x') = 0$ для любого $\varepsilon > 0$. То есть, $\operatorname{pull}_\imath(x, x') = 0$ — противоречие. □

3 Доказательства

Доказательство стартового предложения (1.1). Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta = \delta(\imath, \varepsilon)$ как в предложении 2.4. Поскольку $\dim \mathbb{E}^d = d$, существует конечное открытое покрытие $\{U_i\}$ образа $\imath(\mathcal{X})$ с кратностью $\leqslant d + 1$ и такое, что $\operatorname{diam} U_i < \delta$ для всех i.

Рассмотрим покрытие $\{V_\alpha\}$ пространства $\mathcal{X}$ всеми связными компонентами всех множеств $\imath^{-1}(U_i)$. Согласно предложению 2.1 пространство $\mathcal{X}$ имеет внутреннюю метрику. В частности, все множества V_α открыты. Заметим, что кратность $\{V_\alpha\}$ не превосходит кратности $\{U_i\}$ и $\operatorname{diam} V_\alpha < \varepsilon$ (последнее следует из предложения 2.4). □

Доказательство достаточности условия в 1.5. Пусть $\mathcal{X}$ есть проевклидово пространство ранга $\leqslant d$. Предположим, $(\mathcal{P}_n)_{n=0}^\infty$ есть последовательность d-мерных полиэдров и $\varphi_{m,n}\colon \mathcal{P}_m \to \mathcal{P}_n$ — обратная система коротких отображений такая, что $\mathcal{X} = \varprojlim \mathcal{P}_n$. Обозначим через $\psi_n\colon \mathcal{X} \to \mathcal{P}_n$ соответствующие проекции.

Согласно теореме 1.3 для любого $\varepsilon_{n+1} > 0$ и кусочно-линейной внутренней изометрии $\imath_n\colon \mathcal{P}_n \to \mathbb{E}^d$ существует кусочно-линейная внутренняя изометрия $\imath_{n+1}\colon \mathcal{P}_{n+1} \to \mathbb{E}^d$ такая, что неравенство

$$|\imath_{n+1}(x)\ \imath_n{\circ}\varphi_{n+1,n}(x)| < \varepsilon_{n+1}$$

выполняется для любой точки $x \in \mathcal{P}_n$. Остаётся показать, что последовательность ε_n может быть выбрана так, что $\imath_n{\circ}\psi_n$ сходится к внутренней изометрии $\imath\colon \mathcal{X} \to \mathbb{E}^d$.

Выберем $\varepsilon_{n+1} > 0$ так, что

$$\varepsilon_{n+1} < \tfrac{1}{2} \min\bigl\{\varepsilon_n, \delta(\imath_n, \tfrac{1}{n})\bigr\},$$

где $\delta(\imath_n, \frac{1}{n})$ как в предложении 2.2. Ясно, что $\sum_i \varepsilon_i < \infty$. Отсюда существует предел

$$\imath = \lim_{n\to\infty} \imath_n \circ \psi_n, \quad \imath\colon \mathcal{X} \to \mathbb{E}^d.$$

Очевидно, что $\imath$ — короткое. Далее,

$$|\imath(x)\ \imath_n\circ\psi_n(x)| < \sum_{i=n+1}^{\infty} \varepsilon_i < \delta(\imath_n, \tfrac{1}{n})$$

для любого $x \in \mathcal{X}$. Так, согласно предложению 2.2,

$$\mathrm{pull}_{\imath}(x, x') + \tfrac{1}{n} > \mathrm{pull}_{\imath_n\circ\psi_n}(x, x') \geqslant |\psi_n(x)\,\psi_n(x')|_{\mathcal{P}_n}.$$

Поскольку $|\psi_n(x)\,\psi_n(x')|_{\mathcal{P}_n} \to |xx'|_{\mathcal{X}}$ при $n \to \infty$, отображение $\imath\colon \mathcal{X} \to \mathbb{E}^d$ есть внутренняя изометрия. $\square$

Доказательство необходимости условия в 1.5. Мы проведём построение полиэдра $\mathcal{P}$ по внутренней изометрии $\imath\colon \mathcal{X} \to \mathbb{E}^d$ и замощению $\mathbb{E}^d$ координатными a-кубами, то есть, кубами со стороной a. (Полиэдр $\mathcal{P}$ будет склеен из a-кубов.) Построение будет обладать следующим свойством: если замощение τ' является подразбиением замощения τ, то для соответствующих полиэдров $\mathcal{P}'$ и $\mathcal{P}$ существует естественная внутренняя изометрия $\mathcal{P}' \to \mathcal{P}$. Таким образом, мы сможем построить необходимую обратную систему полиэдров по последовательности подразбиений одного замощения $\mathbb{E}^d$.

Пусть $a_n = \frac{1}{2^n}$ и $r_n = \frac{1}{10}\cdot a_n$. Зафиксируем n на некоторое время. Рассмотрим замощение $\mathbb{E}^d$ координатными a_n-кубами.

Образ $\imath(\mathcal{X})$ покрывается конечным семейством a_n-кубов $\{\square_n^i\}$ из нашего замощения. Для каждого $\square_n^i$ рассмотрим все связные компоненты $\{W_n^{ij}\}$ множества $B_{r_n}(\imath^{-1}(\square_n^i)) \subset \mathcal{X}$, где $B_r(S)$ обозначает r-окрестность множества S.

Согласно предложению 2.1, пространство $\mathcal{X}$ имеет внутреннюю метрику. В частности, каждое множество W_n^{ij} открыто и содержит шар радиуса r_n. Отсюда, для фиксированного i семейство $\{W_n^{ij}\}$ конечно. Таким образом, все W_n^{ij} образуют конечное открытое покрытие $\mathcal{X}$. Для каждого W_n^{ij} заготовим копию $\square_n^{ij}$ куба $\square_n^i$ с изометрией $\imath_n^{ij}\colon \square_n^{ij} \to \square_n^i$. Полиэдр $\mathcal{P}_n$ клеится из $\square_n^{ij}$ по следующему правилу: куб $\square_n^{i_1j_1}$ склеен с $\square_n^{i_2j_2}$ по $(\imath_n^{i_2j_2})^{-1} \circ \imath_n^{i_1j_1}$ тогда и только тогда, когда $W_n^{i_1j_1} \cap W^{i_2j_2} \neq \varnothing$. (Заметьте, что $(\imath_n^{i_2j_2})^{-1} \circ \imath_n^{i_1j_1}$ изометрично отображает одну грань $\square_n^{i_1j_1}$ на грань $\square_n^{i_2j_2}$.)

Построенный полиэдр $\mathcal{P}_n$ допускает естественную кусочно-линейную внутреннюю изометрию $\imath_n\colon \mathcal{P}_n \to \mathbb{E}^d$, определяемую как $\imath_n(x) = \imath_n^{ij}(x)$ при $x \in \square_n^{ij}$. Далее, существует однозначно определённая внутренняя изометрия $\varphi_{m,n}\colon \mathcal{P}_m \to \mathcal{P}_n$ при $m \geqslant n$, которая удовлетворяет условиям $\imath_m = \imath_n \circ \varphi_{m,n}$ и такая, что

$$\varphi_{m,n}(\square_m^{i'j'}) \subset \square_n^{ij} \subset \mathcal{P}_n \quad\Rightarrow\quad W_m^{i'j'} \subset W_n^{ij} \subset \mathcal{X}.$$

Проекции $\psi_n\colon \mathcal{X} \to \mathcal{P}_n$ однозначно определяются условиями $\imath_n \circ \psi_n = \imath$ и

$$\psi_n(x) \in \square_n^{ij} \subset \mathcal{P}_n \quad\Rightarrow\quad x \in W_n^{ij} \subset \mathcal{X}.$$

Очевидно, $\mathcal{P}_n$ вместе с $\varphi_{m,n}$ образуют обратную систему, и $\psi_n = \varphi_{m,n} \circ \psi_m$ при всех $m \geqslant n$.

Чтобы доказать $\mathcal{X} = \varprojlim \mathcal{P}_n$, достаточно проверить, что

$$|xx'|_{\mathcal{X}} \leqslant \lim_{n\to\infty} |\psi_n(x)\,\psi_n(x')| \qquad (*)$$

для всех $x, x' \in \mathcal{X}$.

Для множества $K \subset \mathcal{P}_n$ обозначим через $K^* \subset \mathcal{X}$ объединение всех $W_n^{ij} \subset \mathcal{X}$ таких, что $\square_n^{ij} \cap K \neq \varnothing$. Заметим, что если K связно, то связно и K^*. Более того, $\imath(K^*) \subset B_{r_n}(\imath_n(K))$. Так, из предложения 2.4 получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$r_n + \operatorname{diam} K < \delta \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{diam} K^* < \varepsilon \tag{$**$}$$

Предположим $(*)$ не верно, тогда можно выбрать $x, x' \in \mathcal{X}$ и $\varepsilon, \ell > 0$ такие, что

$$\operatorname{pull}_{\imath,\varepsilon}(x,x') > \ell > |\psi_n(x)\,\psi_n(x')|_{\mathcal{P}_n} \tag{$\substack{*\\**}$}$$

при всех n. В частности, для любого n существует путь $\gamma_n\colon [0,1] \to \mathcal{P}_n$ из $\psi_n(x)$ в $\psi_n(x')$ длины $< \ell$. Выберем $\delta = \delta(\imath, \varepsilon)$ как в предложении 2.4. Пусть значения $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ таковы, что

$$\operatorname{diam} \gamma([t_{i-1}, t_i]) < \tfrac{\delta}{2}. \tag{$\substack{**\\**}$}$$

Можно также предположить, что $m \leqslant 2\cdot\lceil\frac{\ell}{\delta}\rceil$. Для каждого t_i выберем точку $x_i \in \gamma(t_i)^* \subset \mathcal{X}$. Ясно, что

$$|\imath(x_i)\ \imath_n{\circ}\gamma(t_i)|_{\mathbb{E}^d} < 2\cdot a_n. \tag{$\substack{**\\***}$}$$

Отметим, что $x_{i-1}, x_i \in \gamma([t_{i-1}, t_i])^*$. Значит, $(\substack{**\\**})$ и $(**)$ влекут

$$|x_{i-1}x_i| < \operatorname{diam} \gamma_n([t_{i-1}, t_i])^* < \varepsilon$$

для всех достаточно больших n. Отсюда, точки x_i образуют ε-цепь из x в x', и $(\substack{**\\***})$ влечёт

$$\begin{aligned}
\operatorname{pull}_{\imath,\varepsilon}(x,x') &\leqslant \sum_{i=1}^{m} |\imath(x_{i-1})\,\imath(x_i)| < \\
&< \sum_{i=1}^{m} |\imath_n{\circ}\gamma_n(t_{i-1})\ \imath_n{\circ}\gamma_n(t_i)| + 4\cdot a_n\cdot\lceil\tfrac{\ell}{\delta}\rceil < \\
&< \ell + 4\cdot a_n\cdot\lceil\tfrac{\ell}{\delta}\rceil,
\end{aligned}$$

что противоречит $(\substack{*\\**})$ для достаточно больших n. □

Замечание. В построенной обратной системе $(\varphi_{m,n}, \mathcal{P}_n)$, образы $\varphi_{m,n}$ образуют $\sqrt{d}\cdot a_n$-сеть в $\mathcal{P}_n$. Из этого следует, что пространство $\mathcal{X}$ изометрично пределу $\mathcal{P}_n$ по Громову — Хаусдорфу (см. также раздел 2).

Доказательство предложения 1.7. Неравенство $d \leqslant m$ следует из стартового предложения 1.1. Для доказательства второй части нам потребуются два утверждения:

1. Предположим, $\imath\colon \Omega \subset \mathbb{M}^d \to \mathbb{E}^m$ есть внутренняя изометрия, тогда $\imath$ — липшицево для евклидовой метрики на Ω. По теореме Радемахера (см. [11, 3.1.6]) дифференциал $d_p\imath$ определён для почти всех $p \in \Omega$.
2. Пусть $\gamma(t)$ — кривая с натуральным параметром в метрическом пространстве. Тогда
$$|\gamma(t_0)\,\gamma(t_0+\varepsilon)| = \varepsilon + o(\varepsilon)$$
для почти всех значений параметра t_0, см. [3, 2.7.5].

Обозначим через $\|*\|$ норму, которая индуцирует метрику на $\mathbb{M}^d$. Зафиксируем вектор u такой, что $\|u\| = 1$. Рассмотрим пучёк кривых вида $p + u{\cdot}t$ в Ω. Применив оба вышеприведённых утверждения, получаем, что $|d_p\imath(v)| \overset{a.e.}{=\!=} \|v\|$. Отсюда следует тождество параллелограмма

$$2{\cdot}\left(\|v\|^2 + \|w\|^2\right) = \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2$$

для любых векторов v и w. То есть норма $\|*\|$ евклидова. $\square$

4 Об изометриях на путях

В этом разделе сравнивается понятие внутренней изометрии с более распространённым (и менее естественным) понятием изометрии на путях и слабой изометрии на путях.

4.1. Определение. *Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ суть пространства с внутренней метрикой. Отображение $\imath\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ называется*

1. изометрией на путях*, если для любой кривой γ в $\mathcal{X}$ выполняется*

$$\operatorname{length}\gamma = \operatorname{length}\imath\circ\gamma.$$

2. слабой изометрией на путях*, если для любой спрямляемой кривой γ в $\mathcal{X}$ выполняется*

$$\operatorname{length}\gamma = \operatorname{length}\imath\circ\gamma.$$

Как было отмечено в разделе 2, любая внутренняя изометрия является изометрией на путях (в частности, слабой изометрией на путях). Далее мы покажем, что обратное не верно. Для слабой изометрии на путях есть очень простой пример: рассмотрим левоинвариантную субриманову метрику d на группе Гейзенберга H. Тогда факторизация по центру есть слабая изометрия на путях $(H, d) \to \mathbb{E}^2$, которая не является изометрией на путях и уж тем более внутренней изометрией.

4.2. Пример. *Существует компактное пространство с внутренней метрикой $\mathcal{X}$ и изометрия на путях $f\colon \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ такая, что $f^{-1}(0)$ — связное неодноточечное множество.*

Более того, в таком примере размерность Лебега у $f^{-1}(0)$ может быть сделана произвольно большой.

В частности, аналог 1.1 не выполняется для изометрий на путях.

Нижеприведённое построение пространства $\mathcal{X}$ подсказал мне Д. Бураго; оно использует две идеи: (1) построение в [4, 3.1], (2) построение *псевдодуги Кнастера* в [8] (см. также обзор [10]). В этом построении $f^{-1}(0)$ гомеоморфно произведению псевдодуг.

Построение. Пространство $\mathcal{X}$ будет получено как пополнение $\bar{\Gamma}$ некоторого метрического графа[6] Γ.

Сначала опишем построение f по модулю построения Γ. Пусть $\grave{\Gamma} = \bar{\Gamma}\backslash\Gamma$. Рассмотрим отображение $f\colon \bar{\Gamma} \to \mathbb{R}$, где $f(x)$ — расстояние от x до $\grave{\Gamma}$. Очевидно, что f сохраняет длины кривых в Γ и $f(\grave{\Gamma}) = 0$. Значит, достаточно предъявить такой граф Γ, что

[6] то есть, локально конечного графа с внутренней метрикой, каждое ребро которого изометрично отрезку прямой.

(i) $\grave{\Gamma}$ связно и содержит пару различных точек;

(ii) f сохраняет длины всех кривых в $\bar{\Gamma}$ (а не только тех ,что лежат в Γ).

Построение Γ. Пусть $\mathbb{I}$ и $\mathbb{J}$ есть два вещественных отрезка. Непрерывная сюръекция $h\colon \mathbb{I} \to \mathbb{J}$ называется *ε-скрюченной*, если для любых значений $t_1 < t_2$ в $\mathbb{I}$ существуют промежуточные значения $t_1 < t_2' < t_1' < t_2$ такие, что $|h(t_i') - h(t_i)| \leqslant \varepsilon$ для $i \in \{1, 2\}$.

Существование ε-скрюченной сюръекции для произвольного $\varepsilon > 0$ может быть легко показано индукцией по $n = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \cdot \operatorname{length} \mathbb{J} \rceil$.

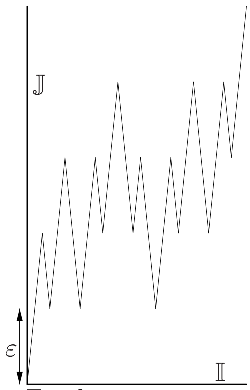

График ε-скюченного отображения.

Зафиксируем последовательность вещественных интервалов $\mathbb{J}_n$ с $\frac{1}{2^n}$-скрюченными короткими сюръекциями $h_n\colon \mathbb{J}_n \to \mathbb{J}_{n-1}$. Заметим, что топологический обратный предел $\mathbb{J}_\infty = \varprojlim \mathbb{J}_n$ есть связный компакт, который не содержит нетривиальных путей.

Можно считать, что $\mathbb{J}_n$ есть линейный метрический граф с длиной каждого ребра $\leqslant \frac{1}{2^n}$. Построим граф Γ из $\sqcup_n \mathbb{J}_n$, подсоединив ребром длины $\frac{1}{2^n}$ каждую вершину v из $\mathbb{J}_n$ к вершине из $\mathbb{J}_{n-1}$, наиболее близкой к $h_n(v)$. Тогда $\grave{\Gamma}$ гомеоморфно $\mathbb{J}_\infty$, отсюда следует (i).

Обозначим через Γ_n конечный подграф Γ с вершинами в $\mathbb{J}_1, \mathbb{J}_2, \ldots, \mathbb{J}_n$. По построению существует короткое отображение $\Gamma_n \to \Gamma_{n-1}$ тождественное на Γ_{n-1}. Значит, для пути $\alpha\colon [0,1] \to \bar{\Gamma}$ общая длина $\alpha\backslash\grave{\Gamma}$ не может быть меньше $|\alpha(0)\,\alpha(1)|_{\bar{\Gamma}}$. Отсюда (ii).

Вторая часть. Мы построим граф $\Gamma^{(m)}$ так, что $\grave{\Gamma}^{(m)}$ гомеоморфен произведению m копий $\grave{\Gamma}$.

Для простоты рассмотрим только случай $m = 2$ — остальные случаи аналогичны. Множество вершин $\Gamma^{(2)}$ есть $\sqcup_n (\operatorname{Vert} \mathbb{J}_n \times \operatorname{Vert} \mathbb{J}_n)$, где $\operatorname{Vert} \mathbb{J}_n$ обозначает множество вершин в $\mathbb{J}_n$. Соединим две вершины $(x, y) \in \operatorname{Vert} \mathbb{J}_n \times \operatorname{Vert} \mathbb{J}_n$ и $(x', y') \in \operatorname{Vert} \mathbb{J}_k \times \operatorname{Vert} \mathbb{J}_k$, если пары (x, x') и (y, y') соединены в Γ, и припишем этому ребру длину, равную максимуму длин рёбер xx' и yy' (мы считаем, что каждая вершина подсоединена к себе ребром длины 0).

По построению $\grave{\Gamma}^{(2)}$ гомеоморфно произведению псевдодуг. Отметим, что естественные проекции $\varsigma_1, \varsigma_2\colon \Gamma^{(2)} \to \Gamma$ являются короткими. Значит, для любого пути $\alpha\colon [0,1] \to \bar{\Gamma}^2$ общая длина $\alpha\backslash\grave{\Gamma}$ не может быть меньше $\max_i |\varsigma_i{\circ}\alpha(0)\,\varsigma_i{\circ}\alpha(1)|$. Таким образом, $\grave{\Gamma}^{(2)}$ билипшицево эквивалентно произведению $\grave{\Gamma} \times \grave{\Gamma}$. $\square$

5 Замечания и открытые вопросы

Пространство $\mathcal{M}$ с внутренней метрикой называется *d-мерным полиэдром Минковского*, если существует конечная триангуляция $\mathcal{M}$ такая, что каждый симплекс изометричен симплексу в пространстве Минковского. Соответственно, компактное метрическое пространство $\mathcal{X}$ называется *проминковским пространством* ранга $\leqslant d$, если оно является обратным пределом d-мерных полиэдров Минковского.

5.1. Вопрос. *Верно ли, что любое компактное пространство с внутренней метрикой и размерностью Лебега d является проминковским пространством ранга d?*

Более конкретный вопрос:

5.2. Вопрос. *Верно ли, что любое метрическое пространство гомеоморфное диску есть проминковское пространство ранга 2?*

Этот вопрос можно переформулировать по-философски: *Есть ли существенная разница между пространствами всех внутренних метрик на двумерном многообразии и всех финслеровых метрик на нём же?* Этот вопрос, поставленный Д. Бураго, положил начало настоящей статье (см. также [4, теорема 1]).

Заметим, что вложение Куратовского $x \mapsto \mathrm{dist}_x$ даёт решение следующего упражнения.

5.3. Упражнение. *Покажите, что любое компактное пространство с внутренней метрикой является обратным пределом последовательности полиэдров Минковского $\mathcal{M}_n$ с $\dim \mathcal{M}_n \to \infty$.*

5.4. Вопрос. *Верно ли, что любая изометрия на путях из замкнутого евклидова шара в евклидово пространство является внутренней изометрией?*

Список литературы

[1] А. В. Акопян, PL-аналог теоремы Нэша — Кейпера, предворительная версия: www.moebiuscontest.ru

[2] А. В. Акопян, А. С. Тарасов, *Конструктивное доказательство теоремы Киршбрауна* Метем. заметки (2008) 84, № 5, 781—784

[3] Д. Ю. Бураго, Ю. Д. Бураго, С. В. Иванов. Курс метрической геометрии, - М. ; Ижевск, 2004, 496 с.

[4] Burago, D.; Ivanov, S.; Shoenthal, D. *Two counterexamples in low dimensional length geometry,* Алгебра и Анализ 19 (2007), № 1, стр. 46—59

[5] Brehm, U., *Extensions of distance reducing mappings to piecewise congruent mappings on* $\mathbb{R}^m$. J. Geom. 16 (1981), no. 2, 187–193.

[6] Громов М. Дифференциальные соотношения с частными производными, Мир, 1990 г.

[7] В. А. Залгаллер, *Изометрические вложения полиэдров.* Доклады АН СССР 123 (1958) 599—601.

[8] Knaster, B. Un continu dont tout sous-continu est indécomposable. Fundamenta math. 3, 247–286 (1922).

[9] Krat, S. *Approximation Problems in Length Geometry,* thesis, 2005

[10] Lewis, Wayne The pseudo-arc. Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) 5 (1999), no. 1, 25–77.

[11] Г. Федерер, *Геометрическая теория меры.* М.: Наука, 1987